عنوان بخش

تحقیق در عملیات پیشرفته

Ph.D

برنامه‌ریزی خطی

■ برنامه‌ریزی خطی یک تکنیک ریاضی در جهت بهترین استفاده از منابع محدود سازمان می‌باشد. منابع موجود در سازمان مانند مواد اولیه، نیروی کار، سرمایه، زمان، ظرفیت ماشین‌آلات، فضا و غیره محدود می‌باشند توسط تکنیک برنامه‌ریزی خطی می‌توان منابع محدود را طوری به فعالیت‌های مختلف تخصیص داد که راه‌حل بهینه مثلاً حداکثر سود یا حداقل هزینه حاصل شود.

■ **هر مدل برنامه‌ریزی خطی دارای یک تابع هدف و تعدادی محدودیت می‌باشد. شکل کلی یک مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است:**

$$(\text{Max} \ \text{یا} \ \text{Min})Z = c_۱x_۱ + c_۲x_۲ \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n x_n$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to:} \quad & a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{۱n}x_n (\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =) b_۱ \\ & a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{۲n}x_n (\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =) b_۲ \\ & \vdots \\ & a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n (\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =) b_m \\ & \qquad x_۱, x_۲, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n \ge ۰ \end{aligned}$$

که به اختصار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\text{Max} \quad \text{Min})Z = \sum_{j=۱}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \text{s.t:} \quad & \sum a_{ij}x_j (\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =) b_i \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m \\ & x_j \ge ۰ j = ۱, ۲, \ldots, m \end{aligned}$$

■ تابع Z را تابع هدف می‌گویند که هدف را نشان می‌دهد و می‌تواند به صورت حداکثر کردن و با حداقل کردن باشد. اگر هدف حداکثر کردن باشد $MaxZ$ و اگر هدف حداقل کردن باشد $MinZ$ نوشته می‌شود. توابع دیگر محدودیت‌ها هستند که منابع، امکانات، شرایط و نیازها را نشان می‌دهند.

■ تعداد m محدودیت اول را محدودیت‌های کارکردی می‌نامند که می‌توانند به‌صورت $(=)$ یا $(\ge)$ و یا $(\le)$ باشند. محدودیت‌های $x_j \ge ۰$ را محدودیت‌های نامنفی می‌گویند. البته در بعضی از مسایل ممکن است متغیر یا متغیرهایی بتوانند مقادیر منفی نیز داشته باشند یعنی آزاد در علامت باشند که در این صورت به جای آن‌ها از تفاضل دو متغیر نامنفی استفاده می‌کنیم.

■ x_j را متغیرهای تصمیم، c_jها، b_iها و a_{ij} را پارامترهای مدل می‌نامند. (اندیس i نشان‌دهنده شماره محدودیت و اندیس j نشان‌دهنده شمار متغیر تصمیم است.)

■ c_jها (ضرایب متغیرها در تابع هدف) معمولاً سود یا زیان یک واحد از فعالیت‌ها را نشان می‌دهند.

■ b_iها (اعداد سمت راست محدودیت‌ها) نشان‌دهنده منابع، امکانات و نیازها هستند مانند میزان مواد اولیه، ظرفیت ماشین‌آلات و غیره.

■ a_{ij} (ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها) که ضرایب فنی یا تکنولوژیکی نامیده می‌شوند نشان‌دهنده مقـادیری از منبع i هستند که برای هر واحد از فعالیت j لازم است.

حل مسایل برنامه‌ریزی خطی:

■ مسایل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان با روش ترسیمی و یا روش سیمپلکس حل نمود روش ترسیمی فقط در حل مسایل دومتغیره کاربرد دارد. لذا در حل مسایل واقعی کـه تعـداد متغیرهـا بیشـتر از ۲ تـا هسـتند از روش سیمپلکس استفاده می‌شود. باید گفت حل مسایل بزرگ با دست امکان‌ناپذیر است.

