فهرست

فصل	شمارهٔ پاسخ	شمارهٔ صفحه
فصل ۱ : تابع		
درس (۱) مفهوم تابع	۱	۷
درس (۲) تبدیل نمودار توابع	۸۱	۱۷
درس (۳) تابع درجه‌سوم و توابع صعودی و نزولی	۱۲۵	۲۵
درس (۴) تابع یک‌به‌یک و وارون	۱۶۸	۳۲
درس (۵) اعمال جبری و ترکیب توابع	۲۲۱	۴۰
درس (۶) بخش‌پذیری و تقسیم	۳۱۴	۵۳
فصل ۲ : مثلثات		
درس (۱) زاویه و نسبت‌های مثلثاتی	۴۲۳	۶۹
درس (۲) دایرهٔ مثلثاتی	۴۶۲	۷۴
درس (۳) اتحادهای مثلثاتی	۴۹۸	۷۸
درس (۴) توابع مثلثاتی	۵۹۲	۹۱
درس (۵) تناوب و تابع تانژانت	۶۱۵	۹۴
درس (۶) معادلات مثلثاتی	۶۷۲	۱۰۴
فصل ۳ : حد و پیوستگی		
درس (۱) همسایگی ومفهوم حد	۷۸۸	۱۲۳
درس (۲) محاسبهٔ حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)	۸۴۵	۱۳۰
درس (۳) پیوستگی	۹۱۸	۱۴۱
درس (۴) حد بی‌نهایت	۹۷۹	۱۵۰
درس (۵) حد در بی‌نهایت	۱۰۲۹	۱۵۶
فصل ۴ : مشتق		
درس (۱) آشنایی با مفهوم مشتق	۱۱۲۸	۱۷۰
درس (۲) مشتق‌پذیری و پیوستگی ۱	۱۱۶۲	۱۷۴
درس (۳) مشتق‌پذیری و پیوستگی ۲	۱۲۹۰	۱۹۱
درس (۴) آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای	۱۳۹۳	۲۰۶
فصل ۵ : کاربرد مشتق		
درس (۱) اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱	۱۴۶۳	۲۱۵
درس (۲) اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۲	۱۵۱۰	۲۲۲
درس (۳) جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن	۱۵۹۲	۲۳۶
درس (۴) رسم نمودار توابع	۱۶۷۳	۲۵۰

فصل	شمارهٔ پاسخ	شمارهٔ صفحه

۵۱۱- گزینهٔ ۳ تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\tan x)=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$(fog)(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}=\frac{\tan x}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}}=(\tan x)(\sqrt{\cos^2 x})$$

از آن‌جایی که $\sqrt{u^2}=|u|$، بنابراین: $(fog)(x)=(\tan x)|\cos x|$

حدود x بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ است، یعنی انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم و سوم است. کسینوس در این نواحی مقدار منفی دارد، بنابراین:

$$(fog)(x)=(\tan x)|\underset{-}{\cos x}|=(\tan x)(-\cos x)$$

در پایان با توجه به تساوی $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ حاصل را می‌یابیم:

$$\Rightarrow (fog)(x)=(\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}})(-\cancel{\cos x})=-\sin x$$

۵۱۲- گزینهٔ ۴

$$9x^2=9(\frac{2}{\sin\alpha})^2=9(\frac{4}{\sin^2\alpha})=\frac{36}{\sin^2\alpha}$$

با استفاده از رابطهٔ $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ داریم:

$$9x^2=36(1+\cot^2\alpha)$$

از آن‌جایی که $y=3\cot\alpha$، پس: $\cot\alpha=\frac{y}{3}$

در نتیجه: $9x^2=36(1+(\frac{y}{3})^2)=36(1+\frac{y^2}{9})=36+4y^2$

۵۱۳- گزینهٔ ۲

$$AB=(\tan x-\frac{1}{\cos x})(\tan x+\frac{1}{\cos x})=\tan^2 x-\frac{1}{\cos^2 x}$$

با توجه به این‌که $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$، بنابراین:

$$AB=\tan^2 x-(1+\tan^2 x)=\tan^2 x-1-\tan^2 x=-1$$

۵۱۴- گزینهٔ ۴ اگر دو مقدار معکوس هم باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر یک خواهد بود: $(\sqrt{1+\cot^2\theta}).(|\cos\theta|)=1$

با توجه به رابطهٔ $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ داریم:

$$\Rightarrow (\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}}).|\cos\theta|=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta}}.|\cos\theta|=1$$

از آن‌جایی که $\sqrt{u^2}=|u|$، بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sin\theta|}|\cos\theta|=1 \xrightarrow{\sin\theta\neq 0} |\cos\theta|=|\sin\theta|$$

حالا باید دنبال کمان‌هایی باشیم که $\sin\theta$ و $\cos\theta$ برابرند یا قرینهٔ هم هستند. این اتفاق در نیمساز ناحیه‌ها رخ می‌دهد.

پس در بازهٔ $[0,2\pi]$ به ازای چهار مقدار $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ تساوی بالا برقرار است. می‌توانستید این‌طوری هم فکر کنید:

$$\frac{1}{|\sin\theta|}|\cos\theta|=1 \Rightarrow |\cot\theta|=1$$

$$\Rightarrow \cot\theta=\pm 1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

۵۱۵- گزینهٔ ۳ اول تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم. برای ساده‌سازی در طرف چپ از رابطهٔ $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ استفاده می‌کنیم:

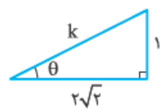
$$\begin{cases}\frac{1}{\sin^4\theta}=(\frac{1}{\sin^2\theta})^2=(1+\cot^2\theta)^2\\ =1+\cot^4\theta+2\cot^2\theta\\ \frac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta\end{cases}$$

بنابراین تساوی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(1+\cot^4\theta+2\cot^2\theta)-(1+\cot^2\theta)=8+\cot^4\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{\cot^4\theta}+\cot^2\theta=8+\cancel{\cot^4\theta} \Rightarrow \cot^2\theta=8$$

$$\cot\theta=\pm 2\sqrt{2}=\pm\frac{\overbrace{2\sqrt{2}}^{\text{ضلع مجاور}}}{\underbrace{1}_{\text{ضلع مقابل}}} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow k^2=1^2+(2\sqrt{2})^2=9 \Rightarrow k=3$$

پس با توجه به این‌که θ در ناحیهٔ دوم مثلثاتی است، بنابراین حاصل $\sin\theta$ برابر است با:

$$\sin\theta=+\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$$

۵۱۶- گزینهٔ ۴

راه اول نامعادله: $\cos x\underbrace{\sqrt{1+\tan^2 x}}_{\text{مثبت}}>\underbrace{\sqrt{1+\sin 2x}}_{\text{نامنفی}}$

پس برای این‌که نامعادلهٔ بالا برقرار باشد، $\cos x$ باید مثبت باشد (چون در غیر این صورت طرف چپ مقداری منفی خواهد شد و نمی‌تواند از طرف راست بیشتر باشد)؛ پس انتهای کمان x در نواحی اول یا چهارم قرار دارد.

هم‌چنین از آن‌جایی که $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$، داریم:

نامعادله: $\cos x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}>\sqrt{1+\sin 2x}$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}>\sqrt{1+\sin 2x}$$

با توجه به این‌که $\sqrt{u^2}=|u|$، بنابراین: $\Rightarrow \frac{\cos x}{|\cos x|}>\sqrt{1+\sin 2x}$

$$\xrightarrow{\cos x>0} \frac{\cos x}{\cos x}>\sqrt{1+\sin 2x} \Rightarrow 1>\sqrt{1+\sin 2x}$$

خب حالا اگر x در ناحیهٔ اول باشد، آن‌گاه:

$$\sin 2x>0 \Rightarrow 1+\sin 2x>1 \Rightarrow \sqrt{1+\sin 2x}>1 \quad \times$$

پس انتهای کمان x در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

راه دوم می‌توانید با کمک گزینه‌ها و با انتخاب یک کمان مناسب در هر ناحیه، درست‌بودن نامساوی را بررسی کنید.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

خیلی سبز!

برای مثال با انتخاب $x=-\frac{\pi}{3}$ که در ناحیهٔ چهارم قرار دارد، خواهیم داشت: $\frac{1}{2}\sqrt{1+3} > \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow 1 > \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$:نامساوی ✓

۵۱۷- گزینهٔ ۱

می‌دانیم: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

بنابراین: $\cos 80^\circ \cos 50^\circ+\sin 80^\circ \sin 50^\circ=\cos(80^\circ-50^\circ)$

$$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۱۸- گزینهٔ ۱ هر دو جمله $\cos 15^\circ$ دارند، پس از آن فاکتور می‌گیریم:

$$\sin 5^\circ \cos 10^\circ \cos 15^\circ+\cos 5^\circ \sin 10^\circ \cos 15^\circ$$

$$=\cos 15^\circ(\sin 5^\circ \cos 10^\circ+\cos 5^\circ \sin 10^\circ)$$

از اتحاد $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$=\cos 15^\circ(\sin(5^\circ+10^\circ))=\cos 15^\circ \sin 15^\circ$$

حالا از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sin 15^\circ \cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

۵۱۹- گزینهٔ ۳ $\sin(15^\circ)=\sin(45^\circ-30^\circ)$

حالا با استفاده از رابطهٔ: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

داریم: $\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ \cos 30^\circ-\cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})-(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

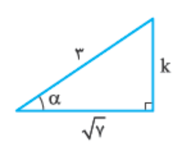
۵۲۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از رابطهٔ مجموع و تفاضل کمان‌ها در کسینوس داریم:

$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} \cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$

$$=2(\frac{\sqrt{2}}{2})\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha$$

پس باید مقدار $\sqrt{2}\sin\alpha$ را محاسبه می‌کنیم. مقدار کسینوس را داریم:

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow k^2+(\sqrt{7})^2=3^2 \Rightarrow k^2+7=9 \Rightarrow k^2=2 \Rightarrow k=\sqrt{2}$$

از آن‌جایی که انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد و علامت سینوس در این ناحیهٔ منفی است، بنابراین: $\sin\alpha=-\frac{k}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$

در نتیجه مقدار $\sqrt{2}\sin\alpha$ برابر است با:

عبارت $=\sqrt{2}\sin\alpha=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{3})=-\frac{2}{3}$

۵۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که: $\sin(\alpha+\cancel{2\pi})=-\sin\alpha$

$$\sin(\alpha+\frac{5\pi}{3})=\sin(\alpha+\cancel{2\pi}-\frac{\pi}{3})=\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$$

پس: عبارت $=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin\alpha+\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow$ عبارت $=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})-\sin\alpha$

حالا با استفاده از رابطهٔ مجموع و تفاضل کمان‌ها در سینوس داریم:

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

جمع: $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=2\sin\alpha\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}}=\sin\alpha$

پس حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با: عبارت $=\sin\alpha-\sin\alpha=0$

۵۲۲- گزینهٔ ۱ با ضرب عبارت‌های داخل پرانتزها در هم داریم:

عبارت $=\underbrace{\cos 20^\circ \cos 10^\circ+\sin 20^\circ \sin 10^\circ}$

$$\underbrace{+\cos 20^\circ \sin 10^\circ+\sin 20^\circ \cos 10^\circ}-\sin 80^\circ$$

حالا از روابط مجموع و تفاضل کمان در سینوس و کسینوس (برای عبارت‌هایی که مشخص شده‌اند) استفاده می‌کنیم:

$\Rightarrow$ عبارت $=\cos(20^\circ-10^\circ)+\sin(10^\circ+20^\circ)-\sin 80^\circ$

$$=\cos 10^\circ+\sin 30^\circ-\sin 80^\circ$$

از آن‌جایی که $\cos 10^\circ=\sin 80^\circ$ *(چون جمع کمان‌هاشون 90° است)*، بنابراین:

عبارت $=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

۵۲۳- گزینهٔ ۱ از رابطهٔ $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}}{\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}}=2 \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}=2$$

در صورت و مخرج از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sin x-\cos x)}{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sin x+\cos x)}=2$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \sin x-\cos x=2\sin x+2\cos x$$

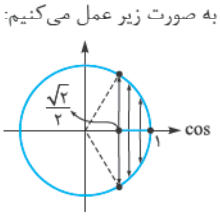
$$\Rightarrow -\sin x=3\cos x \Rightarrow \tan x=-3$$

۵۲۴- گزینهٔ ۱ با توجه به رابطهٔ تفاضل کمان‌ها در کسینوس داریم:

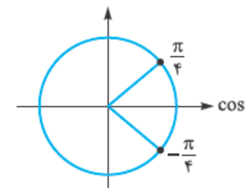
$$\cos 3x\cos 2x+\sin 3x\sin 2x=\cos(3x-2x)=\cos x$$

پس: $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le 1$

حالا باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که مقادیر کسینوس آن در این فاصله قرار گیرند. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le 1 \Rightarrow$ 

از آن‌جایی که $\cos(-\frac{\pi}{۴}) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، بنابراین:



$$\Rightarrow -\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۴}$$

۵۲۵- گزینهٔ ۳ $\cos ۳\alpha$ و $\sin ۳\alpha$ را به ترتیب به صورت $\cos(۲\alpha+\alpha)$ و $\sin(۲\alpha+\alpha)$ در نظر می‌گیریم و از روابط مجموع کمان‌ها در سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{\cos(۲\alpha+\alpha)+\sin\alpha\sin ۲\alpha}{\sin(۲\alpha+\alpha)-\sin ۲\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{\cos ۲\alpha\cos\alpha - \cancel{\sin ۲\alpha\sin\alpha} + \cancel{\sin\alpha\sin ۲\alpha}}{\cancel{\sin ۲\alpha\cos\alpha} + \cos ۲\alpha\sin\alpha - \cancel{\sin ۲\alpha\cos\alpha}}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{\cancel{\cos ۲\alpha}\cos\alpha}{\cancel{\cos ۲\alpha}\sin\alpha} = \cot\alpha$$

۵۲۶- گزینهٔ ۴ با کمک اتحاد مزدوج و فرمول‌های مجموع و تفاضل کمان‌ها عبارت را *خوش‌فرم‌تر!* می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{\boxed{\cos(\alpha+\beta)}\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\boxed{\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$= \cot(\alpha+\beta)\cot(\alpha-\beta) \quad (*)$$

حالا از داده‌های مسئله استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = ۱۳۵^\circ \Rightarrow \cot(\alpha+\beta) = \cot ۱۳۵^\circ = -۱ \\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \cot(\alpha-\beta) = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

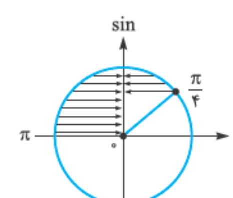
بنابراین:
$$\xrightarrow{(*)} \text{عبارت} = (-۱)(\frac{۴}{۳}) = -\frac{۴}{۳}$$

۵۲۷- گزینهٔ ۱ اول این‌که: $\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{۲}\sin(\theta+\frac{\pi}{۴})$

حالا با توجه به حدود θ، حدود این عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$۰ \le \theta \le \frac{۳\pi}{۴} \xrightarrow{+\frac{\pi}{۴}} \frac{\pi}{۴} \le \theta+\frac{\pi}{۴} \le \pi$$

باید حدود سینوس را در این فاصله بیابیم:



$$\Rightarrow ۰ \le \sin(\theta+\frac{\pi}{۴}) \le ۱$$

$$\Rightarrow ۰ \le \sqrt{۲}\sin(\theta+\frac{\pi}{۴}) \le \sqrt{۲}$$

پس بیشترین مقدار $\sin\theta+\cos\theta$ (یعنی $\sqrt{۲}$)، $\sqrt{۲}$ واحد از کم‌ترین مقدار آن (یعنی صفر) بیشتر است. در نتیجه اختلاف آن‌ها $\sqrt{۲}$ است.

۵۲۸- گزینهٔ ۳ با استفاده از روابط $\sin x \pm \cos x = \sqrt{۲}\sin(x\pm\frac{\pi}{۴})$

خواهیم داشت:
$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} = \frac{\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}$$

حالا $x = \frac{\pi}{۱۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$\text{عبارت} = \frac{\sin(\frac{\pi}{۱۲}+\frac{\pi}{۴})}{\sin(\frac{\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۴})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{۳})}{\sin(-\frac{\pi}{۶})} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۳}$$

۵۲۹- گزینهٔ ۴ طرفین تساوی داده‌شده را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$۳\cos x+\sqrt{۳}\sin x = ۳ \xrightarrow{\div ۳} \cos x+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\sin x = ۱$$

حالا با توجه به این‌که $\tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، به جای $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $\tan\frac{\pi}{۶}$ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \cos x+\tan\frac{\pi}{۶}\sin x = ۱ \Rightarrow \cos x+\frac{\sin\frac{\pi}{۶}}{\cos\frac{\pi}{۶}}\sin x = ۱$$

$$\frac{\cos x\cos\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۶}\sin x}{\cos\frac{\pi}{۶}} = ۱$$

در صورت کسر، از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x-\frac{\pi}{۶})}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۱ \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵۳۰- گزینهٔ ۳ اول صورت کسر را ساده می‌کنیم. از آن‌جایی که $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ داریم:

صورت: $\cos ۲۰^\circ+\sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ = \cos ۲۰^\circ+\tan ۶۰^\circ\sin ۲۰^\circ$

$$= \cos ۲۰^\circ+\frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}\sin ۲۰^\circ = \frac{\cos ۶۰^\circ\cos ۲۰^\circ+\sin ۶۰^\circ\sin ۲۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}$$

$$= \frac{\cos(۶۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos ۶۰^\circ} = \frac{\cos ۴۰^\circ}{\frac{۱}{۲}} = ۲\cos ۴۰^\circ$$

در نتیجه:
$$\text{عبارت} = \frac{۲\cos ۴۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}$$

با توجه به این‌که $\cos ۴۰^\circ = \sin ۵۰^\circ$ داریم:
$$\text{عبارت} = \frac{۲\cancel{\sin ۵۰^\circ}}{\cancel{\sin ۵۰^\circ}} = ۲$$

۵۳۱- گزینهٔ ۱ هر یک از نسبت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}+\alpha}_{\text{دوم}}) = \cos\alpha \,,\, \sin(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{سوم}}) = -\sin\alpha$$

$$\sin(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{دوم}}) = \sin\alpha \,,\, \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

با جای‌گذاری در عبارت داریم:

$$\text{عبارت} = (\cos\alpha)(-\sin\alpha)-(\sin\alpha)(\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$\text{عبارت} = -\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha = -۲\sin\alpha\cos\alpha$$

می‌دانیم $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$، بنابراین: $\text{عبارت} = -\sin ۲\alpha$

۵۳۲- گزینهٔ ۴ مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\text{عبارت} = \frac{\sin ۳a\cos a-\sin a\cos ۳a}{\sin a}$$

با استفاده از رابطهٔ تفاضل کمان‌ها در سینوس داریم:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin(۳a-a)}{\sin a}=\frac{\sin ۲a}{\sin a}$$

در پایان از رابطهٔ $\sin ۲a=۲\sin a\cos a$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\frac{۲\cancel{\sin a}\cos a}{\cancel{\sin a}}=۲\cos a$$

۵۳۳- گزینهٔ ۴ **راه اول** ابتدا $\cot x$ را به صورت $\frac{\cos x}{\sin x}$ می‌نویسیم:

$$\text{عبارت}=\cos ۳x-\frac{\cos x}{\sin x}\sin ۳x=\frac{\cos ۳x\sin x-\cos x\sin ۳x}{\sin x}$$

حالا باید در صورت کسر، از رابطهٔ تفاضل کمان‌ها در سینوس استفاده کنیم. فقط دقت کنید که:

$$\cos ۳x\sin x-\cos x\sin ۳x=\sin(x-۳x)=\sin(-۲x)$$

بنابراین:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin(-۲x)}{\sin x}=\frac{-\sin ۲x}{\sin x}$$

و بالاخره با استفاده از رابطهٔ $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ خواهیم داشت:

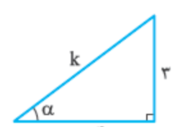
$$\text{عبارت}=\frac{-۲\cancel{\sin x}\cos x}{\cancel{\sin x}}=-۲\cos x$$

راه دوم از مقداردهی استفاده می‌کنیم. $x=\frac{\pi}{۶}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$\text{عبارت}=\cos\frac{\pi}{۲}-\cot\frac{\pi}{۶}\sin\frac{\pi}{۲}=۰-\sqrt{۳}(۱)=-\sqrt{۳}$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ خروجی $-\sqrt{۳}$ دارد، (۴) است.

۵۳۴- گزینهٔ ۱ اول یک موضوع مهم را بررسی می‌کنیم. وقتی $\tan\alpha$ مثبت است، حتماً $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت هستند و حاصل‌ضرب $\sin\alpha\cos\alpha$ مثبت است. پس (۲) و (۴) رد می‌شوند. پس در این‌جا $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ بوده و مقدار $\sin ۲\alpha$ را می‌خواهیم. باید از رابطهٔ $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\ (*)$ استفاده کنیم؛ در نتیجه باید مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را با استفاده از مقدار $\tan\alpha$ محاسبه کنیم. از روش مثلث استفاده می‌کنیم:

$\tan\alpha=\frac{۳}{۴}\ \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow k^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵\ \Rightarrow\ k=۵$$

گفتیم به علامت سینوس و کسینوس نیازی نداریم؛ چون تحت هر شرایطی حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است.

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{۳}{k}=\frac{۳}{۵}\\[4pt]\cos\alpha=\frac{۴}{k}=\frac{۴}{۵}\end{cases}\xrightarrow{(*)}\sin ۲\alpha=۲(\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$$

۵۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که:

$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{۲}-a)=\sin a\\[4pt]\cos(\frac{\pi}{۲}-b)=\sin b\end{cases}\Rightarrow\text{عبارت}=۸\cos a\cos b\sin a\sin b$$

از آن‌جایی که $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$ و در نتیجه $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، داریم:

$\frac{۱}{۲}\sin ۲b$

$$\text{عبارت}=۸\cos a\cos b\sin a\sin b$$

$\frac{۱}{۲}\sin ۲a$

$$\text{عبارت}=۸(\frac{۱}{۲}\sin ۲a)(\frac{۱}{۲}\sin ۲b)=۲\sin ۲a\sin ۲b$$

در گزینه‌ها تمام کمان‌ها برحسب a است، در نتیجه با توجه به تساوی $a+b=\frac{\pi}{۴}$ خواهیم داشت: $b=\frac{\pi}{۴}-a$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در عبارت}}\text{عبارت}=۲\sin ۲a\sin(۲(\frac{\pi}{۴}-a))$$

$$=۲\sin ۲a\underbrace{\sin(\frac{\pi}{۲}-۲a)}_{\cos ۲a}=۲\sin ۲a\cos ۲a=\sin ۴a$$

دقت کنید که: $۲\sin u\cos u=\sin ۲u$

پس: $۲\sin ۲a\cos ۲a=\sin ۴a$

۵۳۶- گزینهٔ ۳ اول توجه کنید که:

$$\cos(۱۶۵^\circ)=\cos(\overset{\pi}{\overset{\uparrow}{۱۸۰^\circ}}-۱۵^\circ)=-\cos ۱۵^\circ$$

$$\cos(۱۰۵^\circ)=\cos(\overset{\frac{\pi}{۲}}{\overset{\uparrow}{۹۰^\circ}}+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$

در نتیجه:

$$\cos ۱۶۵^\circ\cos ۱۰۵^\circ=(-\cos ۱۵^\circ)(-\sin ۱۵^\circ)=\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ$$

حالا از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$$

۵۳۷- گزینهٔ ۳ از آن‌جایی که:

$$\sin ۹۷/۵^\circ=\sin(\overset{\frac{\pi}{۲}}{\overset{\uparrow}{۹۰^\circ}}+۷/۵^\circ)=\cos ۷/۵^\circ$$

بنابراین:

$$\text{عبارت}=\sin ۷/۵^\circ\cos ۷/۵^\circ\cos ۱۵^\circ$$

$$=(\frac{۱}{۲}\sin ۱۵^\circ)\cos ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}))=\frac{۱}{۸}$$

۵۳۸- گزینهٔ ۴ در صورت از فرمول‌های $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$ و $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$ و در مخرج از فرمول‌های $۱-\sin^۲\theta=\cos^۲\theta$ و $۱-\cos^۲\theta=\sin^۲\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{\underbrace{۱-\sin^۲\theta}_{\cos^۲\theta}-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta}\cdot\frac{۱}{\sin^۲\theta}}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\cos^2\theta(\underbrace{1-\cos^2\theta}_{\sin^2\theta})}=\frac{\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\cos^2\theta\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^4\theta\cos^4\theta}$$

$$=\frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^4}$$

حالا از فرمول $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ استفاده کرده و حاصل را می‌یابیم:

$$\text{عبارت}=\frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 2\theta)^4}=\frac{1}{\frac{1}{16}\sin^4 2\theta}=16\sin^{-4}2\theta$$

۵۳۹- گزینهٔ «۱» **راه اول** تابع را تشکیل داده و با استفاده از روابط مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=x-\sqrt{x}\\ g(x)=\sin^4 x\end{cases}\Rightarrow f(g(x))=\sin^4 x-\sqrt{\sin^4 x}$$

$$\Rightarrow f(g(x))=\sin^4 x-\sin^2 x$$

این عبارت در گزینه‌ها نیست؛ پس باید با کمک روابط مثلثاتی، معادل عبارت بالا را بیابیم. ابتدا از $\sin^2 x$ فاکتور می‌گیریم.

$$f(g(x))=\sin^4 x-\sin^2 x=\sin^2 x(\sin^2 x-1)$$

از آن‌جایی که $\cos^2 x=1-\sin^2 x$، بنابراین:

$$f(g(x))=\sin^2 x(-\cos^2 x)=-\sin^2 x\cos^2 x=-(\sin x\cos x)^2$$

در نهایت از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$f(g(x))=-(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=-\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

راه دوم مقداردهی می‌کنیم. با فرض $x=\frac{\pi}{6}$ داریم:

$$f(g(\frac{\pi}{6}))=f(\sin^4\frac{\pi}{6})=f((\frac{1}{2})^4)$$

$$=f(\frac{1}{16})=\frac{1}{16}-\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{16}$$

تنها در ۱ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ خروجی $-\frac{3}{16}$ داریم. ببینید:

$$-\frac{1}{4}\sin^2 2(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=-\frac{1}{4}(\frac{3}{4})=-\frac{3}{16}$$

۵۴۰- گزینهٔ «۳» اول مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ}-\frac{1}{\cos 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$$

در صورت از رابطهٔ $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\overset{45^\circ}{\overset{\uparrow}{\frac{\pi}{4}}})$ و در مخرج از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت}=\frac{-\sqrt{2}\sin(15^\circ-45^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\sin(-30^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}=\frac{-\sqrt{2}(-\cancel{\sin 30^\circ})}{\frac{1}{2}\cancel{\sin 30^\circ}}=2\sqrt{2}$$

۵۴۱- گزینهٔ «۳» از دو رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}(1)\ \sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\\ (2)\ \sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\end{cases}$$

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{5}\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{4}{5}\ (*)$$

حالا مقدار $\sin^6 x+\cos^6 x$ را می‌یابیم:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\overset{(*)}{=}1-\frac{3}{4}(\frac{4}{5})=\frac{2}{5}$$

۵۴۲- گزینهٔ «۳» اول از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ)(\cos 15^\circ+\sin 15^\circ)=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$$

حالا از رابطهٔ $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\cos(2(15^\circ))=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۴۳- گزینهٔ «۲» می‌دانیم $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$؛ بنابراین:

$$\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}=\cos 2(\frac{\pi}{12})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۴۴- گزینهٔ «۳» از فرمول $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$x=22.5^\circ$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin^2 22.5^\circ=\frac{1-\cos(2(22.5^\circ))}{2}=\frac{1-\cos 45^\circ}{2}$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

۵۴۵- گزینهٔ «۲» با کمک رابطهٔ $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ داریم:

$$\tan 20^\circ(1+\cos 40^\circ)=\tan 20^\circ(2\cos^2 20^\circ)$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}(2\cos^2 20^\circ)=\sin 20^\circ(2\cos 20^\circ)$$

$$=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\sin 40^\circ$$

در آخر از رابطهٔ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ استفاده کردیم.

۵۴۶- گزینهٔ «۳» اول در طرف چپ از رابطهٔ $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ و در طرف راست از رابطهٔ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$1-\cos 2\hat{C}=\tan\hat{C}\Rightarrow 2\sin^2\hat{C}=\frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}}$$

چون C زاویهٔ مثلث است، پس $\sin\hat{C}\neq 0$ و در نتیجه می‌توانیم $\sin\hat{C}$ را از طرفین حذف کنیم:

$$\Rightarrow 2\sin\hat{C}=\frac{1}{\cos\hat{C}}\xrightarrow{\times\cos\hat{C}}2\sin\hat{C}\cos\hat{C}=1$$

حالا در طرف چپ از رابطهٔ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sin 2\hat{C}=1=\sin 90^\circ\Rightarrow 2\hat{C}=90^\circ\Rightarrow \hat{C}=45^\circ$$

۵۴۷- گزینهٔ ۲ اول مقدار $\tan\frac{2\pi}{3}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\frac{2\pi}{3}=\tan(\pi-\frac{\pi}{3})=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

هم‌چنین $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=-\cos x$، بنابراین:

$$\tan\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x)=1$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ (*)$$

در نهایت برای محاسبهٔ مقدار $\cos 2x$ از رابطهٔ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(*)} \cos 2x=2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

۵۴۸- گزینهٔ ۱ با توجه به تساوی $f(\sin\alpha)=\cos 2\alpha$، اگر بتوانیم $\cos 2\alpha$ را برحسب $\sin\alpha$ بنویسیم، بخش اعظمی از حل را رفته‌ایم، پس از رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(\sin\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $f(\frac{1}{4})$، به جای $\sin\alpha$ مقدار $\frac{1}{4}$ را قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{1}{4})=1-2(\frac{1}{4})^2=1-2(\frac{1}{16})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

۵۴۹- گزینهٔ ۱ با استفاده از روابط تفاضل کمان‌ها در سینوس داریم:

$$\sin 5x\cos 3x-\cos 5x\sin 3x=\frac{2}{3}$$

$$\sin(5x-3x)=\frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x=\frac{2}{3}\quad (*)$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ داریم:

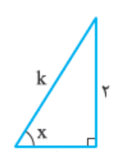
$$\cos 4x=1-2\sin^2 2x\overset{(*)}{=}1-2(\frac{2}{3})^2=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$$

۵۵۰- گزینهٔ ۲ از آن‌جایی که $\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$، بنابراین:

$$-\cot x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cot x=-\frac{1}{2}$$

برای محاسبهٔ $\cos 2x$ می‌توانیم از رابطهٔ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده کنیم، پس باید با استفاده از مقدار $\cot x$، مقدار $\cos x$ را محاسبه کنیم (*علامتش هم اصلاً مهم نیست؛ چون به توان ۲ می‌رسه منفی و مثبتش بی‌اهمیت می‌شه*):

$$\cot x=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow k^2=2^2+1^2=5$$
$$\Rightarrow k=\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \cos x=\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

بنابراین:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=2(\frac{1}{\sqrt{5}})^2-1=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}$$

۵۵۱- گزینهٔ ۲ به کمک رابطهٔ زیر عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3} \Rightarrow (\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3})$$
$$+(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow 2\cos x(\frac{1}{2})=\frac{2}{3} \Rightarrow \cos x=\frac{2}{3}(*)$$

حالا با کمک رابطهٔ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، مقدار $\cos 2x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1\overset{(*)}{=}2(\frac{2}{3})^2-1=-\frac{1}{9}$$

۵۵۲- گزینهٔ ۲ اگر در عبارت داخل پرانتز از رابطهٔ $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ و در عبارت بیرون پرانتز از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$$

با استفاده از رابطهٔ $\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u$ خواهیم داشت:

$$\text{عبارت}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 4x)=\frac{1}{4}\sin 4x$$

حالا $x=7.5^\circ$ را قرار می‌دهیم: $\text{عبارت}=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$

۵۵۳- گزینهٔ ۳ از یک $\cos x\sin x$ فاکتور می‌گیریم:

$$\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\cos x\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

حالا در عبارت بیرون پرانتز از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ و در عبارت داخل پرانتز از رابطهٔ $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت}=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x\cos 2x}$$

باز هم از رابطهٔ $\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 4x)=\frac{1}{4}\sin 4x$$

حالا $x=\frac{\pi}{16}$ قرار می‌دهیم: $\Rightarrow \text{عبارت}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{8}$

۵۵۴- گزینهٔ ۲ **راه اول** در صورت از رابطهٔ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و در مخرج از رابطهٔ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin x+2\sin x\cos x}{\cancel{1}+\cos x+2\cos^2 x\cancel{-1}}=\frac{\sin x\cancel{(1+2\cos x)}}{\cos x\cancel{(1+2\cos x)}}=\tan x$$

راه دوم از مقداردهی استفاده می‌کنیم. با فرض $x=\frac{\pi}{6}$ داریم:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{3+\sqrt{3}}{\cancel{2}}}=\frac{\cancel{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\cancel{(1+\sqrt{3})}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و تنها در ۲ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ خروجی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ داریم.

۵۵۵- گزینهٔ ۱ در صورت تساوی داده‌شده از رابطهٔ $\sin u=2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$ و در مخرج از رابطهٔ $1+\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}$

استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$$:تساوی

خواستهٔ مسئله، محاسبهٔ $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})$ است. از آن‌جایی که $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-\cot\frac{\alpha}{2}$ و با توجه به مقدار $\tan\frac{\alpha}{2}$ داریم:

$$\begin{cases}\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-\cot\frac{\alpha}{2}\\ \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\cot\frac{\alpha}{2}=2\end{cases}\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-2$$

۵۵۶- گزینهٔ ۱ اول $\sin x$ را داخل پرانتز ضرب می‌کنیم:

تساوی: $\sin x\cos x-\sin^2 x=-1$

حالا از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{و} \quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

تساوی: $\frac{1}{2}\sin 2x-(\frac{1-\cos 2x}{2})=-1$

$$\xrightarrow{\times 2}\sin 2x-1+\cos 2x=-2$$

$$\Rightarrow \sin 2x+\cos 2x=-1$$

ای بابا! باز هم باید یه رابطهٔ دیگه استفاده کنیم که آخه!

با توجه به خواستهٔ مسئله، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin u+\cos u=\sqrt{2}\cos(u-\frac{\pi}{4})\Rightarrow \sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

می‌توانستید به جای رابطهٔ آخر از این روش هم برای حل استفاده کنید:

$\sin 2x+\cos 2x=-1$

یکی از زاویه‌هایی که در این تساوی صدق می‌کند $x=-\frac{\pi}{4}$ است؛ پس:

$$\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\cos(-\frac{3\pi}{4})$$

$$=\cos\frac{3\pi}{4}=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۵۷- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$ و $(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$؛ بنابراین داریم:

$$(\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8})^2-(\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8})^2$$

$$=1-\sin(2(\frac{\pi}{8}))-(1+\sin 2(\frac{\pi}{8}))=\cancel{1}-\sin\frac{\pi}{4}-\cancel{1}-\sin\frac{\pi}{4}$$

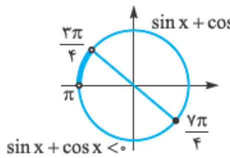
$$=-2(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$$

۵۵۸- گزینهٔ ۳ اگر در مخرج از رابطهٔ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2 \quad \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}$$

می‌دانیم $\sqrt{u^2}=|u|$، در نتیجه: $\frac{\sin x+\cos x}{|\sin x+\cos x|}=$ عبارت

حالا باید قدرمطلق را حذف کنیم؛ پس از حدود x و شکل زیر استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل وقتی $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$ است *(اون کمان پررنگه)*، مقدار $\sin x+\cos x$ منفی است. در نتیجه:



$$\underbrace{|\sin x+\cos x|}_{-}=-(\sin x+\cos x)$$

$$\frac{\sin x+\cos x}{-(\sin x+\cos x)}=-1$$ = عبارت

۵۵۹- گزینهٔ ۱ *اول ببینیم مسئله دنبال چیه؟!* $\cos(\underbrace{\frac{3\pi}{2}-2\alpha}_{\text{سوم}})=-\sin 2\alpha\ (*)$

پس باید با استفاده از تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ مقدار $\sin 2\alpha$ را محاسبه کنیم. برای این کار طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{4}$$

با استفاده از رابطهٔ $(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow 1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{(*)}\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)=-\frac{3}{4}$$

۵۶۰- گزینهٔ ۴ با فرض $A=\sin x-\cos x$، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $A^2=(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x\ (*)$

با توجه به این‌که $\sin x\cos x=\frac{3}{8}$، بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی}\times 2}\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{4}$$

در نتیجه: $\xrightarrow{(*)}A^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow A=\pm\frac{1}{2}$

چون انتهای کمان x در ناحیهٔ چهارم قرار دارد و در این ناحیه $\cos x>0$ و $\sin x<0$ است؛ پس حاصل $A=\sin x-\cos x$ حتماً منفی است و در نتیجه مقدار منفی آن را می‌پذیریم: $A=-\frac{1}{2}$

۵۶۱- گزینهٔ ۱ اول از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)$$

چون $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ و $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$، خواهیم داشت:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)\ (*)$$

مقدار $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$ را که داریم، فقط باید مقدار $\sin 2x$ را محاسبه کنیم. برای این کار طرفین تساوی $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$ را به توان ۲ می‌رسانیم. طبق فرمول داریم:

$$(\sin x+\cos x)^2=(\frac{1}{3})^2\Rightarrow 1+\sin 2x=\frac{1}{9}\Rightarrow \sin 2x=-\frac{8}{9}$$

با جای‌گذاری این مقادیر در $(*)$:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{2}(-\frac{8}{9}))=\frac{1}{3}(1+\frac{4}{9})=\frac{1}{3}(\frac{13}{9})=\frac{13}{27}$$

۵۶۲- گزینهٔ ۳ در مخرج از رابطهٔ $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{۴\cos ۲x}{\frac{۲}{\sin ۲x}} = ۲\sin ۲x\cos ۲x$$

حالا از رابطهٔ $۲\sin u\cos u=\sin ۲u$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \sin ۴x$$

۵۶۳- گزینهٔ ۴ **راه اول** عبارت داخل پرانتز را با کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای ساده می‌کنیم. با توجه به این‌که $\tan\alpha\cot\alpha=۱$، بنابراین:

$$۲+\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=۲\tan\alpha\cot\alpha+\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha$$
$$=(\tan\alpha+\cot\alpha)^۲$$

پس عبارت را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\sin^۲ ۲\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)^۲$$

حالا از رابطهٔ $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت}=\sin^۲ ۲\alpha\left(\frac{۲}{\sin ۲\alpha}\right)^۲ \Rightarrow \text{عبارت}=\sin^۲ ۲\alpha\left(\frac{۴}{\sin^۲ ۲\alpha}\right)=۴$$

راه دوم با فرض $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ داریم:

$$\text{عبارت}=\sin^۲\frac{\pi}{۲}\left(۲+\tan^۲\frac{\pi}{۴}+\cot^۲\frac{\pi}{۴}\right)=(۱)^۲(۲+(۱)^۲+(۱)^۲)=۴$$

۵۶۴- گزینهٔ ۳ مسئله از ما مقدار $\tan\alpha+\cot\alpha$ را می‌خواهد. از آن‌جایی که $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$، بنابراین باید مقدار $\sin ۲\alpha$ را محاسبه کنیم، پس در تساوی داده‌شده، یعنی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$.

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲\Rightarrow ۱-\sin ۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow \sin ۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}$$

بنابراین:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۵۰}{۹}$$

۵۶۵- گزینهٔ ۴

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}$$
$$=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

با توجه به این‌که $a+b=\frac{\pi}{۲}-a$، خواهیم داشت:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-a)}{\cos a\cos b}=\frac{\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\cos b}=\frac{۱}{\cos b}$$

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

۵۶۶- گزینهٔ ۴ می‌دانیم:

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

بنابراین:

$$\text{عبارت}=\cos ۵۰^\circ\left(\frac{\sin(۷۰^\circ+۱۰^\circ)}{\cos ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ}\right)=\cos ۵۰^\circ\left(\frac{\sin ۸۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ}\right)$$

از آن‌جایی که $\sin ۸۰^\circ=\cos ۱۰^\circ$ (جمع کمان‌ها ۹۰° است)، بنابراین:

$$\text{عبارت}=\frac{\cos ۵۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ}$$

برای این‌که بتوانیم به ساده‌کردن کسر ادامه دهیم، از تساوی‌های $\sin ۴۰^\circ=\cos ۵۰^\circ$ و $\sin ۲۰^\circ=\cos ۷۰^\circ$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت}=\frac{\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}$$

حالا در صورت از رابطهٔ $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت}=\frac{۲\cancel{\sin ۲۰^\circ}\cos ۲۰^\circ}{\cancel{\sin ۲۰^\circ}}=۲\cos ۲۰^\circ$$

۵۶۷- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت داخل پرانتز را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=\frac{۲}{\sin ۲x}$$

پس:

$$\sin ۲x(\tan x+\cot x)=\sin ۲x\left(\frac{۲}{\sin ۲x}\right)=۲$$

دو رابطهٔ زیر را بلد باشید:

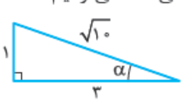
$$\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x},\ \cot x-\tan x=۲\cot ۲x$$

۵۶۸- گزینهٔ ۳ **راه اول** از اتحاد $\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}\xrightarrow{\tan\alpha=\frac{۱}{۳}}$$

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲(\frac{۱}{۳})}{۱+(\frac{۱}{۳})^۲}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱۰}{۹}}=\frac{۳}{۵}$$

راه دوم در مثلث قائم‌الزاویه تانژانت می‌شد نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور. برای زاویهٔ α که در رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$ صدق می‌کند می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو را در نظر بگیریم:



سینوس و کسینوس زاویهٔ α را حساب می‌کنیم:

$$\sin\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\quad,\quad \cos\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

پس:

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right)=\frac{۳}{۵}$$

دقت کنید چون $\tan\alpha>۰$ است، پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت‌اند و تأثیری در جواب آخر ندارد.

۵۶۹- گزینهٔ ۴ با استفاده از تساوی $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha$، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$۱+(\cot\alpha-\underbrace{۲\cot ۲\alpha}_{\cot\alpha-\tan\alpha})^۲$$

$$=۱+(\cot\alpha-\cot\alpha+\tan\alpha)^۲=۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

۵۷۰- گزینهٔ ۲ از اتحاد $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha$، داریم:

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+۲\alpha\right)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow -\cos ۲\alpha=\frac{۳}{۵}\Rightarrow \cos ۲\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

بین $\cos ۲\alpha$ و $\tan\alpha$ یک رابطه داریم، آن را می‌نویسیم و مقدار $\tan\alpha$

را حساب می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\Rightarrow -\frac{3}{5}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow -3-3\tan^2\alpha=5-5\tan^2\alpha \Rightarrow 2\tan^2\alpha=8$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha=4 \xrightarrow{\tan\alpha>0} \tan\alpha=2$$

۵۷۱- گزینهٔ ۳ اول مقدار $\tan x$ را حساب می‌کنیم.