■ **نرم‌افزارهای بسیاری برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی وجود دارند که تعدادی از آن‌ها به قرار زیر هستند:**

Win QSB , LINDO , LINGO , GINO , GAMS , TORA , STORM , DS , MS , ABQM , Micro Computer , LINPROG.

روش سیمپلکس:

■ روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ توسط جورج دانتزیگ ارائه گردید. به وسـیله ایـن روش مـی‌تـوان مسـایل برنامه‌ریزی خطی با هر تعداد متغیر را حل نمود.

■ **گام‌های لازم در روش سیمپلکس به قرار زیر هستند:** گام ۱- استاندارد کردن مسأله؛ گام ۲- تشـکیل اولین جدول؛گام ۳- تکرار جدول تا زمانی که جدول نهایی حاصل شود.

☑ گام ۱- استاندارد کردن مسأله:

■ **برای استاندارد کردن مسأله چنانچه:**

✓ محدودیت به صورت ≤ باشد به سمت چپ آن یک متغیر کمکی اضافه کنید.

✓ محدودیت به صورت ≥ باشد از سمت چپ آن یک متغیر کمکی کم کرده و یک متغیر مصنوعی اضافه نمایید.

✓ محدودیت به صورت = باشد به سمت چپ آن یک متغیر مصنوعی اضافه نمایید.

■ **متغیر کمکی با S و متغیر مصنوعی با A نشان داده می‌شود:**

شکل استاندارد محدودیت		محدودیت
$2x_1 + 5x_2 + S_1 = 60$	$\rightarrow$	$2x_1 + 5x_2 \le 60$
$4x_1 + x_2 + S_2 + A_2 = 10$	$\rightarrow$	$4x_1 + x_2 \ge 0$
$3x_1 + 2x_2 + A_3 = 30$	$\rightarrow$	$3x_1 + 2x_2 = 30$

■ **موقع استاندارد کردن مسأله در تابع هدف، متغیرها را به طرف چپ می‌بریم:**

شکل استاندارد تابع هدف		تابع هدف
$\text{Max } Z - 6x_1 - 5x_2 = 0$	$\rightarrow$	$\text{MaxZ} = 6x_1 + 5x_2$

☑ **گام ۲- تشکیل اولین جدول:** اولین جدول سیمپلکس یک جواب پایه‌ای موجه اسـت کـه نشـان‌دهنـدهٔ مبداء مختصات می‌باشد. برای تشکیل اولین جدول سیمپلکس کلیه متغیرها را در بالای جدول بنویسید. در زیـر آن‌ها تابع هدف و سپس محدودیت‌ها را وارد نمایید. اگر تمام محدودیت‌ها به صورت ≤ باشند اولین جـدول بـه قرار زیر خواهد بود.

پایه	x_1 x_2 .... x_n S_1 S_2 ....S_m	RHS•
Z		
S_1	محدودیت ۱	
S_2	محدودیت ۲	
$\vdots$		
S_m	محدودیت m	

■ متغیرهایی که در ستون پایه بعد از Z نوشته می‌شوند متغیرهای پایه یا اساسی نامیده می‌شوند. تعداد متغیرهای پایه به تعداد محدودیت‌های مسأله است و مقدار آن‌ها مساوی عدد مقابل خود در سمت راست جدول می‌باشد. باید توجه شود که در تمام جدول‌های سیمپلکس ستون مربوط به متغیرهای پایه، بردار یکه باشد یعنی ضریب یک متغیر پایه در سطر خود مساوی ۱ و در سطرهای دیگر مساوی صفر باشد.

■ متغیرهایی که در ستون پایه نوشته نمی‌شوند متغیرهای غیرپایه نام دارند و مقدار آن‌ها مساوی صفر است.

☑ **گام ۳- تکرار جدول:** برای تکرار جدول باید متغیر ورودی و متغیر خروجی تعیین شده و در جدول بعدی متغیر ورودی به جای متغیر خروجی نوشته شود. تکرار جدول در یک مسأله باید به قدری انجام گیرد که جدول بهینه حاصل شود.