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2}{3}\Rightarrow 2+2\tan x=3-3\tan x$$

$$\Rightarrow 5\tan x=1\Rightarrow \tan x=\frac{1}{5}$$

حالا با داشتن $\tan x=\frac{1}{5}$، مقدار $\cos 2x$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-(\frac{1}{5})^2}{1+(\frac{1}{5})^2}=\frac{\frac{24}{25}}{\frac{26}{25}}=\frac{12}{13}$$

۵۷۲- گزینهٔ ۲ از تساوی داده‌شده مقدار $\tan x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=2\Rightarrow 2\sin x+2\cos x=\sin x$$

$$\Rightarrow \sin x=-2\cos x$$

طرفین تساوی بالا را به $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-2\cos x}{\cos x}\Rightarrow \tan x=-2$$

حالا با داشتن $\tan x=-2$، مقدار $\sin 2x$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2(-2)}{1+(-2)^2}=-\frac{4}{5}=-0/8$$

۵۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا با استفاده از اتحادهای $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=2\Rightarrow \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}=2\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=2$$

$$\Rightarrow \tan x=2$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ مقدار $\sin 2x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin 2x=\frac{2(2)}{1+2^2}=\frac{4}{5}=0/8$$

۵۷۴- گزینهٔ ۱

از دو اتحاد (*) $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ و (**) $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$، استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\tan\frac{\pi}{8}(1-\tan^2\frac{\pi}{8})}{(1+\tan^2\frac{\pi}{8})^2}$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}}_{(*)}\times\underbrace{\frac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}}_{(**)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\sin(2\times\frac{\pi}{8})\times\cos(2\times\frac{\pi}{8})$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow A=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{4}$$

۵۷۵- گزینهٔ ۴ در رابطهٔ $2\tan x+3\cot x=5$ با جای‌گذاری $\cot x=\frac{1}{\tan x}$، معادله را حل و مقدار $\tan x$ را حساب می‌کنیم:

$$2\tan x+3(\frac{1}{\tan x})=5$$

$$\xrightarrow{\times\tan x} 2\tan^2 x+3=5\tan x$$

$$2\tan^2 x-5\tan x+3=0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفراست}}\begin{cases}\tan x=1 \ \times \quad (x\neq\frac{\pi}{4})\\ \tan x=\frac{3}{2}\ \checkmark\end{cases}$$

با داشتن $\tan x=\frac{3}{2}$، مقدار $\tan 2x$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(\frac{3}{2})}{1-(\frac{3}{2})^2}=\frac{3}{-\frac{5}{4}}=-\frac{12}{5}$$

چون تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگرند، پس: $\cot 2x=-\frac{5}{12}$

تذکر البته بعد از به دست آوردن $\tan x=\frac{3}{2}$، می‌توانستیم جور دیگری هم مقدار $\cot 2x$ را حساب کنیم:

$$2\cot 2x=\cot x-\tan x\Rightarrow 2\cot 2x=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cot 2x=-\frac{5}{6}\Rightarrow \cot 2x=-\frac{5}{12}$$

۵۷۶- گزینهٔ ۱ جای $\tan 45^\circ$ عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{\tan 35^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 35^\circ\tan 25^\circ}$$

با اتحاد $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$، می‌توانیم عبارت بالا را به صورت $\tan(35^\circ+25^\circ)$ بنویسیم که می‌شود: $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

۵۷۷- گزینهٔ ۱ اول 75° را به صورت مجموع $45^\circ+30^\circ$ می‌نویسیم و بعد از رابطهٔ مجموع کمان‌ها در تانژانت استفاده می‌کنیم:

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{مخرج را گویا می‌کنیم}}$$

$$\frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}=\frac{9+3+6\sqrt{3}}{6}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

۵۷۸- گزینهٔ ۳ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-2=0$ را پیدا می‌کنیم:

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\quad,\quad P=\frac{c}{a}=-\frac{2}{2}=-1$$

چون $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های این معادله بودند، پس:

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{3}{2}\quad,\quad \tan\alpha.\tan\beta=-1$$

حالا مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

۵۷۹- گزینهٔ ۴ باید تانژانت دو زاویهٔ α و β را پیدا کنیم:

با داشتن $\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$، کسینوس α را حساب می‌کنیم:

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow(\frac{۴}{۵})^{۲}+\cos^{۲}\alpha=۱$$

$$\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۹}{۲۵}\xrightarrow[\cos\alpha>۰]{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}}\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$$

حالا $\tan\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}$$

با داشتن $\cos\beta=\frac{-۵}{۱۳}$، تانژانت β را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^{۲}\beta=\frac{۱}{\cos^{۲}\beta}\Rightarrow ۱+\tan^{۲}\beta=\frac{۱}{(-\frac{۵}{۱۳})^{۲}}$$

$$\Rightarrow\tan^{۲}\beta=\frac{۱۴۴}{۲۵}\xrightarrow[\tan\beta<۰]{\frac{\pi}{۲}<\beta<\pi}\tan\beta=-\frac{۱۲}{۵}$$

حالا با داشتن $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ و $\tan\beta=-\frac{۱۲}{۵}$، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{۴}{۳}-(-\frac{۱۲}{۵})}{۱+(\frac{۴}{۳})(-\frac{۱۲}{۵})}$$

$$=\frac{\frac{۲۰+۳۶}{۱۵}}{۱-\frac{۴۸}{۱۵}}=\frac{\frac{۵۶}{۱۵}}{-\frac{۳۳}{۱۵}}=-\frac{۵۶}{۳۳}$$

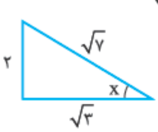
۵۸۰- گزینهٔ ۲ چون $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$، پس $\cot\alpha=\frac{۲}{۳}$. تانژانت معکوس کتانژانت است، پس $\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$، حالا مقدار $\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan\alpha}=\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{۱+۱\times\frac{۳}{۲}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۵}{۲}}=-\frac{۱}{۵}$$

۵۸۱- گزینهٔ ۳ با تساوی $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$، داریم:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\frac{۲}{\sqrt{۷}}\Rightarrow\sin x=\frac{۲}{\sqrt{۷}}$$

یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ حاده x می‌کشیم که سینوس x برابر $\frac{۲}{\sqrt{۷}}$ باشد:



تانژانت x برابر است با:

$$\tan x=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

چون x در ربع اول بود، تانژانتش مثبت است:

$$\tan x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

حالا مقدار $\tan(x+\frac{\pi}{۶})$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan(x+\frac{\pi}{۶})=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{۶}}{۱-\tan x\tan\frac{\pi}{۶}}=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۳})}$$

$$=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{۶}{۹}}=\frac{\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۳}}=۳\sqrt{۳}$$

۵۸۲- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\alpha=a+b$، $\beta=a-b$ آن وقت $۲b$ می‌شود $\alpha-\beta$. پس:

$$\tan ۲b=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{۱+\tan(a+b)\tan(a-b)}=\frac{(\sqrt{۳}+۱)-(\sqrt{۳}-۱)}{۱+(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)}$$

$$=\frac{۲}{۱+۳-۱}=\frac{۲}{۳}$$

۵۸۳- گزینهٔ ۱ *حواستون باشه جمع کمان‌ها در تانژانت نیست. بلکه جمع دوتا تانژانت است.* در این‌جا به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\sin ۴۰^\circ(\tan ۱۰^\circ+\tan ۲۰^\circ)=\sin ۴۰^\circ(\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}+\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ})$$

$$=\sin ۴۰^\circ(\frac{\sin ۱۰^\circ\cos ۲۰^\circ+\cos ۱۰^\circ\sin ۲۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ\cos ۲۰^\circ})$$

$$=\sin ۴۰^\circ(\frac{\sin(۱۰^\circ+۲۰^\circ)}{\cos ۱۰^\circ\cos ۲۰^\circ})=\sin ۴۰^\circ(\frac{\sin ۳۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ\cos ۲۰^\circ})$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ\cos ۲۰^\circ}$$

حالا در صورت از رابطهٔ $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲\sin ۲۰^\circ\cancel{\cos ۲۰^\circ})}{\cos ۱۰^\circ\cancel{\cos ۲۰^\circ}}=\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=۲\sin ۱۰^\circ$$

۵۸۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $\tan ۷۵^\circ=\cot ۱۵^\circ$، بنابراین:

$$\frac{۱+\cot ۱۵^\circ}{۱-\cot ۱۵^\circ}=\frac{۱+\tan ۷۵^\circ}{۱-\tan ۷۵^\circ}$$

حالا از رابطهٔ $\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$ استفاده می‌کنیم: (فقط دقت کنید که $\frac{\pi}{۴}=۴۵^\circ$ رادیان)

$$\frac{۱+\tan ۷۵^\circ}{۱-\tan ۷۵^\circ}=\tan(۴۵^\circ+۷۵^\circ)=\tan ۱۲۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

۵۸۵- گزینهٔ ۲ از اتحاد $\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\tan(\frac{\pi}{۴}-x)$ استفاده می‌کنیم:

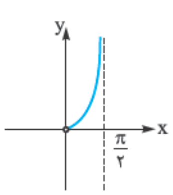
$$\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\frac{۱-m}{۲+m}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-m}{۲+m}$$

سؤال محدودهٔ x را به ما داده، با استفاده از آن محدودهٔ کمان $\frac{\pi}{۴}-x$ را حساب می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\times(-۱)}-\frac{\pi}{۴}<-x<\frac{\pi}{۴}$$

$$\xrightarrow{+\frac{\pi}{۴}}۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲}$$

اگر زاویه‌ای در محدودهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ باشد، تغییرات تانژانت در بازهٔ $(۰,+\infty)$ است. اگر باورتان نمی‌شود، نمودار تانژانت را در این بازه ببینید:



پس: $۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲}$

$$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴}-x)>۰ \Rightarrow \frac{۱-m}{۲+m}>۰$$

عبارت $\frac{۱-m}{۲+m}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

		-۲		۱	
$\frac{۱-m}{۲+m}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

جواب نامعادله

پس جواب نامعادله، محدودهٔ $-۲<m<۱$ است.

۵۸۶- گزینهٔ ۳ زاویهٔ $۲۵^\circ-a$ را برحسب $a+۲۰^\circ$ می‌نویسیم:

$$۲۵^\circ-a=۴۵^\circ-۲۰^\circ-a=۴۵^\circ-(a+۲۰^\circ)$$

اول $\tan(۲۵^\circ-a)$ را حساب می‌کنیم. بعد معکوسش می‌کنیم تا $\cot(۲۵^\circ-a)$ به دست آید.

$$\tan(۲۵^\circ-a)=\tan(۴۵^\circ-(a+۲۰^\circ))=\frac{\tan۴۵^\circ-\tan(a+۲۰^\circ)}{۱+\tan۴۵^\circ\tan(a+۲۰^\circ)}$$

$$=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{۱+(۱)(\frac{۳}{۴})}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱}{۷}$$

پس: $\cot(۲۵^\circ-a)=۷$

۵۸۷- گزینهٔ ۳ به کمک اتحاد $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$، مقدار $\tan x$ را حساب می‌کنیم: $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱+\tan x=۲-۲\tan x$$

$$\Rightarrow ۳\tan x=۱ \Rightarrow \tan x=\frac{۱}{۳}$$

حالا با داشتن $\tan x=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\cos۲x$ را حساب می‌کنیم:

$$\cos۲x=\frac{۱-\tan^۲x}{۱+\tan^۲x}\xrightarrow{\tan x=\frac{۱}{۳}}\cos۲x=\frac{۱-\frac{۱}{۹}}{۱+\frac{۱}{۹}}=\frac{\frac{۸}{۹}}{\frac{۱۰}{۹}}=\frac{۸}{۱۰}=۰/۸$$

۵۸۸- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که $\alpha-\beta=\frac{\pi}{۴}$، داریم: $\alpha=\beta+\frac{\pi}{۴}$

حالا از طرفین تانژانت می‌گیریم: $\tan\alpha=\tan(\beta+\frac{\pi}{۴})$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan\beta}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan\beta}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱-۱\times\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۳$$

الان‌که $\tan\alpha=۳$ را داریم، برای پیداکردن $\sin۲\alpha$، از اتحاد $\sin۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲(۳)}{۱+۳^۲}=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$$

۵۸۹- گزینهٔ ۳ اول مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan\alpha}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow ۱+\tan\alpha=۵-۵\tan\alpha$$

$$\Rightarrow ۶\tan\alpha=۴ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۲}{۳}$$

حالا مقدار $\tan۲\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲(\frac{۲}{۳})}{۱-(\frac{۲}{۳})^۲}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۳۶}{۱۵}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۵۹۰- گزینهٔ ۱ اول مقدار $\tan۲\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲(۲)}{۱-۲^۲}=-\frac{۴}{۳}$$

حالا با داشتن $\tan۲\alpha=-\frac{۴}{۳}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\tan(۲\alpha-\beta)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan۲\alpha-\tan\beta}{۱+\tan۲\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱+(-\frac{۴}{۳})(\frac{۱}{۳})}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}}$$

$$=\frac{-\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{-۵\times۹}{۵\times۳}=-۳$$

۵۹۱- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج را با اتحادهای $\sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}$ و $۱-\cos x=۲\sin^۲\frac{x}{۲}$ ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin x}{۱-\cos x}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}=-\frac{۱}{۲}$$

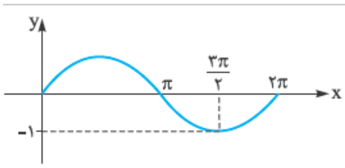
$$\Rightarrow \frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cot\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan\frac{x}{۲}=-۲$$

حالا با اتحاد $\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$، مقدار $\tan x$ را از روی $\tan\frac{x}{۲}$ حساب می‌کنیم:

$$\tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^۲}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

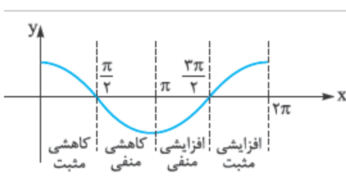
$$\frac{\sin x}{۱-\cos x}=\cot\frac{x}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{\sin x}{۱+\cos x}=\tan\frac{x}{۲}$$

۵۹۲- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[\pi,۲\pi]$ به صورت مقابل است:



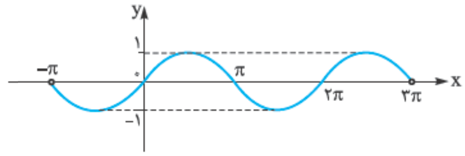
با توجه به نمودار، تابع در این فاصله غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است (چون خطی موازی محور xها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند). از طرفی نمودار تابع افزایشی نیست (در فاصلهٔ $[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ نمودار کاهشی و در فاصلهٔ $[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$ نمودار افزایشی است). برد تابع، بازه $[-۱,۰]$ است (پس ۳ درست است). مقادیر تابع هم نامثبت است.

۵۹۳- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم و در هر فاصله وضعیت نمودار را بررسی می‌کنیم:



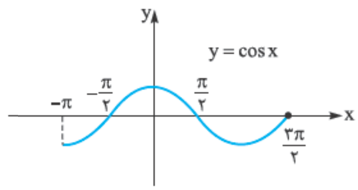
پس در فاصلهٔ $(\frac{\pi}{۲},\pi)$، نمودار تابع کاهشی و منفی است.

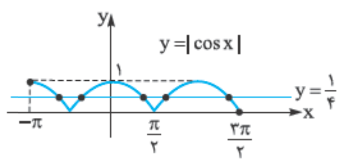
۵۹۴- گزینهٔ ۴ نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $(-\pi,۳\pi)$ به صورت مقابل است:



با توجه به شکل، نمودار تابع $y=\sin x$، در فاصلهٔ $(-\pi,۳\pi)$ در نقاط به طول $\{۰,\pi,۲\pi\}$ محور xها را قطع می‌کند. در نتیجه مجموع طول نقاط تلاقی تابع با محور xها در این فاصله برابر $۳\pi(=۰+\pi+۲\pi)$ است.

۵۹۵- گزینهٔ ۳ برای یافتن تعداد نقاط تلاقی، نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار $y=|\cos x|$، ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را در فاصلهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.





با توجه به شکل، خط $y=\frac{۱}{۴}$ نمودار تابع $y=|\cos x|$ را در پنج نقطه قطع می‌کند.

۵۹۶- گزینهٔ ۳ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $\alpha=\pi \Rightarrow y=\sin(x-\pi)$

$\Rightarrow y=\sin(-(\pi-x))=-\sin(\underbrace{\pi-x}_{\text{دوم}})=-\sin x$ ✗

(۲) $\alpha=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$

$\Rightarrow y=\sin(-(\frac{\pi}{۲}-x))=-\sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-x}_{\text{اول}})=-\cos x$ ✗

(۳) $\alpha=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow y=\sin(x-\frac{۳\pi}{۲})$

$\Rightarrow y=\sin(-(\frac{۳\pi}{۲}-x))=-\sin(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}-x}_{\text{سوم}})$

$\Rightarrow y=-(-\cos x)=\cos x$ ✓

(۴) $\alpha=۲\pi \Rightarrow y=\sin(-(۲\pi-x))=-\sin(\underbrace{۲\pi-x}_{\text{چهارم}})$

$\Rightarrow y=-(-\sin x)=\sin x$ ✗

۵۹۷- گزینهٔ ۱ اول خود تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$y=\cos(\underbrace{\frac{۵\pi}{۲}+x}_{\text{دوم}})=-\sin x$

حالا گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

(۱) $y=\sin(\cancel{\pi}+x)=-\sin x$ ✓

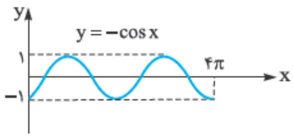
(۲) $y=\cos(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}+x}_{\text{چهارم}})=\sin x$ ✗

(۳) $y=\sin(\cancel{۳\pi}-x)=-\sin(-x)=\sin x$ ✗

(۴) $y=\cos(\frac{۹\pi}{۲}-x)=\cos(\cancel{۴\pi}+\frac{\pi}{۲}-x)$

$=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$ ✗

۵۹۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که: $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$، پس باید نمودار تابع $f(x)=-\cos x$ را در فاصلهٔ $[۰,۴\pi]$ رسم کنیم (در حقیقت باید نمودار $y=\cos x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم).



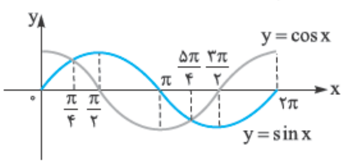
با توجه به شکل، تابع در فاصلهٔ $[۰,۴\pi]$، در سه نقطه کم‌ترین مقدار خود را دارد.

۵۹۹- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x$ پس تابع را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$y=۱-\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=۱+\sin x$

حداکثر مقدار تابع بالا هم زمانی رخ می‌دهد که $\sin x$ برابر ۱ باشد، که این مقدار در نقاط به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=۲\pi+\frac{\pi}{۲}$، $x=۴\pi+\frac{\pi}{۲}$ و ... رخ می‌دهد؛ بنابراین این طول‌ها را می‌توان به صورت $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ نمایش داد.

۶۰۰- گزینهٔ ۳ هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم (نقطهٔ تلاقی دو نمودار یعنی جایی که $\sin x=\cos x$ است. نقاط به طول‌های $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\frac{۵\pi}{۴}$ هستند):



با توجه به شکل، در فاصلهٔ $[\frac{۵\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۲}]$ نمودار تابع $y=\sin x$ کاهشی است و پایین نمودار $y=\cos x$ قرار دارد.

۶۰۱- گزینهٔ ۱ از آن‌جایی که $-۱\le\cos x\le۱$، بنابراین $-۱\le\cos(x+۱)\le۱$ (انتقال‌های افقی تأثیری روی برد ندارند). پس با توجه به این حدود، حدود تابع f را می‌یابیم:

$-۱\le\cos(x+۱)\le۱ \xrightarrow{\times(-۱)} -۱\le-\cos(x+۱)\le۱$

$\xrightarrow{+۱} ۰\le۱-\cos(x+۱)\le۲ \Rightarrow ۰\le f(x)\le۲$

در نتیجه بیشترین مقدار تابع f برابر ۲ است؛ پس $A=۲$. از طرفی مقدار $f(۰)$ برابر است با:

$f(x)=۲-\cos(x+۱) \xrightarrow{x=۰} f(۰)=۲-\cos۱$

$\Rightarrow B=۲-\cos۱$

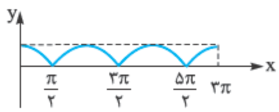
پس مقدار $A-B$ برابر است با: $A-B=۲-(۲-\cos۱)=\cos۱$

از آن‌جایی که رادیان تقریباً ۵۷° است، در نتیجه $\cos۱$ به $\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$ نزدیک‌تر است.

۶۰۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که:

$\sin(\frac{۵\pi}{۲}-x)=\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۲}-x)=\cos x \Rightarrow y=|\cos x|$

پس نمودار تابع $y=|\cos x|$ را با شروع از نقطه به طول $x=0$ تا جایی ادامه می‌دهیم که چهار ماکزیمم و سه ریشه در آن ببینیم. پس شکل مقابل را خواهیم داشت:



پس حداقل مقدار k، برابر $\frac{7\pi}{2}$ است.

۶۰۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را $\frac{\pi}{6}$ واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع f حاصل می‌شود، پس برای این‌که طول نقاط تلاقی تابع f را با محور xها بیابیم، کافی است طول نقاط تلاقی تابع $y=\sin x$ با محور xها یا همان ریشه‌های تابع بالا را بیابیم، بعد هر کدام از آن‌ها را از $\frac{\pi}{6}$ کم کنیم. از آن‌جا که نقاط تلاقی تابع $y=\sin x$ با محور xها به صورت $x=k\pi$ است، پس نقاط تلاقی تابع f با محور xها به صورت $x=k\pi-\frac{\pi}{6}$ است $(k\in\mathbb{Z})$. حالا با دادن مقادیر مختلف به k، ریشه‌هایی که در فاصلهٔ $(-\pi,2\pi)$ هستند را می‌یابیم:

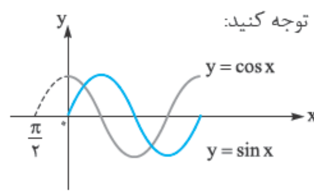
$$\begin{cases} k=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6} \\ k=1\Rightarrow x=\pi-\frac{\pi}{6} \\ k=2\Rightarrow x=2\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=3\pi-3(\frac{\pi}{6})=3\pi-\frac{\pi}{2}=2/5\pi$$

۶۰۴- گزینهٔ ۴ وقتی نمودار تابع $\frac{\pi}{6}$ واحد به چپ منتقل می‌شود، آن‌گاه $x\to x+\frac{\pi}{6}$؛ بنابراین ضابطهٔ نمودار تابع حاصل به صورت $y=\cos(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})$ نوشته‌می‌شود: $\Rightarrow y=\cos(x+\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{دوم}})=-\sin x$

حالا اگر نمودار این تابع را یک واحد به بالا منتقل کنیم، ضابطهٔ تابع به صورت $y=1-\sin x$ نوشته خواهد شد.