☑ **شرایط جدول بهینه؛** جدولی که جواب بهینه را نشان می‌دهد باید دارای دو شرط زیر باشد:

۱. شرط بهینه بودن؛ ۲. شرط موجه بودن. شرط بهینه بودن این است که تمام اعداد سطر Z یعنی $(Z_j - C_j)$ها در یک مسأله Max، صفر یا مثبت و در یک مسأله Min صفر یا منفی باشند.

■ **شرط موجه بودن این است که اعداد سمت راست جدول یعنی $B^{-1}b$ صفر یا مثبت باشند:**

شرایط جدول بهینه	***مسایل Max***	***مسایل Min***
شرط بهینه بودن	$(Z_j - C_j) \geq 0$	$(Z_i - C_j) \leq 0$
شرط موجه بودن	$B^{-1}b \geq 0$	$B^{-1}b \geq 0$

"شرایط جدول بهینه در مسایل Max و Min"

■ روش سیمپلکس معمولی (سیمپلکس اولیه)، در حل مسایلی به‌کار می‌رود که دارای شرط موجه بودن باشند. در تمام تکرارهای این روش جدول موجه باقی می‌ماند یعنی اعداد سمت راست آن منفی نمی‌شود. به مثال ۱ توجه کنید:

■ **مثال:**

$$\begin{aligned} \text{Max}Z = &\ 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

✓ چون محدودیت‌ها به صورت ≥ هستند با استفاده از متغیرهای کمکی S_1 و S_2، آن‌ها را به صورت مساوی می‌نویسیم.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}Z - 8x_1 + 5x_2 = 0\\
&\text{s.t}\quad 2x_1 + x_2 + S_1 = 20\\
&\qquad x_1 + 3x_2 + S_2 = 40\\
&\qquad x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

■ **اولین جدول سیمپلکس به قرار زیر است:**

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	−۸	−۵	۰	۰	۰
S_1	۲	۱	۱	۰	۲۰
S_2	۱	۳	۰	۱	۴۰

نسبت سطرها

۲۰÷۲=۱۰

۴۰÷۱=۴۰

✓ چون در سطر Z عدد منفی وجود دارد این جدول بهینه نیست و باید تکرار گردد. برای تکرار جدول باید متغیر ورودی و خروجی تعیین شود.

☑ **تعیین متغیر ورودی:** در مسایل Max منفی‌ترین و در مسایل Min مثبت‌ترین عدد سطر Z متغیر ورودی را نشان می‌دهد. در این مسأله x_1 را به‌عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌کنیم. ستون x_1 را ستون ورودی و یا ستون لولا می‌نامند.

☑ **تعیین متغیر خروجی:** در روش سیمپلکس اولیه عدد لولا حتماً باید مثبت باشد. بنابراین اعداد سمت راست جدول را بر اعداد مثبت ستون ورودی تقسیم می‌کنیم و کوچک‌ترین نسبت را برای تعیین متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم. در این مسأله نسبت سطر اول ۱۰ و نسبت سطر دوم ۴۰ است. بنابراین سطر اول یعنی سطر S_1 را به عنوان سطر خروجی و متغیر S_1 را به‌عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم. سطر خروجی را سطر لولا نیز می‌نامند. عدد ۲ که در تقاطع ستون لولا و سطر لولا است عدد لولا نامیده می‌شود.

☑ **انجام تکرار:** در جدول بعدی متغیر خروجی S_1 را از پایه خارج می‌کنیم و به جای آن متغیر ورودی x_1 را می‌نویسیم. این جدول باید طوری نوشته شود که ستون متغیر پایه x_1 به بردار یکه تبدیل شود. یعنی عدد لولا به یک و بقیه اعداد ستون لولا به صفر تبدیل شوند.