۶۰۵- گزینهٔ ۲ به شکل روبه‌رو توجه کنید:

پس اگر نمودار $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{2}$ به راست منتقل کنیم نمودار $y=\sin x$ حاصل می‌شود.



پس برای رسیدن به مقصود! اول نمودار $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})+1$ را $\frac{\pi}{3}$ به **چپ** می‌بریم $(x\to x+\frac{\pi}{3})$ تا نمودار $y=\cos x+1$ به دست بیاید بعد نمودار را $\frac{\pi}{2}$ **به راست** می بریم تا نمودار $y=\sin x+1$ حاصل شود. تا این‌جا در مجموع $\frac{\pi}{6}$ به راست رفتیم کلاً. در نهایت نمودار را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y=\sin x-1$ برسیم.

۶۰۶- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\cos(x-\pi)=\cos(-(\pi-x))=\cos(\underbrace{\pi-x}_{\text{دوم}})=-\cos x \\ \sin(\underbrace{\frac{\pi}{2}+x}_{\text{دوم}})=\cos x\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=2(-\cos x)+\cos x \Rightarrow f(x)=-\cos x$

حالا نمودار را $\frac{\pi}{5}$ به چپ منتقل می‌کنیم:

$\Rightarrow$ تابع حاصل: $y=-\cos(x+\frac{\pi}{5})$

و بالاخره نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

$\Rightarrow$ تابع حاصل: $y=1-\cos(x+\frac{\pi}{5})$

۶۰۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع، محور xها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{\pi}{3}$ قطع می‌کند، بنابراین:

$f(-\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow a\cos(-\frac{\pi}{3})+b=0$

$\Rightarrow a(\frac{1}{2})+b=0 \Rightarrow b=-\frac{a}{2}$

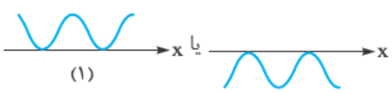
هم‌چنین نمودار، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس:

$f(0)=1 \Rightarrow a\cos(0)+b=1 \Rightarrow a+b=1$

$\xrightarrow{b=-\frac{a}{2}} a+(-\frac{a}{2})=1 \Rightarrow \frac{a}{2}=1 \Rightarrow a=2$

$\xrightarrow{b=-\frac{a}{2}} b=-1$

۶۰۸- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که نمودار تابع بر محور xها مماس است، وضعیت نمودار آن با محور xها به یکی از دو صورت زیر می‌تواند باشد:



(۱) (۲)

چون نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},-2)$ روی نمودار و دارای عرض منفی است، پس مقادیر تابع نامثبت هستند، پس شکل (۲) صحیح است.

در نتیجه ماکزیمم تابع برابر صفر است. می‌دانیم ماکزیمم تابع $y=-b\sin x$ برابر $|-b|=|b|$ است، پس ماکزیمم تابع $f(x)=a-b\sin x$ برابر $a+|b|$ است. چون مقدار ماکزیمم برابر صفر است، پس: $a+|b|=0 \Rightarrow a=-|b|$

از طرفی نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},-2)$ روی نمودار تابع قرار دارد؛ بنابراین:

$f(\frac{\pi}{2})=-2 \Rightarrow a-b\sin\frac{\pi}{2}=-2$

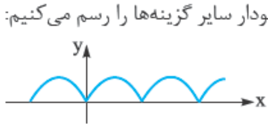
$\Rightarrow a-b=-2 \xrightarrow{a=-|b|} -|b|-b=-2$

$$|b|+b=2 \Rightarrow \begin{cases} b>0: b+b=2 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \\ \text{یا} \\ b<0: -b+b=2 \Rightarrow 0=2 \times \end{cases}$$

در نتیجه: $a=-|b| \Rightarrow a=-1$

۶۰۹- گزینهٔ ۳ ④ که حتماً جواب نیست؛ چون نقطهٔ $(-\frac{\pi}{2},1)$ در آن صدق نمی‌کند. برای پیداکردن جواب نمودار سایر گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

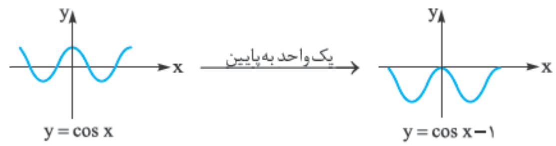
①

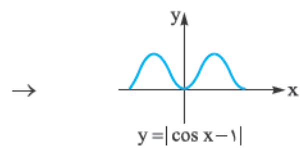


$y=|\sin x|$

هیچ شباهتی به نمودار داده‌شده ندارد.

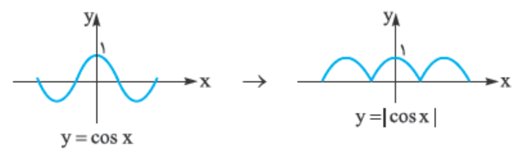
۲ برای رسم، اول نمودار $y=\cos x$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم؛ سپس قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

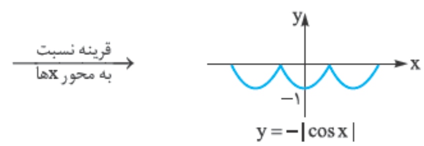


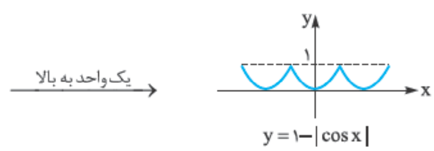


هیچ شباهتی باز هم مشاهده نشد.

۳ برای رسم به صورت زیر عمل می‌کنیم:







همینه دیگه!

۶۱۰- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل، کم‌ترین مقدار تابع برابر صفر است. از آن‌جایی که $-۱\le \sin(ax+b)\le ۱$، بنابراین:

$$-۱\le \sin(x-b)\le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} -۱\le -\sin(x-b)\le ۱$$

$$\xrightarrow{+a} \underbrace{a-۱}_{\text{کم‌ترین مقدار تابع}}\le a-\sin(x-b)\le a+۱$$

بنابراین باید: $a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(x)=۱-\sin(x-b)$

از طرفی نقطهٔ $(\frac{\pi}{۶},۰)$ روی نمودار تابع قرار دارد، در نتیجه:

$$f(\frac{\pi}{۶})=۰ \Rightarrow ۱-\sin(\frac{\pi}{۶}-b)=۰ \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۶}-b)=۱$$

اولین نقطه بعد از محور yها که مقدار سینوس برابر یک می‌شود، نقطه به طول $\frac{\pi}{۲}$ است. در نتیجه باید: $\frac{\pi}{۶}-b=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow b=-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow ab=-\frac{\pi}{۳}$

۶۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\cos(-(\frac{\pi}{۲}-x))=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}+a\sin x$$

نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض b قطع کرده است؛ بنابراین:

$$f(۰)=b \Rightarrow \frac{۱}{۲}+a(۰)=b \Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

پس با توجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر $b+۱=\frac{۳}{۲}$ است. از طرفی توابع به فرم $y=a+b\sin x$ در نقاط به طول‌های $x=-\frac{\pi}{۲}$، $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و ... کم‌ترین یا بیشترین مقدار خود را دارد، پس با توجه به قسمتی از نمودار که در سمت چپ محور yها قرار دارد، در $x=-\frac{\pi}{۲}$ نمودار تابع بیشترین مقدار خود را دارد؛ در نتیجه:

$$f(-\frac{\pi}{۲})=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}+a\sin(-\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۲}-a=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow a-b=-۱-\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}=-۱/۵$$

۶۱۲- گزینهٔ ۲ ابتدا از رابطهٔ $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=۱-\cos^۲ x+۲\cos^۲ x=۱+\cos^۲ x$$

حالا با توجه به این‌که $-۱\le \cos x\le ۱$، برد تابع f را می‌یابیم:

$$-۱\le \cos x\le ۰ \Rightarrow ۰\le \cos^۲ x\le ۱$$

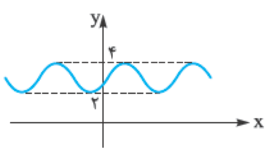
$$\Rightarrow ۱\le ۱+\cos^۲ x\le ۲ \Rightarrow \text{برد } f=[۱,۲]$$

۶۱۳- گزینهٔ ۲ از آن‌جایی که $-۱\le \sin x\le ۱$، علامت عبارت داخل هر قدرمطلق را تعیین می‌کنیم و با حذف قدرمطلق‌ها تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=|\underbrace{\sin x-۱}_{-}|+|\underbrace{۲\sin x+۲}_{+}|=۱-\sin x+۲\sin x+۲$$

$$\Rightarrow y=\sin x+۳$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای رسم، نمودار تابع $y=\sin x$ را سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم:



با توجه به شکل، خط‌های افقی $y=۲$ و $y=۴$ بر نمودار تابع مماس هستند؛ در نتیجه: $\{۲,۴\}=$ مجموعه مقادیر k

۶۱۴- گزینهٔ ۳ از آن‌جایی که $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$، خواهیم داشت:

$$f(x)=۱-\cos^۲ x-\cos x-۱=-\cos^۲ x-\cos x$$

حالا عبارت را مربع کامل می‌کنیم:

$$f(x)=-\cos^۲ x-\cos x=-(\cos^۲ x+\cos x)$$

$$=-((\cos x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۴}-(\cos x+\frac{۱}{۲})^۲$$

حالا با توجه به این‌که $-۱\le \cos x\le ۱$، برد تابع را می‌یابیم:

$$-۱\le \cos x\le ۱ \xrightarrow{+\frac{۱}{۲}} -\frac{۱}{۲}\le \cos x+\frac{۱}{۲}\le \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۰\le(\cos x+\frac{۱}{۲})^۲\le \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\times(-۱)} -\frac{۹}{۴}\le -(\cos x+\frac{۱}{۲})^۲\le ۰$$

$$\xrightarrow{+\frac{۱}{۴}} -۲\le \frac{۱}{۴}-(\cos x+\frac{۱}{۲})^۲\le \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{برد}=[-۲,\frac{۱}{۴}]$$

۶۱۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $y=a\cos bx$ برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است؛ بنابراین دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۲\cos ۶x$ برابر $\frac{۲\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$ است.

۶۱۶- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(bx+c)+d\,,\ (a,b\neq ۰)$ برابر با $\frac{۲\pi}{|b|}$ است، یعنی فقط ضریب x مهم است.

در تابع $f(x)=۱-\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})$ چون ضریب x برابر $-\frac{۱}{۲}$ است، پس دورهٔ تناوب برابر است با: $T=\frac{۲\pi}{|-\frac{۱}{۲}|}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$

۶۱۷- گزینهٔ ۲ در تابع $f(x)=\sin(ax+\frac{\pi}{۲})$، ضریب x برابر a است، پس دورهٔ تناوبش $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است. سؤال دورهٔ تناوب این تابع را $\frac{\pi}{۲}$ داده، پس: $\frac{۲\pi}{|a|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲}{|a|}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow|a|=۴\xrightarrow{a>۰}a=۴$

ضابطهٔ f به صورت $f(x)=\sin(۴x+\frac{\pi}{۲})$ در می‌آید. چون $\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})=\cos\alpha$ است، پس ضابطهٔ f به شکل $f(x)=\cos۴x$ نوشته می‌شود. حالا مقدار $f(\frac{۵\pi}{۶})$ را حساب می‌کنیم:

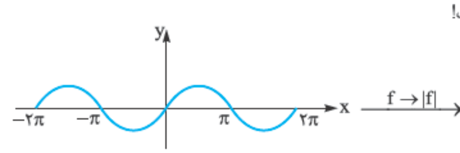
$$f(\frac{۵\pi}{۶})=\cos۴(\frac{۵\pi}{۶})=\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=\cos(۲\pi+\frac{۴\pi}{۳})$$

$$=\cos\frac{۴\pi}{۳}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

۶۱۸- گزینهٔ ۱ همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

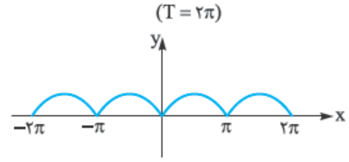
(۱) اگر توان x در کمان، عددی غیر از یک باشد (یعنی مثلاً کمان $x^۲$، $\sqrt{x}$ و ... داشته باشیم)، تابع نامتناوب است.

(۲) دورهٔ تناوب تابع $y=|\sin ax|$، برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=|\sin x|$ برابر با $T=\frac{\pi}{۱}=\pi$ است. نمودارش را هم ببینید خالی از لطف نیست!



(۱) $y=\sin x$

$(T=۲\pi)$

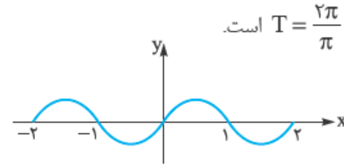


(۲) $y=|\sin x|$

$(T=\pi)$

(۳) دورهٔ تناوب تابع $y=\cos ax$ برابر با $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=\cos\sqrt{۲}x$ برابر با $T=\frac{۲\pi}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\pi$ است.

(۴) دورهٔ تناوب تابع $y=\sin ax$ برابر با $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=\sin\pi x$ برابر با $T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$ است.
نمودار این تابع را هم ببینید:



۶۱۹- گزینهٔ ۲ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $y=|\sin(ax+b)|$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است؛ بنابراین: $y=|\sin(ax+\frac{\pi}{۳})|\Rightarrow T_۱=\frac{\pi}{|a|}$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع $y=\cos۴x$ برابر $T_۲=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$ است. از آن‌جا که دورهٔ تناوب تابع $y=|\sin(ax+\frac{\pi}{۳})|$ نصف دورهٔ تناوب تابع $y=\cos۴x$ است، پس:

$$T_۱=\frac{T_۲}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{|a|}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow|a|=۴\Rightarrow a=\pm۴$$

۶۲۰- گزینهٔ ۱ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۱+\sin۲x$ برابر با $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ است. در تابع g، اول محدودهٔ تغییرات عبارت داخل قدرمطلق را حساب می‌کنیم: $-۱\le\sin۲x\le۱\xrightarrow{+۱}۰\le۱+\sin۲x\le۲$

چون عبارت داخل قدرمطلق نامنفی است، پس قدرمطلق را می‌توانیم برداریم: $g(x)=|۱+\sin۲x|\Rightarrow g(x)=۱+\sin۲x$

پس تابع g با تابع f یکسان است و دورهٔ تناوب g هم برابر با π است.

۶۲۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم انتقال‌های افقی و عمودی تأثیری روی دورهٔ تناوب ندارند. پس دورهٔ تناوب تابع $y=f(x-\frac{\pi}{۳})$ برابر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۱+\cos۲x$ و برابر $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ است.

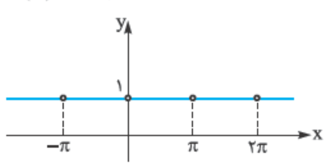
برای محاسبهٔ دورهٔ تناوب تابع $y=f(۲x)$، ابتدا تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$y=f(۲x)=۱+\cos(۲(۲x))=۱+\cos۴x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

۶۲۲- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$ با شرط $\sin x\neq۰$ برابر با تابع ثابت $y=۱$ است.

جواب‌های معادلهٔ $\sin x=۰$ به صورت $x=k\pi\,,\ (k\in\mathbb{Z})$ است، پس ضابطهٔ f به این صورت در می‌آید: $f(x)=۱\ \ ;\ \ x\neq k\pi$

پس نمودار تابع f به صورت یک خط افقی است که در نقاط به طول‌های $k\pi$، توخالی است:



پس دورهٔ تناوب این تابع $T=\pi$ است.

۶۲۳- گزینهٔ ۳ با اتحاد $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$، ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم: $f(x)=\cos۲x\cos x+\sin۲x\sin x$

$$\Rightarrow f(x)=\cos(۲x-x)\Rightarrow f(x)=\cos x$$

دورهٔ تناوب تابع $y=\cos ax$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است. پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos x$ برابر با $T=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi$ است. حالا با جای‌گذاری $T=۲\pi$، مقدار $f(\frac{T}{۲})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\cos x\xrightarrow{\frac{T}{۲}=\pi}f(\frac{T}{۲})=f(\pi)=\cos\pi=-۱$$

۶۲۴- **گزینهٔ ۴** ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

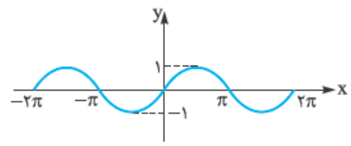
$$f(x)=\underbrace{\sin x+\cos x}_{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}+1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+1$$

دورهٔ تناوب f را حساب می‌کنیم. ضریب x در کمان سینوس برابر $a=1$ است، پس:

$$T=\frac{2\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$$

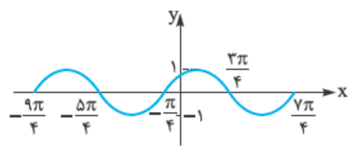
انتقال به چپ و راست، دورهٔ تناوب تابع را تغییر نمی‌دهد، پس دورهٔ تناوب تابع $y_1=f(x+\frac{\pi}{6})$ که از انتقال f به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ واحد به چپ به دست می‌آید، با دورهٔ تناوب f برابر است: $T_1=T$

تابع $y_2=|f(x)|$ را رسم می‌کنیم:



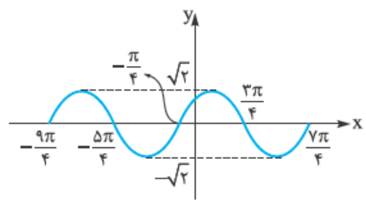
① $y=\sin x$

$$\xrightarrow[\text{به چپ } \frac{\pi}{4}]{x\to x+\frac{\pi}{4}}$$



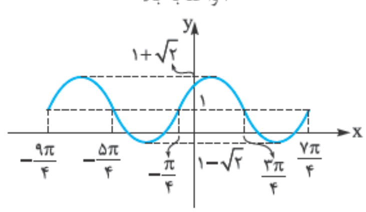
② $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$$\xrightarrow[\text{انبساط عمودی با ضریب } \sqrt{2}]{f\to\sqrt{2}f}$$



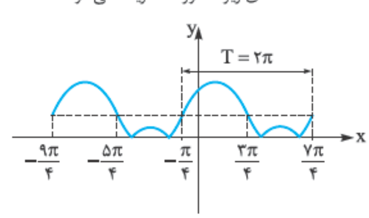
③ $y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$$\xrightarrow[\text{۱ واحد به بالا}]{f\to f+1}$$



④ $y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+1$

$$\xrightarrow[\text{قسمت‌های زیر محور xها قرینه می‌شوند}]{f\to|f|}$$



⑤ $y=|\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+1|$

می‌بینید که نمودار تابع $y_2=|f(x)|$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود، پس دورهٔ تناوبش $T_2=2\pi$ است.

در نتیجه: $T_1=T_2=T=2\pi$

۶۲۵- **گزینهٔ ۱** محدودهٔ تغییرات عبارت داخل قدرمطلق‌ها را حساب می‌کنیم و با توجه به علامت آن‌ها معلوم می‌کنیم که خودشان از قدرمطلق خارج می‌شوند یا قرینه‌شان.

$$-1\le\sin x\le 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1\le -\sin x\le 1$$

$$\xrightarrow{+1} 0\le 1-\sin x\le 2$$

پس عبارت داخل قدرمطلق اول نامنفی است و خودش از قدرمطلق بیرون می‌آید: $|1-\sin x|=1-\sin x$

$$-1\le\cos x\le 1 \xrightarrow{-1} -2\le\cos x-1\le 0$$

پس عبارت داخل قدرمطلق دوم نامثبت است و قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود: $|\cos x-1|=-\cos x+1$

حالا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=|1-\sin x|+|\cos x-1|=(1-\sin x)+(-\cos x+1)$$

$$\Rightarrow f(x)=-\underbrace{(\sin x+\cos x)}_{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}+2 \Rightarrow f(x)=-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+2$$

از آن‌جایی که دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(bx+c)+d\,,(a,b\neq 0)$ برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع f برابر با $T=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$ است.

۶۲۶- **گزینهٔ ۲** تابع fg را تشکیل می‌دهیم:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)$$

$$=\sin^2 x-\cos^2 x=-(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\cos 2x$$

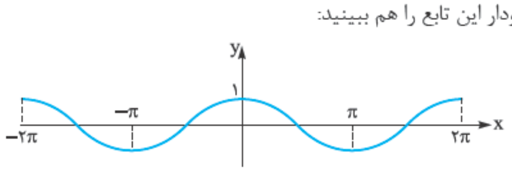
پس ساده‌شدهٔ ضابطهٔ این تابع به صورت $(f.g)(x)=-\cos 2x$ است.

حالا دورهٔ تناوب آن را حساب می‌کنیم: $T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

۶۲۷- **گزینهٔ ۲** با اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم: $f(x)=2\cos^2 x-1 \Rightarrow f(x)=\cos 2x$

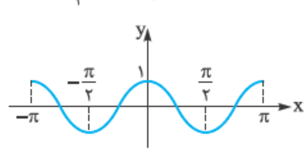
دورهٔ تناوب تابع $y=|\cos ax|$ برابر با $T=\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=|\cos 2x|$ برابر با $T=\frac{\pi}{2}$ است.

نمودار این تابع را هم ببینید:



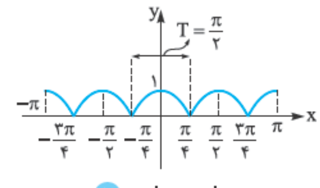
① $y=\cos x$

$$\xrightarrow[\text{انقباض طولی با ضریب } \frac{1}{2}]{x\to 2x}$$



② $y=\cos 2x$

$$f \xrightarrow[\text{قسمت‌های زیر محور xها قرینه می‌شوند}]{} |f|$$



(۳) $y=|\cos ۲x|$

۶۲۸- گزینهٔ ۳ با اتحاد $۱+\cos\alpha = ۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$، ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۱+\cos x}{۲}}=\sqrt{\frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}{۲}}=\sqrt{\cos^۲\frac{x}{۲}}=|\cos\frac{x}{۲}|$$

می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $y=|\cos ax|$ برابر با $T=\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=|\cos\frac{۱}{۲}x|$ برابر با $T=\frac{\pi}{\frac{۱}{۲}}=۲\pi$ است.