■ **در جدول جدید ابتدا سطر لولای جدید را طوری می‌نویسیم که عدد لولا مساوی ۱ شود بنابراین برای نوشتن سطر لولای جدید تمام اعداد سطر لولای قدیم را تقسیم بر عدد لولا می‌کنیم:**

$$\text{سطر لولای جدید} = \frac{\text{سطر لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}}$$

■ **چون در جدول ۱ عدد لولا ۲ است تمام اعداد سطر لولا را تقسیم بر ۲ می‌کنیم تا سطر لولای جدید به‌دست آید:**

$$(\text{سطر } x_1)\ \text{سطر لولای جدید} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

✓ **سطرهای دیگر با استفاده از فرمول زیر نوشته می‌شوند:**

سطر قدیم ـ (سطر لولای جدید) (قرینه ضریب ستون لولا) = سطر جدید

■ ضریب ستون لولا در هر سطر به عددی گفته می‌شود که در ستون لولا قرار دارد.

■ با توجه به فرمول فوق می‌توانیم برای به‌دست آوردن هر سطر جدید، سطر قدیم آن را در بالا و سطر لـولای جدید را در زیر آن بنویسیم سپس قرینه عددی را که در بالای عدد لولا قرار دارد (یعنی قرینه ضریب ستون لولا را) در سطر پایین (سطر لولای جدید) ضرب کنیم و به سطر بالا (سطر قدیم) اضافه نماییم .

■ **سطر Z جدید:** برای محاسبه سطر Z جدید، سطر لولای جدید را در ۸ (قرینه عددی که در بالای عدد لولا قرار دارد) ضرب نموده و به سطر Z قدیم اضافه می‌نماییم:

سطر Z قدیم +	−۸	−۵	۰	۰	۰
سطر لولای جدید × (۸)	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱۰
سطر Z جدید	۰	−۱	۴	۰	۸۰

■ **سطر $S_۲$ جدید:** برای محاسبه سطر $S_۲$ جدید، سطر لولای جدید را در (۱−) ضرب و به سطر Z قدیم اضافه می‌نماییم.

سطر $S_۲$ قدیم +	۱	۳	۰	۱	۴۰
سطر لولای جدید × (۱−)	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱۰
سطر $S_۲$ جدید	۰	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	۱	۳۰

■ **بنابراین جدول ۲ (یا تکرار ۱) به قرار زیر می‌باشد:**

جدول ۲

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
Z	۰	−۱	۴	۰	۸۰
$x_۱$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱۰
$x_۲$	۰	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۳۰

نسبت سطرها

$۱۰ \div \frac{۱}{۲} = ۲۰$

$۳۰ \div \frac{۵}{۲} = ۱۲$

■ **جدول ۲ بهینه نیست زیرا در سطر Z عدد منفی وجود دارد. بنابراین $x_۲$ را به‌عنوان متغیر ورودی و $S_۲$ را به‌عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم چون عدد لولا $\frac{۵}{۲}$ است تمام اعداد سـطر لـولا را تقسـیم بر $\frac{۵}{۲}$ می‌کنیم تا سطر لولای جدید به‌دست آید:**

$$\text{(سطر } x_۲ \text{) سطر لولای جدید} = \left[\begin{matrix} ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} & ۱۲ \end{matrix}\right]$$

■ **سطر Z و $x_۱$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:**

سطر Z قدیم +	۰	−۱	۴	۰	۸۰
سطر لولای جدید × (−۱)	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۲
سطر Z جدید	۰	۰	$\frac{۱۹}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۹۲

سطر Z قدیم +	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱۰
سطر لولای جدید × $\left(-\frac{۱}{۲}\right)$	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۲
سطر $x_۱$ جدید	۱	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	۴

✓ **بنابراین جدول ۳ به قرار زیر است:**

جدول ۳ — ***جدول نهایی***

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
Z	۰	۰	$\frac{۱۹}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۹۲
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	۴
$x_۲$	۰	۱	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۲

■ **جدول ۳ جدول نهایی است زیرا درسطر Z آن عدد منفی وجود ندارد. جواب بهینه مسأله بـه قـرار زیر است.**

$$x_۱^* = ۴ \quad , \quad x_۲^* = ۱۲ \quad , \quad S_۱^* = ۰ \quad , \quad S_۲^* = ۰ \quad , \quad Z^* = ۹۲$$