۶۲۹- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\cos^۲ x+\sin^۴ x=۱-\sin^۲ x+\sin^۴ x$$

$$=۱-\sin^۲ x(۱-\sin^۲ x)=۱-\sin^۲ x\cos^۲ x$$

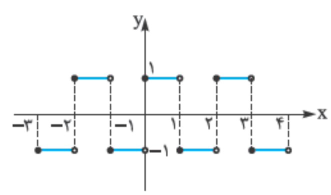
$$\Rightarrow f(x)=۱-(\sin x\cos x)^۲ \xrightarrow{\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x}$$

$$f(x)=۱-(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=۱-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

دورهٔ تناوب توابع $y=\sin^{۲n} ax$ و $y=\cos^{۲n} ax$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است.

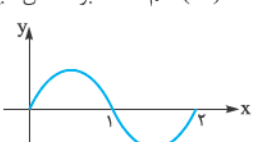
در تابع $f(x)=۱-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$، دو عدد ۱ (انتقال به بالا) و $-\frac{۱}{۴}$ (انقباض عمودی و قرینه نسبت به محور xها) تأثیری در دورهٔ تناوب ندارند، پس دورهٔ تناوب تابع f طبق نکتهٔ بالا برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است.

۶۳۰- گزینهٔ ۱ نمودار تابع $y=(-۱)^{[x]}$ به صورت زیر است:

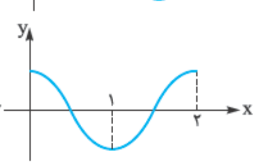


چون سمت راست تساوی $(-۱)^{[x]}f(x)=|f(x)|$ همواره نامنفی است، پس $(-۱)^{[x]}$ و $f(x)$ در نقاط غیر از ریشه‌های f باید همواره هم‌علامت باشند. دورهٔ تناوب تابع $y=(-۱)^{[x]}$ برابر با $T=۲$ است. نمودار تابع هر ۴ گزینه را در بازهٔ $[۰,۲]$ رسم می‌کنیم. هر کدام در این بازه با $(-۱)^{[x]}$ هم‌علامت بودند، آن تابع جواب سؤال است.

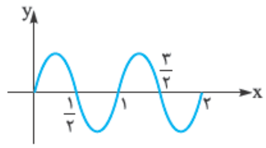
(۱) $f(x)=\sin\pi x\ ,\ T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$



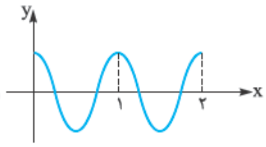
(۲) $f(x)=\cos\pi x\ ,\ T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$



(۳) $f(x)=\sin ۲\pi x\ ,\ T=\frac{۲\pi}{\pi}=۱$

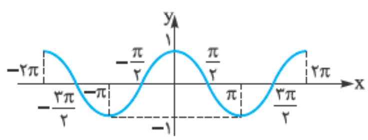


(۴) $f(x)=\cos ۲\pi x\ ,\ T=\frac{۲\pi}{\pi}=۱$



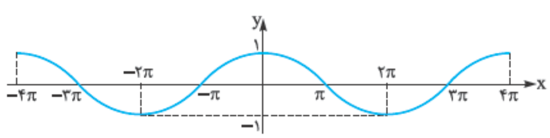
فقط نمودار تابع (۱) از نظر علامت مثل $(-۱)^{[x]}$ است. (یعنی در بازهٔ $[۰,۱]$ نامنفی و در بازهٔ $[۱,۲]$ نامثبت است.)

۶۳۱- گزینهٔ ۲ **راه اول** برای رسیدن به ضابطهٔ $y=\cos\frac{x}{۲}$ باید در تابع $y=\cos x$، به جای xها، $\frac{x}{۲}$ قرار دهیم، پس نمودار تابع $y=\cos x$ با ضریب $k=۲$ در راستای افقی منبسط می‌شود:



(۱) $y=\cos x$

$$x \xrightarrow[\text{انبساط افقی با ضریب ۲}]{} \frac{x}{۲}$$



(۲) $y=\cos\frac{x}{۲}$

نمودار (۲)، نمودار تابع $y=\cos\frac{x}{۲}$ است.

راه دوم مقدار $f(۰)$ را حساب می‌کنیم: $f(۰)=\cos\frac{۰}{۲}=\cos ۰=۱$

تابع f باید از نقطهٔ $(۰,۱)$ بگذرد، پس (۱) و (۳) رد می‌شوند.

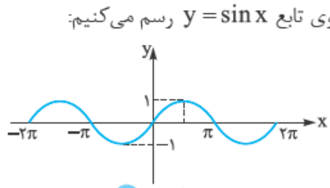
مقدار تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ صفر نمی‌شود ولی در نمودار (۴) صفر شده، پس (۴) هم رد می‌شود و فقط (۲) می‌ماند.

۶۳۲- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ است.

پس ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

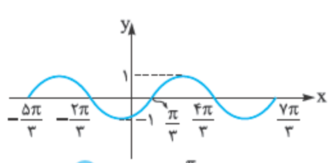
$$f(x)=-\sin(\frac{\pi}{۳}-۲x)=\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})$$

حالا مرحله به مرحله f را از روی تابع $y=\sin x$ رسم می‌کنیم:



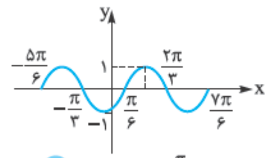
(۱) $y=\sin x$

$$x \xrightarrow[\text{به راست } \frac{\pi}{۳}]{} x-\frac{\pi}{۳}$$



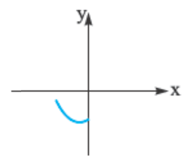
(۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$

$$x \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{۱}{۲}]{} ۲x$$



③ $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

فقط در نمودار ② بخشی از نمودار f را می‌بینیم:



۶۳۳- **گزینهٔ ۳** برد تابع $y=f(x)$ و $y=f(ax)$ یکسان است. پس برد تابع $y=\cos 3x$ با برد تابع $y=\cos x$ که همان بازهٔ $[-1,1]$ است، برابر است. حالا محدودهٔ برد f را می‌سازیم:

$$-1\le \cos 3x\le 1 \xrightarrow{\times 2} -2\le 2\cos 3x\le 2$$

$$\xrightarrow{-1} -3\le 2\cos 3x-1\le 1 \Rightarrow -3\le f(x)\le 1$$

پس برد تابع f بازهٔ $[-3,1]$ است.

۶۳۴- **گزینهٔ ۱** می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$، پس ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$$

حالا تغییرهای گفته‌شده در سؤال را مرحله به مرحله روی تابع $f(x)=-\sin x$ انجام می‌دهیم:

① انبساط افقی با ضریب ۲: باید به جای xها، $\frac{x}{2}$ قرار دهیم: $y=-\sin\frac{x}{2}$

② π واحد به راست: به جای xها، $x-\pi$ می‌گذاریم:

$$y=-\sin(\frac{x-\pi}{2})=-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$$

با دو اتحاد $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ و $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$، ضابطه را در این مرحله ساده می‌کنیم:

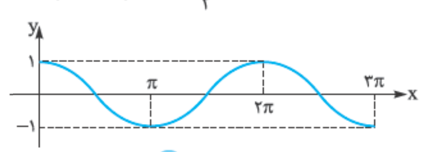
$$y=-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})=\cos\frac{x}{2}$$

③ ۱ واحد به بالا: به ضابطهٔ تابع ۱ واحد اضافه می‌کنیم: $y=1+\cos\frac{x}{2}$

۶۳۵- **گزینهٔ ۲** اول ضابطهٔ f را به کمک رابطهٔ $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}+2x)=\cos 2x$$

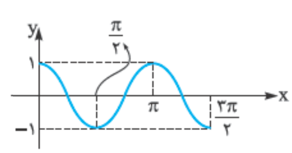
حالا نمودار تابع $f(x)=\cos 2x$ را در بازهٔ $[0,\frac{3\pi}{2}]$ رسم می‌کنیم:



① $y=\cos x$

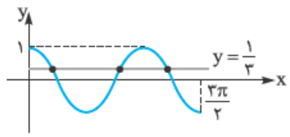
$\xrightarrow{x\to 2x}$

انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$



② $y=\cos 2x$

حالا خط افقی $y=\frac{1}{3}$ را می‌کشیم تا ببینیم نمودار تابع f را در این بازه در چند نقطه قطع می‌کند:



می‌بینید که در ۳ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

۶۳۶- **گزینهٔ ۳** با اتحاد $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$، ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=1-\sin x\cos x \Rightarrow f(x)=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

برد توابع $y=f(x)$ و $y=f(ax)$ با هم فرقی ندارند، پس برد تابع $y=\sin 2x$ همان برد تابع $y=\sin x$ است که بازهٔ $[-1,1]$ می‌باشد. حالا محدودهٔ برد f را حساب می‌کنیم:

$$-1\le\sin 2x\le 1 \xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})} -\frac{1}{2}\le -\frac{1}{2}\sin 2x\le\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2}\sin 2x\le\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{3}{2}$$

پس بیشترین و کم‌ترین مقدار f به ترتیب $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}$ است.

۶۳۷- **گزینهٔ ۳** ضابطهٔ f را با این سه اتحاد ساده‌تر می‌نویسیم:

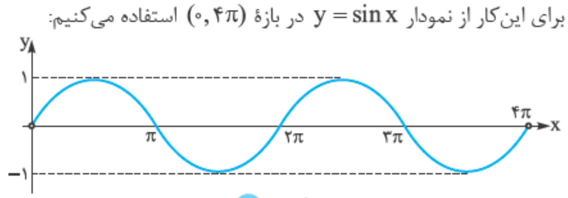
$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha \quad , \quad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}+x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x\sin x \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

حالا باید نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ را در بازهٔ $(0,2\pi)$ رسم کنیم.

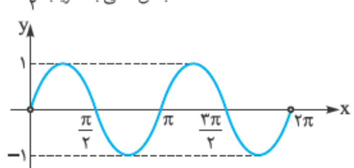
برای این‌کار از نمودار $y=\sin x$ در بازهٔ $(0,4\pi)$ استفاده می‌کنیم:



① $y=\sin x$

$\xrightarrow{x\to 2x}$

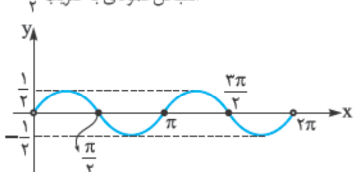
انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$



② $y=\sin 2x$

$\xrightarrow{f\to\frac{1}{2}f}$

انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$



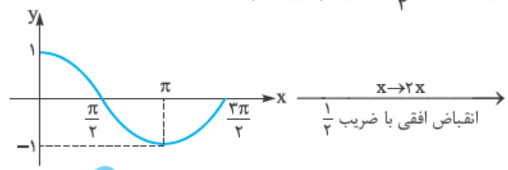
③ $y=\frac{1}{2}\sin 2x$

همان‌طور که می‌بینید ریشه‌های تابع f، در این بازه $\frac{\pi}{2}$، π و $\frac{3\pi}{2}$ هستند و مجموعشان 3π است.

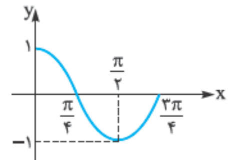
۶۳۸- **گزینهٔ ۲** از اتحادهای مثلثاتی یاد گرفتیم $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

پس ضابطهٔ f به این صورت در می‌آید: $f(x)=\cos 2x \quad , \quad x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$

نمودار f را در بازهٔ $[0,\frac{3\pi}{4}]$ رسم می‌کنیم:

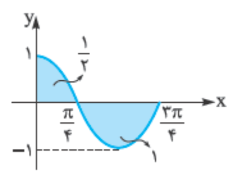


① $y=\cos x$



② $y=\cos 2x$

سؤال گفته مساحت هر طاق نمودار $y=\cos 2x$، برابر ۱ است. این تابع در بازهٔ $[0,\frac{3\pi}{4}]$، از یک طاق کامل (در بازهٔ $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$) و یک طاق نصفه (در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{4}]$) تشکیل شده، پس مساحت سطح محصور بین این منحنی و محور xها در این بازه برابر است با:



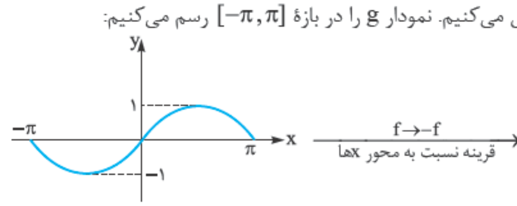
$$\Rightarrow \frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

۶۳۹- **گزینهٔ ۲** اول دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-\sin x}$ را تعیین می‌کنیم:

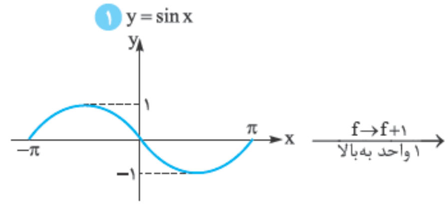
$$1-\sin x\ge 0 \Rightarrow \sin x\le 1 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

چون مقدار سینوس همواره عددی کوچک‌تر یا مساوی ۱ است، پس دامنهٔ تابع f برابر با $\mathbb{R}$ است.

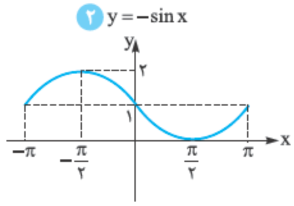
از طرفی رادیکال تأثیری روی یکنوایی تابع ندارد، پس به جای بررسی یکنوایی تابع $f(x)=\sqrt{1-\sin x}$، یکنوایی تابع $g(x)=1-\sin x$ را بررسی می‌کنیم. نمودار g را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم می‌کنیم:



① $y=\sin x$



② $y=-\sin x$



③ $y=-\sin x+1$

حالا یکنوایی تابع g را در بازهٔ هر گزینه بررسی می‌کنیم:

① g در بازهٔ $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ صعودی اکید است.

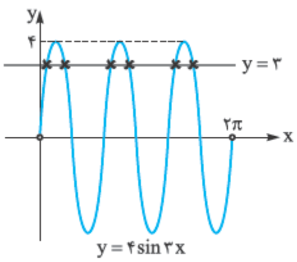
② g در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},0]$ نزولی اکید است، پس جواب همین گزینه است.

③ g در بازهٔ $[0,\pi]$ غیر یکنوا است.

④ g در بازهٔ $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ صعودی اکید است.

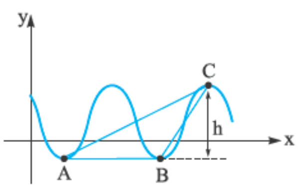
۶۴۰- **گزینهٔ ۳** برد تابع $y=4\sin ax$ برابر $[-4,4]$ است. پس برای این‌که خط $y=a$ نمودار تابع را قطع کند باید $a\in[-4,4]$ باشد. از طرفی برای این‌که حداکثر تعداد نقاط برخورد حاصل شود a نباید برابر ۴ یا ۴− باشد، چون در این حالت خط بر نمودار مماس می‌شود و کم‌ترین تعداد نقاط برخورد را خواهیم داشت. پس برای این‌که بیشترین نقاط برخورد را داشته باشیم مقدار a باید برابر ۳ باشد (چون دورهٔ تناوب تابع کوچک‌تر و نمودار تابع بیشترین تکرار حالت سینوسی خود را خواهد داشت).

حالا برای یافتن تعداد نقاط برخورد، نمودار تابع $y=4\sin 3x$ و خط $y=3$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم: (دقت کنید که دورهٔ تناوب تابع $y=4\sin 3x$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.)



با توجه به شکل تعداد نقاط برخورد، ۶تا است.

۶۴۱- **گزینهٔ ۲** مطابق شکل مقابل، طول قاعدهٔ AB برابر طول یک دورهٔ تناوب تابع است.

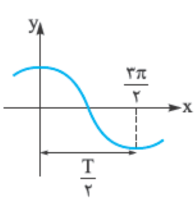


دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{2}=\pi$ است. از طرفی ارتفاع مثلث برابر فاصلهٔ ماکزیمم تابع از مینیمم آن است. ماکزیمم تابع f برابر $1+|-2|=3$ و مینیمم آن برابر $1-|-2|=-1$ است؛ پس طول ارتفاع مثلث برابر $3-(-1)=4$ است؛ پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{AB\times h}{2}=\frac{\pi\times 4}{2}=2\pi$$

ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=a+b\sin kx$ و $g(x)=a+b\cos kx$ به ترتیب برابر $a+|b|$ و $a-|b|$ است.

۶۴۲- **گزینهٔ ۲** با توجه به شکل نصف دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.



$$\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow T=3\pi$$

دورهٔ تناوب تابع $y=\cos ax$ برابر با $\frac{2\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=\cos kx$ برابر با $\frac{2\pi}{|k|}$ است که باید با 3π برابر باشد:

$$\frac{2\pi}{|k|}=3\pi \Rightarrow |k|=\frac{2}{3} \xrightarrow{k>0} k=\frac{2}{3}$$

۶۴۳- **گزینهٔ ۳** چون تابع در این بازه یک موج سینوسی (یا کسینوسی) را طی کرده، پس این بازه یک دورهٔ تناوب تابع است. طول بازه (دورهٔ تناوب) را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\Rightarrow T=\pi$$

دورهٔ تناوب توابع (۱) و (۳) برابر با $\frac{2\pi}{2}=\pi$ و دورهٔ تناوب توابع (۲) و (۴) برابر با $\frac{2\pi}{1}=2\pi$ است، پس (۲) و (۴) رد می‌شوند.
حداقل و حداکثر هر دو تابع (۱) و (۳) به ترتیب ۰ و ۲ است.
مقدار توابع (۱) و (۳) را در $x=0$ حساب می‌کنیم:

(۱) $y=1+\sin(2x+\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{x=0} y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(۳) $y=1-\sin(2x+\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{x=0} y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

با توجه به نمودار، مقدار تابع در $x=0$ به مینیمم تابع (صفر) نزدیک‌تر است تا به ماکزیمم آن (یعنی ۲)، پس (۳) صحیح است.

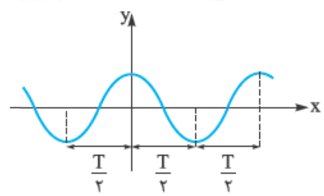
۶۴۴- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

با توجه به شکل $f(0)=a$ است، پس:

$$f(x)=\cos 2x \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow a=1$$

فاصله‌ای که روی شکل با b نشان داده شده، برابر با یک‌ونیم دورهٔ تناوب است: $\frac{3}{2}T=b$



از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos 2x$ برابر با $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ است، پس: $b=\frac{3}{2}\pi$

در نتیجه مقدار a.b برابر است با: $a.b=1\times\frac{3}{2}\pi=\frac{3\pi}{2}$

۶۴۵- گزینهٔ ۳ کم‌ترین مقدار تابع روی محور xهاست. پس: $\min(f)=0$

از آن‌جا که کم‌ترین مقدار عبارت $a\sin(\pi x-\frac{\pi}{6})$ برابر $-|a|$ است،
بنابراین: $\min(f)=-|a|+b=0 \Rightarrow b=|a| \quad (*)$

از طرفی منحنی f، خط $y=x+2$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند.
در نتیجه مختصات نقطهٔ تلاقی برابر است با:

$$x=1 \xrightarrow{y=x+2} y=3 \Rightarrow A(1,3)$$

این نقطه در تابع f نیز صدق می‌کند:

$$f(1)=3 \Rightarrow a\sin(\pi-\frac{\pi}{6})+b=3 \Rightarrow a\sin\frac{5\pi}{6}+b=3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}+b=3 \xrightarrow{b=|a|} \frac{a}{2}+|a|=3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>0: \frac{3a}{2}=3 \Rightarrow a=2 \xrightarrow{(*)} b=2 \\ a<0: -\frac{a}{2}=3 \Rightarrow a=-6 \xrightarrow{(*)} b=6 \end{cases}$$

پس $a+b$ برابر ۴ یا صفر است.

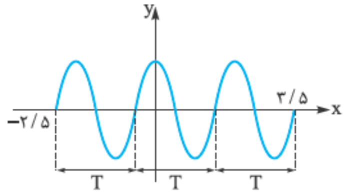
۶۴۶- گزینهٔ ۱ اول ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a\sin\pi(\frac{1}{2}+bx) \Rightarrow f(x)=a\sin(\frac{\pi}{2}+b\pi x)$$

چون $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$، پس $f(x)=a\cos b\pi x$.

با توجه به شکل $f(0)=2$، پس: $a\cos(0)=2 \Rightarrow a=2$

روی نمودار، تعداد دوره‌های تناوب را روی بازهٔ رسم‌شده مشخص می‌کنیم:



$$3T=3.5-(-2.5) \Rightarrow 3T=6 \Rightarrow T=2$$

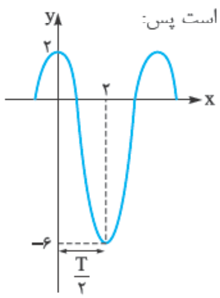
از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\cos b\pi x$ برابر با $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}$ است، پس: $\frac{2}{|b|}=2 \Rightarrow b=\pm1$

در نتیجه: $ab=2\times(\pm1)=\pm2$

۶۴۷- گزینهٔ ۲ اول تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=a\sin(\frac{\pi}{2}-b\pi x)+c \Rightarrow y=a\cos b\pi x+c$$

با توجه به شکل نصف دورهٔ تناوب تابع برابر ۲ است پس:



$$\Rightarrow \frac{T}{2}=2 \Rightarrow T=4$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|}=4 \Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

با توجه به این‌که $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، پس هر دو مقدار b قابل‌قبول است.