حل مسایلی که به صورت Min (حداقل کردن) هستند:

☑ **حل مسایل Max و Min در دو مورد زیر با هم متفاوت هستند:**

✓ در مسایل Max، زمانی جواب بهینه به دست می‌آید که کلیه ضرایب سطر Z صفر یا مثبت باشند ولی در مسایل Min، زمانی جواب بهینه به دست می‌آید که کلیه ضرایب سطر Z صفر یا منفی باشند.

✓ در مسایل Max، منفی‌ترین ضریب سطر Z برای انتخاب متغیر ورودی در نظر گرفته می‌شود در صـورتی که در مسایل Min، مثبت‌ترین ضریب سطر Z نشان‌دهنده متغیر ورودی است.

تعیین متغیر خروجی و تکرار جدول در مسایل Max و Min یکسان است.

$$\begin{aligned} \text{MinZ} = \; & ۳x_۱ - ۵x_۲ \\ \text{s.t} \quad & x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ & -x_۱ + x_۲ \le ۴ \\ & ۴x_۱ - x_۲ \le ۸ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MinZ} = \; & -۳x_۱ + ۵x_۲ = ۰ \\ \text{s.t} \quad & x_۱ + x_۲ + S_۱ = ۶ \\ & -x_۱ + x_۲ + S_۲ = ۴ \\ & ۴x_۱ - x_۲ + S_۳ = ۸ \\ & x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, S_۳ \ge ۰ \end{aligned}$$

✓ حل:

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		نسبت‌ها	
تکرار صفر	Z	−۳	۵	۰	۰	۰	۰		
	S_1	۱	۱	۱	۰	۰	۶	۶÷۱=۶	
	S_2	−۱	۱	۰	۱	۰	۴	۴÷۱=۴	سطر خروجی
	S_3	۴	−۱	۰	۰	۱	۸		
تکرار ۱	Z	۲	۰	۰	−۵	۰	−۲۰		
	S_1	۲	۰	۱	−۱	۰	۲	۲÷۲=۱	سطر خروجی
	x_2	−۱	۱	۰	۱	۰	۴	–	
	S_3	۳	۰	۰	۱	۱	۱۲	۱۲÷۳=۴	
تکرار ۲	Z	۰	۰	−۱	−۴	۰	−۲۲		
	x_1	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۱		
	x_2	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۵		جدول نهایی
	S_3	۰	۰	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	۱	۹		

نکته‌برتر: می‌توان در مثال ۲، با ضرب کردن تابع هدف در (−)، تابع هدف **Min** را بـه **Max** تبـدیل و حل نمود.

☑ **حل مسایلی که دارای محدودیت‌هایی به صورت ≤ و یا = هسـتند:** محـدودیت‌هـای ≤ و یـا = باعث می‌شوند که مبداء مختصات خارج از منطقه موجه قرار گیرد و نتوان از آن به‌عنوان یک جواب پایه‌ای موجه استفاده نمود. در این‌گونه مسایل برای این که بتوان از مبداء مختصات به‌عنوان اولین جواب پایه‌ای استفاده گردد از متغیرهای مصنوعی (ساختگی) به صورت زیر استفاده می‌شود:

محدودیت		شکل استاندارد محدودیت
$x_1 + x_2 \geq 5$	$\rightarrow$	$x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 5$
$2x_1 + x_2 = 8$	$\rightarrow$	$2x_1 + x_2 + A_2 = 8$

نکته‌برتر: تا زمانی که مقدار تمام متغیرهای مصنوعی صفر نگردند جواب موجه برای مسأله اصلی به‌دست نمی‌آید. لذا به منظور صفر شدن متغیرهای مصنوعی، در حل این‌گونه مسایل از روش M بزرگ یا دو مرحلـه‌ای استفاده می‌شود. در ادامه روش M بزرگ شرح داده می‌شود.