فرض می‌کنیم $b=\frac{1}{2}$ باشد، پس: $f(x)=a\cos\frac{\pi}{2}x+c$

نمودار تابع از دو نقطه $(0,2)$ و $(2,-6)$ می‌گذرد. پس:

$$\begin{aligned} f(0)=2 &\Rightarrow a+c=2 \\ f(2)=-6 &\Rightarrow a(-1)+c=-6 \end{aligned} \xrightarrow{\text{جمع}} 2c=-4$$

$$\Rightarrow c=-2 \xrightarrow{a+c=2} a=4 \Rightarrow f(x)=4\cos(\frac{\pi}{2}x)-2$$

$$\Rightarrow f(\frac{7}{3})=4\cos(\frac{\pi}{2}(\frac{7}{3}))-2=4\cos(\frac{7\pi}{6})-2$$

$$=4(-\frac{\sqrt{3}}{2})-2=-2\sqrt{3}-2$$

۶۴۸- گزینهٔ ۱ حد راست تابع $f(x)=a+b\cos\frac{\pi}{2}x$ در $x=0$ صفر است، پس:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(a+b\cos\frac{\pi}{2}x)$$

$$f(0)=0 \Rightarrow a+b\underbrace{\cos 0}_{1}=0 \Rightarrow a+b=0$$

مقدار تابع در نقطهٔ وسط $x=0$ و $x=4$ یعنی در $x=2$ برابر ۴ است،
پس: $f(2)=4 \Rightarrow a+b\underbrace{\cos\pi}_{-1}=4 \Rightarrow a-b=4$

با حل دو معادلهٔ $a+b=0$ و $a-b=4$، داریم: $b=-2, a=2$

۶۴۹- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ f را با اتحاد $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ ساده‌تر می‌نویسیم:

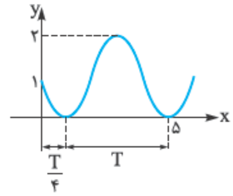
$$f(x)=a-\cos(\pi(\frac{1}{2}+bx))=a-\cos(\frac{\pi}{2}+b\pi x)$$

$$=a+\sin(b\pi x)$$

کم‌ترین مقدار عبارت $a+\sin(b\pi x)$ به ازای $\sin(b\pi x)=-1$ رخ

می‌دهد و برابر با $a-1$ است. از روی نمودار کم‌ترین مقدار تابع صفر است، پس: $a-1=0 \Rightarrow a=1$

با توجه به $a=1$، نمودار تابع به این شکل در می‌آید:



$$T+\frac{T}{4}=5 \Rightarrow \frac{5T}{4}=5 \Rightarrow T=4$$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=1+\sin(b\pi x)$ برابر با $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}$ است که باید با ۴ برابر باشد: $\frac{2}{|b|}=4 \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$

تابع از نقطهٔ $(5,0)$ می‌گذرد و فقط به ازای $b=-\frac{1}{2}$ این شرط برقرار است:

$$f(x)=1+\sin(-\frac{\pi x}{2}) \Rightarrow f(5)=1+\sin(-\frac{5\pi}{2})$$
$$=1+(-1)=0 \checkmark$$

پس: $a-b=1-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

۶۵۰- گزینهٔ ۱ چون $0<\frac{\pi}{3}<\pi$ تابع از این ساده‌تر نمی‌شود. برای محاسبهٔ b از دورهٔ تناوب استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل:

$$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{12}-(-\frac{\pi}{12}) \Rightarrow \frac{T}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow T=\pi$$

از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=\pm 2$$

این‌جا فعلاً نمی‌توانیم مقدار دقیق b را تعیین کنیم، چون تابع سینوس، ضریب مجهول a هم دارد. برای محاسبهٔ a با توجه به شکل، از ماکزیمم و مینیمم تابع استفاده می‌کنیم. از آن‌جا که اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۴ است، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{ماکزیمم}=1+|a| \\ \text{مینیمم}=1-|a| \end{cases} \Rightarrow \text{ماکزیمم}-\text{مینیمم}=2|a|$$

$$\Rightarrow 4=2|a| \Rightarrow |a|=2 \Rightarrow a=\pm 2$$

از آن‌جا که مقادیر تابع بلافاصله بعد از محور yها در حال افزایش هستند، بنابراین باید ضریب نهایی سینوس مثبت باشد. پس با توجه به مقادیر a و b یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱ $a=2, b=2 \Rightarrow f(x)=1+2\sin(\frac{\pi}{3}+2x)$

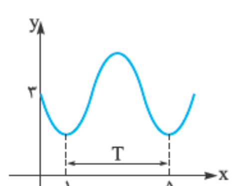
۲ $a=-2, b=-2 \Rightarrow f(x)=1-2\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$

$$=1+2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$$

اما باید توجه کنید که با توجه به شکل، $f(0)>0$ است که این مورد فقط در تابع حالت ۲ برقرار است پس: $a=-2, b=-2 \Rightarrow a+b=-4$

۶۵۱- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=a+\sin(b\pi x)$ از نقطهٔ $(0,3)$ می‌گذرد، پس: $f(0)=3 \Rightarrow a+0=3 \Rightarrow a=3$

روی نمودار، T را مشخص می‌کنیم:



$$T=5-1=4$$

دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a+\sin(b\pi x)$ برابر با $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}$ است که باید ۴ شود:

$$\frac{2}{|b|}=4 \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

حالا مقدار تابع را در $x=1$ در هر دو حالت $b=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{2}$ حساب می‌کنیم. هر کدام کم‌تر از ۳ شد جواب است:

$$b=\frac{1}{2}: f(x)=3+\sin\frac{\pi x}{2} \Rightarrow f(1)=3+1=4 \quad \times$$

$$b=-\frac{1}{2}: f(x)=3+\sin(-\frac{\pi x}{2}) \Rightarrow f(1)=3-1=2 \quad \checkmark$$

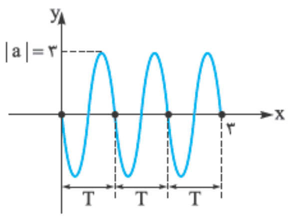
با جای‌گذاری $a=3$ و $b=-\frac{1}{2}$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=3-\sin\frac{\pi x}{2}$ در می‌آید. حالا مقدار تابع را در $x=\frac{25}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{25}{3})=3-\sin\frac{25\pi}{6}=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})$$
$$=3-\sin\frac{\pi}{6}=3-\frac{1}{2}=2.5$$

۶۵۲- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)$ در سمت راست محور yها به شکل

است، پس a و b هم‌علامت نیستند.

روی نمودار، مقادیر $|a|$ و T را مشخص می‌کنیم:



$$3T=3-0 \Rightarrow T=1$$

فرض می‌کنیم $a<0$، پس از $|a|=3$ نتیجه می‌شود $a=-3$.

از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)$ برابر با $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}$ است که باید با ۱ برابر شود:

$$\frac{2}{|b|}=1 \Rightarrow b=\pm 2$$

چون a را منفی گرفتیم، پس b باید مثبت باشد و $b=2$ قبول است.

در نتیجه: $a.b=-3\times 2=-6$

اگر a را مثبت در نظر بگیریم $a=3$ و $b=-2$ به دست می‌آید که در این حالت هم $ab=-6$ است.

۶۵۳- گزینهٔ ۳ از نمودار می‌فهمیم بازهٔ $(0,\frac{4}{3})$ برابر با دو برابر دورهٔ تناوب تابع f است، پس: $2T=\frac{4}{3}-0 \Rightarrow T=\frac{2}{3}$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=1+a\sin(b\pi x)$، برابر با $\frac{2\pi}{|b\pi|}$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|}=\frac{2}{3} \Rightarrow |b|=3 \Rightarrow b=\pm 3$$

با توجه به نمودار a و b هم علامت‌اند، با فرض $b=3$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=1+a\sin 3\pi x$ در می‌آید.

چون a مثبت است، پس حداقل این تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin 3\pi x$ برابر با -1 باشد، پس: $1+a\underbrace{\sin 3\pi x}_{-1}=-1 \Rightarrow 1-a=-1 \Rightarrow a=2$

در نتیجه: $a+b=2+3=5$

تذکر حالت $a=-2$ و $b=-3$ نیز جواب است.

۶۵۴- گزینهٔ ۴ اول ضابطهٔ f را با اتحاد $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$، ساده می‌کنیم:

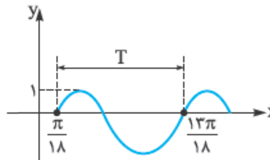
$$f(x)=a-2\cos(bx+\frac{\pi}{2})=a+2\sin(bx)$$

بیشترین مقدار تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin(bx)$ برابر ۱ باشد، پس:

$\max(f) = a + ۲(۱) = a + ۲$

با توجه به نمودار، بیشترین مقدار f برابر ۱ است، پس: $a + ۲ = ۱ \Rightarrow a = -۱$

با توجه به نمودار، مقدار دورهٔ تناوب (T) را می‌یابیم.



$T = \frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳}$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x) = -۱ + ۲\sin(bx)$ برابر با $\frac{۲\pi}{|b|}$ است که باید با $\frac{۲\pi}{۳}$ برابر شود:

$\frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$

الان $a+b$ یا $-۱+۳=۲$ یا $-۱+(-۳)=-۴$ می‌شود که فقط ۲ در گزینه‌ها است. حالا می‌خواهیم ببینیم چرا $b=-۳$ قابل‌قبول نیست.

تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۱۸},۰)$ می‌گذرد. به ازای $b=۳$ و $b=-۳$ این موضوع را بررسی می‌کنیم:

$b=۳: f(x) = -۱+۲\sin ۳x$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۸}) = -۱+۲\sin\frac{\pi}{۶} = ۰$ ✓

$b=-۳: f(x) = -۱-۲\sin ۳x$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۸}) = -۱-۲\sin\frac{\pi}{۶} = -۲$ ✗

۶۵۵- گزینهٔ ۳ مقدار تابع را در $x=۰$ حساب می‌کنیم:

$f(x)=۱+a\sin(bx-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow f(۰)=۱+a\sin(-\frac{\pi}{۶})=۱-\frac{a}{۲}$

با توجه به نمودار مقدار تابع در $x=۰$، بیشتر از ۱ است، پس:

$۱-\frac{a}{۲}>۱ \Rightarrow a<۰$

چون $a<۰$، ماکزیمم تابع f زمانی رخ می‌دهد که $\sin(bx-\frac{\pi}{۶})$ برابر -۱ باشد:

$\max(f)=۱+a(-۱)=۱-a$

طبق نمودار ماکزیمم f برابر ۱/۵ است، پس: $۱-a=۱/۵ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع $T=\pi$ است. از طرفی دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin(bx-\frac{\pi}{۶})$ برابر با $\frac{۲\pi}{|b|}$ است که باید با π برابر باشد:

$\frac{۲\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۲ \Rightarrow b=\pm ۲$

با توجه به مقادیر $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\pm ۲$، مقدار $a+b$ یا $\frac{۳}{۲}$ یا $-\frac{۵}{۲}$ است، که فقط $\frac{۳}{۲}$ در گزینه‌ها می‌باشد. حالا می‌خواهیم نشان دهیم $b=-۲$ قابل‌قبول نیست.

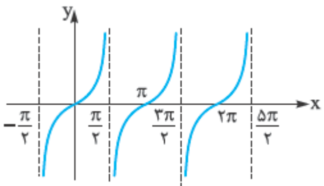
به ازای $b=-۲$، ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin(-۲x-\frac{\pi}{۶})$ در می‌آید که ساده‌شدهٔ آن $f(x)=۱+\frac{۱}{۲}\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})$ می‌شود. این تابع در بازهٔ $[۰,\pi]$، ابتدا صعودی است ولی با توجه به نمودار f که در ابتدا نزولی است، نتیجه می‌گیریم $b=-۲$ قابل‌قبول نیست.

۶۵۶- گزینهٔ ۳ بیشترین مقدار عبارت $y=-۴\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که $\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)=-۱$ باشد.

دورهٔ تناوب تابع $\frac{۲\pi}{|۳\pi|}=\frac{۲}{۳}$ است. پس نمودار تابع در فاصله $[-۱,۱]$ که طول بازه برابر ۲ است سه بار تکرار می‌شود $(۳(\frac{۲}{۳})=۲)$ و چون $y(\pm ۱)\neq ۴$، می‌توان نمودار فرضی زیر را رسم کرد:

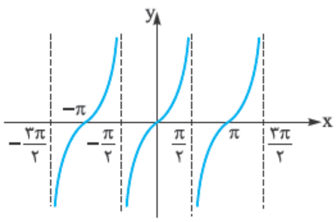
در سه نقطه بیشترین مقدار را دارد. $\Leftarrow$

۶۵۷- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع $y=\tan x$ برابر با $T=\pi$ و نمودار آن به این شکل است:



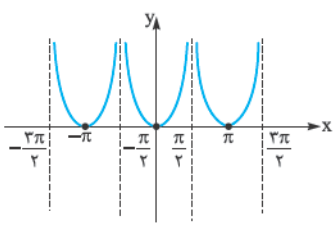
می‌بینید که این تابع در بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ نه صعودی است و نه نزولی. در نقطهٔ $x=\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نمی‌شود و به ازای $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ مقداری مثبت و به ازای $\frac{۳\pi}{۲}<x<۲\pi$ مقداری منفی دارد.

۶۵۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع $y=|\tan x|$ را در بازهٔ $(-\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ رسم می‌کنیم:



۱ $y=\tan x$

$\xrightarrow{f\to|f|}$ قسمت‌های زیر محور xها قرینه می‌شوند



۲ $y=|\tan x|$

با توجه به نمودار تابع $y=|\tan x|$، وضعیت یکنوایی تابع را در بازه‌های داده‌شده بررسی می‌کنیم:

۱) $(-\frac{\pi}{۲},۰) \Leftarrow$ نزولی

۲) $(۰,\frac{\pi}{۲}) \Leftarrow$ صعودی

۳) $(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}) \Leftarrow$ نه صعودی و نه نزولی

۴) $(-\frac{۳\pi}{۴},-\frac{\pi}{۲}) \Leftarrow$ صعودی

۶۵۹- گزینهٔ ۴ برای محاسبهٔ a باید معادلهٔ $\tan x=۱$ را حل کنیم:

$\tan x=۱ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\ldots$

چون a اولین نقطهٔ تلاقی بعد از محور yهاست بنابراین: $a=\frac{\pi}{۴}$

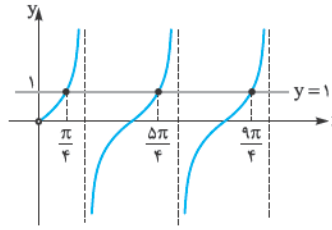
برای محاسبهٔ b باید معادلهٔ $\tan x=\sqrt{۳}$ را حل کنیم:

$\tan x=\sqrt{۳} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳},\ldots$

چون b دومین نقطهٔ تلاقی بعد از محور yهاست، بنابراین: $b=\frac{۴\pi}{۳}$

در نتیجه: $b-a=\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}=\frac{۱۶\pi-۳\pi}{۱۲}=\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

۶۶۰- گزینهٔ ۴



نمودار تابع $f(x)=\tan x$ را به ازای $x>۰$ تا جایی رسم می‌کنیم که خط $y=۱$ را در ۳ نقطه قطع کند. می‌خواهیم $f(x)=\tan x$، خط $y=۱$ را در بازهٔ $(۰,a)$ در ۲ نقطه قطع کند، پس حداکثر a می‌تواند عدد $\frac{۹\pi}{۴}$ باشد. دقت کنید خود a، عضو بازهٔ $(۰,a)$ نیست.

۶۶۱- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\cot(x-\frac{\pi}{۲}) \xrightarrow{\cot(-\alpha)=-\cot\alpha}$$

$$f(x)=-\cot(\frac{\pi}{۲}-x) \xrightarrow{\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha} f(x)=-\tan x$$

ضابطهٔ هر ۴ گزینه را ساده می‌کنیم تا ببینیم کدام‌یک با f برابر می‌شود:

(۱) $y=\tan(\pi+x)=\tan x$ ×

(۲) $y=\tan(\pi-x)=-\tan x$ ✓

(۳) $y=\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cot x$ ×

(۴) $y=\tan(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cot x$ ×

پس نمودار تابع (۲) بر نمودار تابع داده‌شده منطبق است.

۶۶۲- گزینهٔ ۱

دورهٔ تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d\,,(a,b\neq ۰)$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است. با توجه به این نکته، دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan(۳x+\frac{\pi}{۲})$ برابر با $\frac{\pi}{۳}$ است.

۶۶۳- گزینهٔ ۱ دورهٔ تناوب توابع زیر $\frac{۲\pi}{|a|}$ است:

$\sin ax, \cos ax, \sin^{(۲n+۱)} ax, \cos^{(۲n+۱)} ax$

و دورهٔ تناوب توابع زیر $\frac{\pi}{|a|}$ است:

$\tan ax, \cot ax, \tan^{n} ax, \cot^{n} ax, \sin^{۲n} ax, \cos^{۲n} ax$

$, |\sin ax|, |\cos ax|, |\tan ax|, |\cot ax|$

از نکتهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که دورهٔ تناوب هر دو تابع $y=|\cos ax|$ و $y=|\tan ax|$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس:

$y_۱=|\cos ۲x| \Rightarrow T_۱=\frac{\pi}{۲}$

$y_۲=|\tan ۲x| \Rightarrow T_۲=\frac{\pi}{۲}$

۶۶۴- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\tan ۳x-\cot ۳x=\frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}-\frac{\cos ۳x}{\sin ۳x}=\frac{\sin^۲ ۳x-\cos^۲ ۳x}{\sin ۳x\cos ۳x}$$

حالا با استفاده از دو اتحاد $\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=\cos ۲\alpha$ و $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$، ضابطهٔ f به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x)=\frac{-\cos ۶x}{\frac{۱}{۲}\sin ۶x} \Rightarrow f(x)=-۲\cot ۶x$$

از آن‌جایی که دورهٔ تناوب تابع $y=\cot ax$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب f برابر با $T=\frac{\pi}{۶}$ است.

۶۶۵- گزینهٔ ۱ چون $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ است، پس دامنهٔ $\tan A$، شامل کل $\mathbb{R}$ به‌جز جواب‌های معادلهٔ $\cos A=۰$ می‌شود، یعنی باید $A\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشد.

پس دامنهٔ تابع $f(x)=۲-\tan\frac{x}{۲}$ با فرض $A=\frac{x}{۲}$ به این صورت است:

$$\frac{x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\times ۲} x\neq ۲k\pi+\pi$$

پس: $D_f=\mathbb{R}-\{(۲k+۱)\pi\}$

۶۶۶- گزینهٔ ۲ دامنهٔ $\cot A$ عبارت به صورت $A\neq k\pi$ است.

با توجه به نکتهٔ بالا دامنهٔ تابع $f(x)=\cot(\frac{۳\pi}{۴}-ax)$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۳\pi}{۴}-ax\neq k\pi \Rightarrow ax\neq\frac{۳\pi}{۴}-k\pi \Rightarrow x\neq\frac{-۴k\pi+۳\pi}{۴a}$$

از آن‌جا که $k\in\mathbb{Z}$ است می‌توانیم جای k، $-k$ قرار دهیم، پس نامساوی بالا به شکل $x\neq\frac{۴k\pi+۳\pi}{۴a}$ در می‌آید.

خود سؤال گفته دامنهٔ f به‌صورت $x\neq\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$ است که با مخرج‌مشترک‌گیری به شکل $x\neq\frac{۴k\pi+۳\pi}{۱۲}$ در می‌آید. با برابر گذاشتن سمت راست نامساوی‌های $x\neq\frac{۴k\pi+۳\pi}{۴a}$ و $x\neq\frac{۴k\pi+۳\pi}{۱۲}$ داریم:

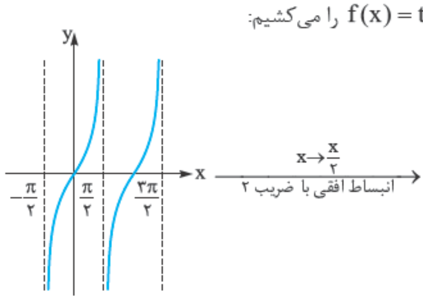
$۴a=۱۲ \Rightarrow a=۳$

۶۶۷- گزینهٔ ۳ اول ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

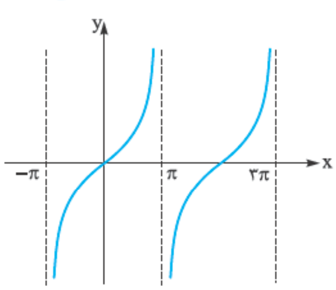
$$f(x)=\tan(۳\pi+\frac{x}{۲})=\tan(\underbrace{۲\pi}_{\text{حذف}}+\pi+\frac{x}{۲})$$

$$=\tan(\pi+\frac{x}{۲})=\tan\frac{x}{۲}$$

نمودار تابع $f(x)=\tan\frac{x}{۲}$ را می‌کشیم:



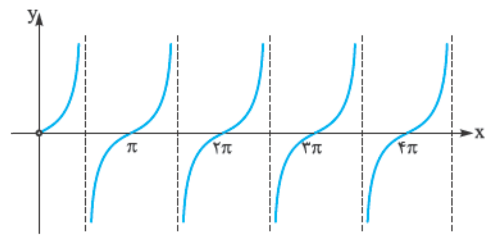
(۱) $y=\tan x$



(۲) $y=\tan\frac{x}{۲}$

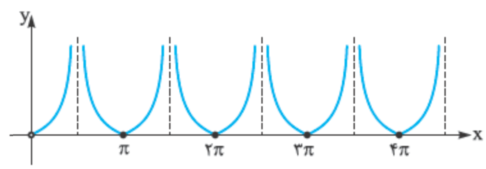
همان‌طور که می‌بینید تابع f در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ که طول آن ۲π است، صعودی می‌باشد.

۶۶۸- **گزینهٔ ۳** نمودار تابع $y=|\tan kx|$ را رسم می‌کنیم:



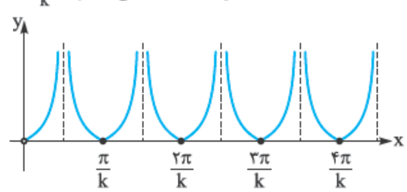
① $y=\tan x$

$$\xrightarrow[\text{قسمت‌های زیر محور xها قرینه می‌شوند}]{f\to|f|}$$



② $y=|\tan x|$

$$\xrightarrow[\text{انقباض یا انبساط افقی با ضریب } \frac{۱}{k}]{x\to kx}$$



③ $y=|\tan kx|$

پس تابع $y=|\tan kx|$ روی بازهٔ $(۰,\frac{۳\pi}{k}]$، دارای ۳ مینیمم است، در نتیجه $\frac{۳\pi}{k}$ باید با $\frac{\pi}{۲}$ برابر باشد: $\frac{۳\pi}{k}=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow k=۶$

۶۶۹- **گزینهٔ ۲** اگر نمودار تابع $y=\tan kx$ در هر دورهٔ تناوب آن به شکل  باشد، $k>۰$ و اگر به شکل  باشد، $k<۰$ است.

با توجه به نکتهٔ بالا و نمودار داده‌شده، در تابع $y=\tan ax$، حتماً $a<۰$ است. از نمودار می‌فهمیم که بازهٔ $(-۱,۱)$ یک دورهٔ تناوب آن است، پس:

$T=۱-(-۱)=۲$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع $y=\tan ax$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس:

$$\frac{\pi}{|a|}=۲ \Rightarrow |a|=\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{a<۰} a=-\frac{\pi}{۲}$$

۶۷۰- **گزینهٔ ۲** بازهٔ $(-\frac{\pi}{۸},\frac{\pi}{۴})$ یک دورهٔ تناوب تابع است، پس:

$$T=\frac{\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۸}) \Rightarrow T=\frac{۳\pi}{۸}$$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع $y=a+\tan bx$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است که باید با $\frac{۳\pi}{۸}$ برابر شود:

$$\frac{\pi}{|b|}=\frac{۳\pi}{۸} \Rightarrow b=\pm\frac{۸}{۳}$$

با توجه به این‌که در هر دوره تناوب نمودار تابع $y=a+\tan bx$ صعودی است پس: $b>۰$

در نتیجه $b=\frac{۸}{۳}$ قابل‌قبول است.

تا این‌جا ضابطهٔ f به شکل $f(x)=a+\tan\frac{۸x}{۳}$ درآمده است. این تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۴},۰)$ می‌گذرد، پس: $f(\frac{\pi}{۴})=۰ \Rightarrow a+\tan(\frac{۸}{۳}\times\frac{\pi}{۴})=۰$

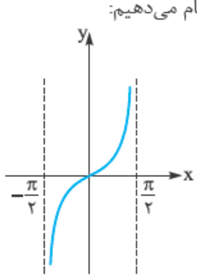
$$\Rightarrow a+\tan\frac{۲\pi}{۳}=۰ \Rightarrow a-\sqrt{۳}=۰ \Rightarrow a=\sqrt{۳}$$

در نتیجه: $ab=\sqrt{۳}\times\frac{۸}{۳}=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

۶۷۱- **گزینهٔ ۲** ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

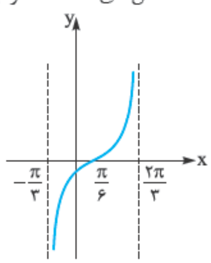
$$f(x)=\cot(\frac{\pi}{۲}+x)-۲\tan(\pi-x)$$
$$=-\tan x-۲(-\tan x)=\tan x$$

حالا انتقال‌های گفته‌شده را به ترتیب روی f انجام می‌دهیم:



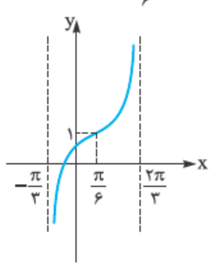
① $y=\tan x$

$$\xrightarrow[x\to x-\frac{\pi}{۶}]{\frac{\pi}{۶} \text{ به راست}}$$



② $y=\tan(x-\frac{\pi}{۶})$

$$\xrightarrow[f\to f+۱]{\text{۱ واحد به‌بالا}}$$

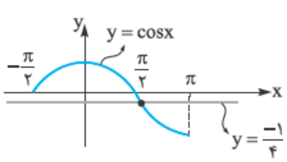


③ $y=\tan(x-\frac{\pi}{۶})+۱$

۶۷۲- **گزینهٔ ۲** چون حاصل‌ضرب دو پرانتز صفر شده، پس هر کدام از آن‌ها می‌توانند صفر باشند: $(۴\cos x+۱)(\sin x-۲)=۰$

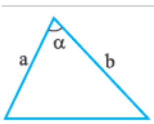
$$\Rightarrow \begin{cases} ۴\cos x+۱=۰ \Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۴} \\ \sin x-۲=۰ \Rightarrow \sin x=۲ \end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x=۲$ جواب ندارد، چون جواب $\sin x$ در محدودهٔ $[-۱,۱]$ است و نمی‌تواند ۲ باشد. پس فقط باید جواب‌های معادلهٔ $\cos x=-\frac{۱}{۴}$ را در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\pi]$ حساب کنیم. نمودار تابع $y=\cos x$ و $y=-\frac{۱}{۴}$ را درمحدودهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\pi]$ رسم‌می‌کنیم:

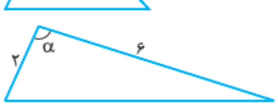


می‌بینید که در این محدوده این دو تابع همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند پس معادله یک جواب دارد.

۶۷۳- **گزینهٔ ۳** مساحت مثلثی به اضلاع a و b با زاویهٔ بین α، برابر با $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$ است.



پس در این‌جا داریم:



$\frac{1}{2}(2)(6)\sin\alpha = 3 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$

چون α زاویهٔ مثلث است پس در محدودهٔ $(0,\pi)$ است. معادلهٔ بالا در این محدوده دو جواب $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ دارد، پس ما دو مثلث با این ویژگی داریم.

۶۷۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم جواب کلی معادلهٔ $\cos x = \cos A$، به صورت $x = 2k\pi \pm A$ است. حالا معادله را حل می‌کنیم:

$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

جای $-\frac{1}{2}$، باید کسینوس یک زاویه قرار دهیم. بهترین انتخاب $\cos\frac{2\pi}{3}$ است، پس:

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

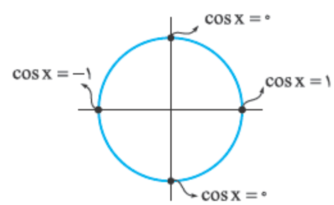
۶۷۵- گزینهٔ ۲ با اتحاد $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$، معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$\cos^3 x = \sin(\frac{\pi}{2}+x) \Rightarrow \cos^3 x = \cos x$

$\Rightarrow \cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos^2 x - 1) = 0$

$\cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$

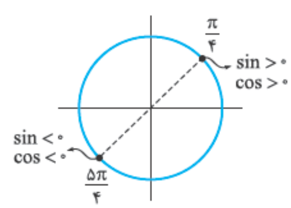
روی دایرهٔ مثلثاتی، جواب هر سه معادلهٔ بالا را علامت می‌زنیم. نقاط مشخص روی دایره، مضارب $\frac{\pi}{2}$ هستند که با $\frac{k\pi}{2}$ نشان می‌دهیم.



۶۷۶- گزینهٔ ۱ قبل از این‌که طرفین معادلهٔ $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ را به توان ۲ برسانیم، شرط می‌کنیم که $\sin x \ge 0$ و $\cos x \ge 0$. حالا توان دو می‌رسانیم:

$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x$

روی دایرهٔ مثلثاتی جاهایی که $\sin x$ و $\cos x$ برابرند و هر دو مثبت‌اند را مشخص می‌کنیم:



پس فقط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ جواب معادله است.

۶۷۷- گزینهٔ ۳ جواب معادلهٔ $\sin A = -1$ به صورت $A = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ است، پس:

$\sin(\pi\cos x) = -1 \Rightarrow \pi\cos x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

$\xrightarrow{\times\frac{1}{\pi}} \cos x = 2k + \frac{3}{2}$

با توجه به این‌که $-1 \le \cos x \le 1$، محدودهٔ k را حساب می‌کنیم:

$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2k + \frac{3}{2} \le 1 \xrightarrow{-\frac{3}{2}}$

$-\frac{5}{2} \le 2k \le -\frac{1}{2} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} -\frac{5}{4} \le k \le -\frac{1}{4} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = -1$

با جای‌گذاری $k = -1$، معادله را حل می‌کنیم:

$\cos x = 2k + \frac{3}{2} \xrightarrow{k=-1} \cos x = -\frac{1}{2}$

در بازهٔ $[0,2\pi]$، دو زاویه داریم که کسینوسشان $-\frac{1}{2}$ باشد:

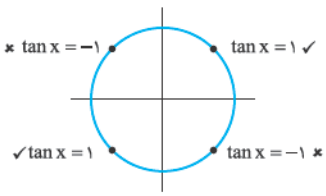
$x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$

۶۷۸- گزینهٔ ۴ جواب معادلهٔ $\frac{\cos 2x}{1+\tan x} = 0$، همان جواب معادلهٔ $\cos 2x = 0$ با شرط $1 + \tan x \ne 0$ است.

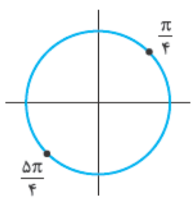
اول معادلهٔ $\cos 2x = 0$ را حل می‌کنیم:

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

نقاط $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ را روی دایره مشخص می‌کنیم و مقدار تانژانت را در این نقاط می‌نویسیم:



چون باید $\tan x \ne -1$، پس دو نقطه از دایره حذف می‌شوند و جواب‌های قابل‌قبول روی دایره به این صورت هستند:



این نقاط به صورت $k\pi + \frac{\pi}{4}$ نمایش داده می‌شوند.

۶۷۹- گزینهٔ ۳ با دو تساوی $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha$ و $\tan\pi = 0$ معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$\cos 3x + \sin(\frac{3\pi}{2}+2x) = \tan\pi$

$\Rightarrow \cos 3x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 3x = \cos 2x$

جواب معادلهٔ $\cos x = \cos A$، به صورت $x = 2k\pi \pm A$ است، پس:

$\cos 3x = \cos 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm 2x$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$

با جای‌گذاری اعداد صحیح جای k، جواب‌های در محدودهٔ $[0,\pi]$ را حساب می‌کنیم:

$x = 2k\pi \Rightarrow \underset{(k=0)}{x = 0}$

$x = \frac{2k\pi}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (k=0) \\ x = \frac{2\pi}{5} & (k=1) \\ x = \frac{4\pi}{5} & (k=2) \end{cases}$

پس در کل، این معادله ۳ جواب ۰، $\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{4\pi}{5}$ را در این بازه دارد.

۶۸۰- گزینهٔ ۳ جواب معادلهٔ $\tan x = \tan A$، به صورت $x = k\pi + A$ است. حالا معادلهٔ $\tan 5x = \tan x$ را با این شرط حل می‌کنیم:

$\tan 5x = \tan x \Rightarrow 5x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$

جواب‌های $\frac{k\pi}{4}$ که در محدودهٔ $(0,2\pi)$ قرار دارند را می‌نویسیم:

$\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\}$

دو جواب $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ از بین جواب‌ها باید حذف شوند، چون به ازای آن‌ها $\tan x$ و $\tan 5x$، تعریف نمی‌شود. پس مجموع جواب‌های قابل‌قبول برابر

است با: $\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\pi+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=5\pi$

تذکر در معادله‌های مثلثاتی کسری و معادله‌های مثلثاتی که تانژانت و کتانژانت دارند، حواستان به دامنهٔ معادله باشد.

۶۸۱- گزینهٔ ۴ اول تساوی $\cos\pi=-1$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\sin 5x+\sin 4x=1+\underbrace{\cos\pi}_{-1}\Rightarrow \sin 5x=-\sin 4x$$

جای $-\sin 4x$ می‌توانیم $\sin(-4x)$ قرار دهیم: $\sin 5x=\sin(-4x)$

می‌دانیم جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\sin A$، به‌صورت $\begin{cases}x=2k\pi+A\\ x=2k\pi+\pi-A\end{cases}$ هستند، پس:

$$\sin 5x=\sin(-4x)\Rightarrow\begin{cases}5x=2k\pi+(-4x)\\ 5x=2k\pi+\pi-(-4x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{9}\\ x=(2k+1)\pi\end{cases}$$

جواب‌های در بازهٔ $[0,2\pi]$ این معادله را می‌نویسیم:

$$x=\frac{2k\pi}{9}\Rightarrow x=0,\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{6\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{10\pi}{9},\frac{12\pi}{9},\frac{14\pi}{9},\frac{16\pi}{9},2\pi$$

$$x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\pi$$

مجموع جواب‌های بالا برابر است با:

$$0+\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}+\frac{6\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}+\frac{10\pi}{9}+\frac{12\pi}{9}+\frac{14\pi}{9}+\frac{16\pi}{9}+2\pi+\pi$$

$$=\frac{72\pi}{9}+3\pi=8\pi+3\pi=11\pi$$

۶۸۲- گزینهٔ ۲ جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin 3x+\sin 2x}{1+\cos x}=0$، همان جواب‌های معادلهٔ $\sin 3x+\sin 2x=0$ هستند، فقط حواسمان به شرط $1+\cos x\neq 0$ باید باشد.

$$\sin 3x+\sin 2x=0\Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x)\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+(-2x)\\ 3x=2k\pi+\pi-(-2x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{5}\\ x=(2k+1)\pi\end{cases}$$

از دو جواب به دست آمده، $x=(2k+1)\pi$ را حذف می‌کنیم زیرا به ازای آن، $\cos x=-1$ است. در نتیجه تنها جواب کلی قابل‌قبول معادله به صورت $x=\frac{2k\pi}{5}$ است.

۶۸۳- گزینهٔ ۱ اول معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\cos 2x+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=0\Rightarrow \cos 2x+\cos x=0$$

$$\Rightarrow \cos 2x=-\cos x$$

جای $-\cos x$، $\cos(\pi-x)$ را قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 2x=\cos(\pi-x)\Rightarrow 2x=2k\pi\pm(\pi-x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\pi-x\\ 2x=2k\pi-\pi+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+\pi\\ x=2k\pi-\pi\end{cases}$$

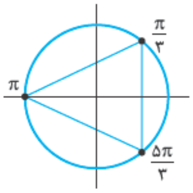
$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\\ x=(2k-1)\pi\end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ را می‌نویسیم:

$$x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}$$

$$x=(2k-1)\pi\Rightarrow x=\pi$$

جواب‌ها را روی دایره مشخص و به هم وصل می‌کنیم:



دایره به سه کمان $120°$ تقسیم شد، پس هر سه زاویه برابر با $60°$ هستند و مثلث حاصل، متساوی‌الاضلاع است.

۶۸۴- گزینهٔ ۴ **راه اول**

$$\tan 3x\tan x=1\Rightarrow \tan 3x=\frac{1}{\tan x}\Rightarrow \tan 3x=\cot x$$

حالا جای $\cot x$، از $\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$$

جواب معادلهٔ $\tan x=\tan A$، به صورت $x=k\pi+A$ است. پس:

$$\tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x$$

$$\Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

دقت کنید در تمام نقاط $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$، دو عبارت $\tan x$ و $\tan 3x$ تعریف می‌شوند.

راه دوم

$$\tan x\tan 3x=1\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=1$$

$$\Rightarrow \sin x\sin 3x=\cos x\cos 3x$$

$$\Rightarrow \cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x=0$$

با استفاده از اتحاد $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$، داریم:

$$\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x=0\Rightarrow \cos(3x+x)=0$$

$$\Rightarrow \cos 4x=0\Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

۶۸۵- گزینهٔ ۳

$$\sin x=\tan x\Rightarrow \sin x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sin x=\sin x\cos x\Rightarrow \sin x(1-\cos x)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\xrightarrow{0\le x\le 2\pi}x=0,\pi,2\pi\\ 1-\cos x=0\Rightarrow \cos x=1\xrightarrow{0\le x\le 2\pi}x=0,2\pi\end{cases}$$

پس این معادله در این بازه دارای سه جواب 0، π و 2π است. (که همگی در دامنهٔ تانژانت قرار دارند.)

۶۸۶- گزینهٔ ۳ قبل از این‌که معادلهٔ $\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x$ را طرفین وسطین کنیم، حواسمان به مخرج باشد که نباید صفر شود:

$$1-\cos x\neq 0\Rightarrow \cos x\neq 1$$

حالا طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=1-\cos^2 x$$

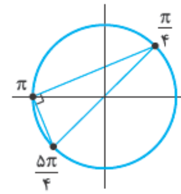
$$\Rightarrow \sin x\cos x=\sin^2 x\Rightarrow \sin x\cos x-\sin^2 x=0$$

$$\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow\begin{cases}\triangleright \sin x=0\\ \triangleright \sin x=\cos x\\ \Rightarrow \tan x=1\end{cases}$$

جواب دو معادلهٔ بالا را در محدودهٔ $[0,2\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$\sin x=0\Rightarrow x=0,\pi,2\pi\quad,\quad \tan x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

در نقاط $x=0$ و $x=2\pi$ تساوی $\cos x=1$ برقرار است. پس این دو از جواب حذف می‌شوند. در نتیجه معادله در این بازه دارای سه جواب π و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ است. آن‌ها را روی دایره مشخص می‌کنیم:



چون یکی از اضلاع مثلث، قطر دایره است پس مثلث قائم‌الزاویه است.

۶۸۷- گزینهٔ ۲ با اتحاد $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$، معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(4x-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

جای $\frac{\sqrt{3}}{2}$، $\cos\frac{\pi}{6}$ قرار می‌دهیم: $\cos 3x=\cos\frac{\pi}{6}$

جواب‌های معادلهٔ $\cos x=\cos A$، به صورت $x=2k\pi\pm A$ هستند، پس:

$$\cos 3x=\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow 3x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{18}$$

$$\Rightarrow x=\frac{12k\pi\pm\pi}{18}$$

حالا جواب‌های در محدودهٔ $[0,\pi]$ را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{(12k-1)\pi}{18}\Rightarrow x=\frac{11\pi}{18}$$

$$x=\frac{(12k+1)\pi}{18}\Rightarrow x=\frac{\pi}{18},\frac{13\pi}{18}$$

پس معادله در این بازه سه جواب دارد.

۶۸۸- گزینهٔ ۴ معادله را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{1+\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=1\Rightarrow 1+\sin x\sin 2x=\cos x\cos 2x$$

$$\Rightarrow 1=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$$

سمت راست تساوی بالا را با اتحاد زیر ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$1=\cos(2x+x)\Rightarrow \cos 3x=1\Rightarrow 3x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ را می‌نویسیم:

$$x=\frac{2k\pi}{3}\Rightarrow x=0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi$$

به ازای جواب‌های به دست آمده، مخرج کسر صفر نمی‌شود پس هر ۴ جواب قابل‌قبول‌اند.

۶۸۹- گزینهٔ ۲

راه اول

$$\sin 2x(\sin x+\cos x)=\cos 2x(\cos x-\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$$

صورت و مخرج معادلات راست را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan(\frac{\pi}{4}-x)$$

حل معادله را ادامه می‌دهیم:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\Rightarrow \tan 2x=\tan(\frac{\pi}{4}-x)$$

جواب‌های معادلهٔ $\tan x=\tan A$، به صورت $x=k\pi+A$ هستند، پس:

$$\tan 2x=\tan(\frac{\pi}{4}-x)\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4}-x$$

$$\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{(4k+1)\pi}{12}$$

جواب‌های در محدودهٔ $[0,\pi]$ را می‌نویسیم:

$$x=\frac{(4k+1)\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{9\pi}{12}$$

مجموعشان برابر است با: $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\frac{15\pi}{12}=\frac{5\pi}{4}$

راه دوم

$$\sin 2x(\sin x+\cos x)=\cos 2x(\cos x-\sin x)$$

$$\Rightarrow \sin 2x\sin x+\sin 2x\cos x=\cos 2x\cos x-\cos 2x\sin x$$

$$\Rightarrow \sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$$

با استفاده از رابطهٔ مجموع کمان‌ها در سینوس و کسینوس داریم:

$$\Rightarrow \sin(2x+x)=\cos(2x+x)\Rightarrow \sin 3x=\cos 3x$$

$$\xrightarrow{\div\cos 3x}\tan 3x=1\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{9\pi}{12}$$

۶۹۰- گزینهٔ ۴

$$\frac{\sin x+\sin 2x}{\cos x+\cos 2x}=\cot x\Rightarrow \frac{\sin x+\sin 2x}{\cos x+\cos 2x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cos^2 x+\cos 2x\cos x=\sin^2 x+\sin 2x\sin x$$

$$\Rightarrow \cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$\cos(2x+x)=-\cos 2x\Rightarrow \cos 3x=-\cos 2x$$

جای $-\cos 2x$، $\cos(\pi-2x)$ را قرار می‌دهیم: $\cos 3x=\cos(\pi-2x)$

جواب معادلهٔ $\cos x=\cos A$، به صورت $x=2k\pi\pm A$ است، پس:

$$\cos 3x=\cos(\pi-2x)\Rightarrow 3x=2k\pi\pm(\pi-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+\pi-2x\\ 3x=2k\pi-\pi+2x\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{(2k+1)\pi}{5}\\ x=(2k-1)\pi\end{cases}$$

به ازای $x=(2k-1)\pi$، مخرج کسر یعنی $\cos x+\cos 2x$، صفر می‌شود، پس این جواب حذف می‌شود و فقط جواب $x=\frac{(2k+1)\pi}{5}$ می‌ماند.

سازمان سنجش، جواب این تست را ۴ زده بود ولی مثلاً به ازای $k=2$، به جواب $x=\pi$ می‌رسیم که باعث می‌شود مخرج صفر شود؛ یعنی بعضی از جواب‌ها قابل‌قبول نیستند و جواب درست این تست در گزینه‌ها نیست!

۶۹۱- گزینهٔ ۱ معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sin\frac{5\pi}{6}+\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\cos x(-\sin x)=0\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۶۹۲- گزینهٔ ۳ با تساوی $\sin 2x=2\sin x\cos x$، معادله به این شکل در می‌آید:

$$\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=0\Rightarrow 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0$$

$$\begin{cases}\sin x = 0\\ 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

جواب‌های دو معادلهٔ بالا را در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ پیدا می‌کنیم:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6}$$

پس این معادله در این بازه، ۳ جواب دارد.

۶۹۳- گزینهٔ ۴ معادله را ساده‌تر می‌کنیم و آن را حل می‌کنیم:

$$\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \tan x \cot x = 2$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

جواب‌های معادلهٔ بالا را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ پیدا می‌کنیم:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

عبارت $\tan x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ تعریف نمی‌شود، پس هر دو جواب به دست آمده، قابل‌قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۶۹۴- گزینهٔ ۳

$$1 + \tan x \tan 2x = 2\sin 2x \Rightarrow 1 + \frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} = 2\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}{\cos x \cos 2x} = 2\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(2x - x)}{\cos x \cos 2x} = 2\sin 2x \Rightarrow \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}\cos 2x} = 2\sin 2x$$

دقت کنید چون عبارت $\cos x$، در صورت و مخرج مشترک بود، پس با حذف آن جوابی حذف نشده است و همچنان باید حواسمان به $\cos x \neq 0$ باشد.

حالا ادامه می‌دهیم: $\frac{1}{\cos 2x} = 2\sin 2x \Rightarrow 2\sin 2x \cos 2x = 1$

$$\Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

جواب به دست آمده را در محدودهٔ $[0, 3\pi]$ قرار می‌دهیم:

$$0 \le x \le 3\pi \Rightarrow 0 \le \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \le 3\pi \xrightarrow{\times\frac{1}{\pi}} 0 \le \frac{k}{2} + \frac{1}{8} \le 3$$

$$\xrightarrow{\times 8} 0 \le 4k + 1 \le 24 \xrightarrow{-1} -1 \le 4k \le 23$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{4}} -\frac{1}{4} \le k \le \frac{23}{4} \Rightarrow -0/25 \le k \le 5/75$$

چون k عددی صحیح است، پس: $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

در نتیجه این معادله در این بازه، ۶ جواب دارد.

۶۹۵- گزینهٔ ۱

با اتحاد $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$، معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4})(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 2} \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

جواب معادلهٔ $\cos x = \cos A$، به صورت $x = 2k\pi \pm A$ است، پس:

$$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۶۹۶- گزینهٔ ۴ برای ساده‌کردن عبارت‌هایی به شکل $a\sin x + b\cos x$، از $\sqrt{a^2 + b^2}$ باید فاکتور بگیریم:

در این صورت عبارت به شکل $\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha)$ در می‌آید. با توجه به نکتهٔ بالا، دو طرف معادله را بر $\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}$$

در سمت چپ تساوی جای $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به ترتیب $\sin\frac{\pi}{6}$ و $\cos\frac{\pi}{6}$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{6} + 2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}\\ 2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = k\pi\\ x = k\pi + \frac{\pi}{3}\end{cases}$$

۶۹۷- گزینهٔ ۴

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 4$$

طرفین معادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x}{\sin x \cos x} = 2$$

جای $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{1}{2}$ به ترتیب $\cos\frac{\pi}{6}$ و $\sin\frac{\pi}{6}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x}{\sin x \cos x} = 2 \Rightarrow \frac{\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x}{\sin x \cos x} = 2$$

$$\Rightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = 2\sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin 2x$$

گفتیم جواب‌های معادلهٔ $\sin x = \sin A$، به صورت $\begin{cases}x = 2k\pi + A\\ x = 2k\pi + \pi - A\end{cases}$ هستند، پس:

$$\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases}2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{6}\\ 2x = 2k\pi + \pi - (x + \frac{\pi}{6})\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}\\ 3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}\\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18}\end{cases}$$

۶۹۸- گزینهٔ ۱

$$\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=(\sin x+\cos x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)=1+\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x+\cos 2x=1+\sin 2x \Rightarrow \cos 2x=1$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi \Rightarrow x=k\pi$$

۶۹۹- گزینهٔ ۳

باد‌واتحاد $2\sin x\cos x=\sin 2x$ و $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

معادله را ساده‌تر می‌کنیم: $2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(2\sin x\cos x)=\sin x+\cos x$$

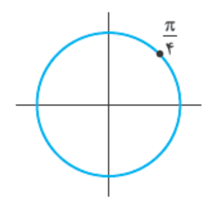
$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{2}}\sin 2x=\cancel{\sqrt{2}}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \sin 2x=\sin(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+x+\frac{\pi}{4} \\ 2x=2k\pi+\pi-(x+\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

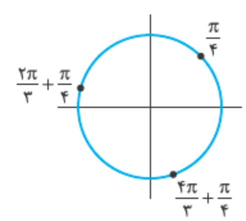
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

جواب هر کدام از معادله‌های بالا را روی یک دایره نشان می‌دهیم:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$



$$x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$



اجتماع دو جواب بالا، همان جواب دوم یعنی $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ است.

۷۰۰- گزینهٔ ۴ از تغییر متغیر $\sin x+\cos x=t$ استفاده می‌کنیم.

طرفین این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم: $(\sin x+\cos x)^2=t^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x\cos x=t^2$$

$$\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=t^2 \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

حالا معادلهٔ اولیه را برحسب t می‌نویسیم:

$$\underbrace{\sin x+\cos x}_{t}-\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{t^2-1}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow t-\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2t-t^2+1=1 \Rightarrow t^2-2t=0$$

$$\Rightarrow t(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}$$

با جای‌گذاری $t=0$ و $t=2$، معادلهٔ $\sin x+\cos x=t$ را حل می‌کنیم:

$$\sin x+\cos x=0 \xrightarrow{\div\cos x} \tan x+1=0$$

$$\Rightarrow \tan x=-1 \xrightarrow{0\le x\le\pi} x=\frac{3\pi}{4}$$

$$\sin x+\cos x=2 \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=2$$

$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}>1 \Rightarrow$ جواب ندارد

پس این معادله در این بازه، فقط یک جواب $x=\frac{3\pi}{4}$ دارد.

۷۰۱- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، می‌توانیم جای $2\cos^2 x$، عبارت $\cos 2x+1$ را قرار دهیم، پس معادله به این شکل در می‌آید:

$$\cos 2x+\underbrace{2\cos^2 x}_{\cos 2x+1}=0 \Rightarrow \cos 2x+\cos 2x+1=0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x=-1 \Rightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}} x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۷۰۲- گزینهٔ ۳ سمت راست معادله را با اتحاد مزدوج، تجزیه می‌کنیم:

$$\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$$

$$\Rightarrow \sin 4x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}$$

$$\Rightarrow \sin 4x=-\cos 2x$$

با روابط 2α، سمت چپ معادله را به شکل $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$ می‌توانیم بنویسیم: $\sin 4x=-\cos 2x \Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=-\cos 2x$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x+\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow \cos 2x(2\sin 2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x=0 \\ \sin 2x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و جواب‌های در بازهٔ $[0,\pi]$ آن‌ها را مشخص می‌کنیم: $\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

$$\xrightarrow{0\le x\le\pi} x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$$

$$\sin 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x=\sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{-\pi}{6} \\ 2x=2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=k\pi-\frac{\pi}{12} \xrightarrow{0\le x\le\pi} x=\frac{11\pi}{12} \\ x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{0\le x\le\pi} x=\frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

مجموع جواب‌های معادله را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{11\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\frac{3\pi+9\pi+11\pi+7\pi}{12}=\frac{30\pi}{12}=\frac{5\pi}{2}$$

۷۰۳- گزینهٔ ۴

از دو اتحاد $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$(1+\tan^2 x)\cos(\pi+2x)=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\times(-\cos 2x)=2 \Rightarrow -\cos 2x=2\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cos 2x+2\cos^2 x=0$$

با استفاده از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ می‌توانیم جای $2\cos^2 x$، از $1+\cos 2x$ استفاده کنیم:

$$\cos 2x+\underbrace{2\cos^2 x}_{1+\cos 2x}=0 \Rightarrow 2\cos 2x+1=0$$

$$\Rightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۷۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\sin x\cos x=\cos^2 x-\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=\underbrace{2\cos^2 x-1}_{\cos 2x} \Rightarrow \sin 2x=\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\div\cos 2x} \tan 2x=1 \Rightarrow \tan 2x=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{4k\pi+\pi}{8}=\frac{(4k+1)\pi}{8}$$

جواب‌های این معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از: $\underset{(k=0)}{\frac{\pi}{8}}, \underset{(k=1)}{\frac{5\pi}{8}}, \underset{(k=2)}{\frac{9\pi}{8}}, \underset{(k=3)}{\frac{13\pi}{8}}$

پس در این بازه چهار جواب دارد.

۷۰۵- گزینهٔ ۲

$$\tan^2 x\cot x+\cos 2x=1$$

$$\Rightarrow \tan x\underbrace{\tan x\cot x}_{1}=\underbrace{1-\cos 2x}_{2\sin^2 x} \Rightarrow \tan x=2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x\cos x-\sin x=0$$

$$\Rightarrow \sin x(\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}-1)=0 \Rightarrow \sin x(\sin 2x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi\\ \sin 2x=1 \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

عبارت $\cot x$ در $x=k\pi$، تعریف نمی‌شود پس فقط جواب $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ قابل‌قبول است.

۷۰۶- گزینهٔ ۴

$$\cos 2x+\cos x=\sin x \Rightarrow \cos 2x+\cos x-\sin x=0$$

$$\Rightarrow (\cos^2 x-\sin^2 x)+(\cos x-\sin x)=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد مزدوج}}$$

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)=0$$

حالا از $\cos x-\sin x$، فاکتور می‌گیریم:

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+1)=0$$

معادلهٔ بالا تبدیل به دو معادله می‌شود و جواب‌های هر کدام را در بازهٔ $[0,2\pi]$ حساب می‌کنیم:

$$\cos x-\sin x=0 \xrightarrow{\div\cos x} 1-\tan x=0$$

$$\Rightarrow \tan x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

$$\underbrace{\cos x+\sin x}_{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}+1=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{-\pi}{4}\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{4})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}\\ x=(2k+1)\pi \Rightarrow x=\pi\end{cases}$$

پس این معادله در این بازه دارای چهار جواب $\frac{\pi}{4}$، $\frac{5\pi}{4}$، $\frac{3\pi}{2}$ و π است.

۷۰۷- گزینهٔ ۴

$$2\sin x(\cos x+\sin x)=1 \Rightarrow 2\sin x\cos x+2\sin^2 x=1$$

$$2\sin x\cos x=1-2\sin^2 x \Rightarrow \sin 2x=\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\div\cos 2x} \tan 2x=1 \Rightarrow \tan 2x=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

۷۰۸- گزینهٔ ۱

$$2\cos x\cos 3x=1+\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}_{\cos 2x}$$

$$\Rightarrow 2\cos x\cos 3x=1+\cos 2x$$

$$2\cos x\cos 3x=2\cos^2 x \Rightarrow \cos x\cos 3x-\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow \cos x(\cos 3x-\cos x)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \cos 3x-\cos x=0\end{cases}$$

جواب‌های هر دو معادلهٔ بالا را در بازهٔ $[0,2\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos 3x-\cos x=0 \Rightarrow \cos 3x=\cos x$$

$$\Rightarrow 3x=2k\pi\pm x \Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+x\\ 3x=2k\pi-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=k\pi \Rightarrow x=0,\pi,2\pi\\ x=\frac{k\pi}{2} \Rightarrow x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\end{cases}$$

جواب‌های تکراری را یک بار می‌نویسیم. مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$0+\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3\pi}{2}+2\pi=5\pi$$

۷۰۹- گزینهٔ ۴

$$\cos^2 x+\cos^2 3x=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x+\cos^2 3x=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2 x+\cos^2 3x=1$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ داریم:

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}=1 \xrightarrow{\times 2}$$

$$1+\cos 2x+1+\cos 6x=2 \Rightarrow \cos 6x=-\cos 2x$$

$$\cos 6x=\cos(\pi+2x) \Rightarrow 6x=2k\pi\pm(\pi+2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}6x=2k\pi+\pi+2x\\ 6x=2k\pi-\pi-2x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ 8x = 2k\pi-\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in[0,\pi]} \begin{cases} x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\end{cases}$$

پس این معادله در بازهٔ $[0,\pi]$، دارای ۶ جواب $\frac{\pi}{8}$، $\frac{5\pi}{8}$، $\frac{3\pi}{4}$، $\frac{\pi}{4}$، $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{7\pi}{8}$ است.

۷۱۰- گزینهٔ ۳

$$\sin t(2\sin t+3)=2 \Rightarrow 2\sin^2 t+3\sin t-2=0$$

دلتا را حساب می‌کنیم: $\Delta=b^2-4ac=3^2-4(2)(-2)=25$

مقدار $\sin t$ برابر است با:

$$\sin t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm5}{4} \Rightarrow \begin{cases}\sin t=-2 \quad \times \\ \sin t=\frac{1}{2}\end{cases}$$

جواب‌های معادلهٔ $\sin t=\frac{1}{2}$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin t=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin t=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} t=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ t=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ t=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

۷۱۱- گزینهٔ ۱ معادله را ساده‌تر می‌کنیم و آن را حل می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+3\sin x\cot x=\sin\pi$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+3\cancel{\sin x}.\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}=0 \Rightarrow 2\sin^2 x+3\cos x=0$$

با تساوی $\sin^2 x=1-\cos^2 x$، معادله را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم:

$$2\sin^2 x+3\cos x=0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$$

$$\Rightarrow 2-2\cos^2 x+3\cos x=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0$$

دلتا را حساب می‌کنیم: $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(-2)=25$

حالا مقدار $\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$\cos x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm5}{4} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=2 \quad \times \\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

جواب‌های معادلهٔ $\cos x=-\frac{1}{2}$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به صورت $\pm\frac{2\pi}{3}$ است که مجموعشان صفر می‌شود.

۷۱۲- گزینهٔ ۱ معادله را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم و یک معادلهٔ درجه‌دوم حل می‌کنیم. باید جای $\sin^2 x$، $1-\cos^2 x$ قرار دهیم:

$$2\sin^2 x-\cos x-1=0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$$

$$\Rightarrow 2-2\cos^2 x-\cos x-1=0 \Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}\cos x=-1 \\ \cos x=-\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

جواب‌های هر دو معادله را در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ می‌نویسیم:

$$\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi \quad , \quad \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}$$

پس مجموع جواب‌ها در این بازه برابر است با: $\pi+\frac{5\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$

۷۱۳- گزینهٔ ۳

$$2\cos 2x=\cot x(4\sin x+\tan x)$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x=\frac{\cos x}{\sin x}(4\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}) \Rightarrow 2\cos 2x=4\cos x+1$$

برای $\cos 2x$، سه تساوی معروف داریم. از تساوی که فقط برحسب $\cos x$ است، یعنی $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده می‌کنیم و معادله را به یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب $\cos x$ تبدیل می‌کنیم:

$$2\cos 2x=4\cos x+1 \Rightarrow 2(2\cos^2 x-1)=4\cos x+1$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x-4\cos x-3=0$$

$$\Rightarrow (2\cos x-3)(2\cos x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{3}{2} \quad \times \\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

معادلهٔ دوم را حل می‌کنیم: $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۷۱۴- گزینهٔ ۴ از اتحاد $\cos 2x=1-2\sin^2 x$، داریم:

$$\cos 2x=\sin x \Rightarrow 1-2\sin^2 x=\sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}\sin x=-1 \\ \sin x=-\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

هر دو معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

$$\sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}=2k\pi+\frac{9\pi}{6} \Rightarrow i=9$$

$$\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow i=1 \\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \Rightarrow i=5\end{cases}$$

با مقایسهٔ سه جواب به دست آمده با جواب $x=2k\pi+\frac{i\pi}{6}$، مقدار i باید ۹، ۱ و ۵ باشد.

۷۱۵- گزینهٔ ۳ $\cos 4x$ و $\cos^2 x$ را برحسب $\cos 2x$ می‌نویسیم:

$$\underbrace{2\cos^2 x}_{1+\cos 2x}+\underbrace{\cos 4x}_{\cos 2(2x)}=3 \Rightarrow 1+\cos 2x+2\cos^2 2x-1=3$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x-3=0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \begin{cases}\cos 2x=1 \Rightarrow 2x=2k\pi \Rightarrow x=k\pi \\ \cos 2x=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2} \ (\text{جواب ندارد})\end{cases}$$

جواب‌های $k\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$، عبارت‌اند از: $2\pi,\pi,0$

پس این معادله در این بازه ۳ جواب دارد.

۷۱۶- گزینهٔ ۱ سمت چپ را با اتحاد مربع ساده می‌کنیم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\cos 4x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=\cos 4x$$

$$\Rightarrow ۱-\cos ۴x+\sin ۲x=۰$$

با اتحاد $۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^{۲}\alpha$، داریم:

$$\underbrace{۱-\cos ۴x}_{۲\sin^{۲} ۲x}+\sin ۲x=۰ \Rightarrow ۲\sin^{۲} ۲x+\sin ۲x=۰$$

از $\sin ۲x$ فاکتور می‌گیریم: $\sin ۲x(۲\sin ۲x+۱)=۰$

حاصل‌ضرب دو عبارت، صفر شده، پس هر کدام می‌توانند صفر باشند:

(۱) $\sin ۲x=۰ \Rightarrow ۲x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}$

جواب‌های در محدودهٔ $[۰,\pi]$ عبارتند از: $۰,\frac{\pi}{۲},\pi$

(۲) $\sin ۲x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲x=\sin(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} \\ ۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲} \\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} \end{cases}$$

حالا جواب‌های در محدودهٔ $[۰,\pi]$ را می‌نویسیم:

$$k\pi-\frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{[۰,\pi]} \frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

$$k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} \xrightarrow{[۰,\pi]} \frac{۷\pi}{۱۲}$$

پس این معادله ۵ جواب در محدودهٔ $[۰,\pi]$ دارد.

۷۱۷- گزینهٔ ۲ معادله را ساده می‌کنیم و آن را حل می‌کنیم:

$$\sin(\frac{\pi+۲x}{۲})+۲\sin(\frac{۲\pi+x}{۲})=۱ \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+x)+۲\sin(\pi+\frac{x}{۲})=۱$$

$$\cos x-۲\sin\frac{x}{۲}=۱ \Rightarrow -۲\sin\frac{x}{۲}=۱-\cos x$$

از اتحاد $۱-\cos x=۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$-۲\sin\frac{x}{۲}=۱-\cos x \Rightarrow -۲\sin\frac{x}{۲}=۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^{۲}\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}=۰ \Rightarrow \sin\frac{x}{۲}(\sin\frac{x}{۲}+۱)=۰$$

معادلهٔ بالا به دو معادله تبدیل می‌شود. هر کدام را حل و جواب‌های در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sin\frac{x}{۲}=۰ \Rightarrow \frac{x}{۲}=k\pi \Rightarrow x=۲k\pi \Rightarrow x=۰,۲\pi$$

$$\sin\frac{x}{۲}=-۱ \Rightarrow \frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$$

$\Rightarrow x=۴k\pi+۳\pi \Rightarrow$ جواب ندارد

پس این معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، دارای دو جواب $x=۰$ و $x=۲\pi$ است.

۷۱۸- گزینهٔ ۴ دو زاویهٔ $x-\frac{\pi}{۸}$ و $x-\frac{۵\pi}{۸}$ با هم $\frac{\pi}{۲}$ اختلاف دارند. با استفاده از تساوی‌های $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ و $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$، داریم:

$$\cos(x-\frac{۵\pi}{۸})=\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=\cos(\frac{\pi}{۲}+(\frac{\pi}{۸}-x))$$

$$=-\sin(\frac{\pi}{۸}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{۸})$$

با جای‌گذاری تساوی بالا، معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$۲\sin^{۲}(x-\frac{\pi}{۸})+۳\underbrace{\cos(x-\frac{۵\pi}{۸})}_{\sin(x-\frac{\pi}{۸})}=۵$$

$$\Rightarrow ۲\sin^{۲}(x-\frac{\pi}{۸})+۳\sin(x-\frac{\pi}{۸})-۵=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \begin{cases} \sin(x-\frac{\pi}{۸})=۱ \\ \sin(x-\frac{\pi}{۸})=\frac{c}{a}=-\frac{۵}{۲} \quad \times \end{cases}$$

معادلهٔ دوم جواب ندارد. معادلهٔ اول را حل می‌کنیم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{۸})=۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸}$$

تنها جواب این معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، $x=\frac{۵\pi}{۸}$ است.

۷۱۹- گزینهٔ ۲ اگر $\tan x=A$ باشد، آن‌وقت $\cot x=\frac{۱}{A}$.

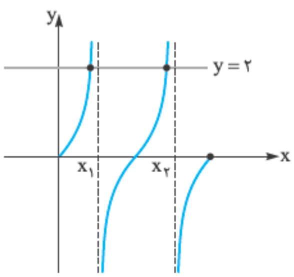
با جای‌گذاری دو تساوی بالا در معادله داریم:

$$\tan x+۴\cot x=۴ \Rightarrow A+۴(\frac{۱}{A})=۴$$

$$\xrightarrow{\times A} A^{۲}+۴=۴A \Rightarrow A^{۲}-۴A+۴=۰$$

$$\Rightarrow (A-۲)^{۲}=۰ \Rightarrow A=۲$$

پس باید معادلهٔ $\tan x=۲$ را حل کنیم. نمودار توابع $y=\tan x$ و $y=۲$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم:



دو نمودار همدیگر را در دو نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع می‌کنند، پس معادله ۲ جواب دارد.

۷۲۰- گزینهٔ ۱ $\sin x=۱-\cos x \Rightarrow \sin x+\cos x=۱$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi \\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

جواب‌های در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ را می‌نویسیم:

$$x=۲k\pi \Rightarrow x=۰$$

$$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$$

پس معادله در این بازه، ۲ جواب دارد.

۷۲۱- گزینهٔ ۱ دو زاویهٔ $x-\frac{۳\pi}{۸}$ و $x+\frac{\pi}{۸}$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ با هم اختلاف دارند. با استفاده از اتحاد $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ داریم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۸})=\sin(x-\frac{۳\pi}{۸}+\frac{\pi}{۲})=\sin(\frac{\pi}{۲}+(x-\frac{۳\pi}{۸}))$$

$$=\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})$$

با جای‌گذاری تساوی بالا، معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$\underbrace{\sin(x+\frac{\pi}{۸})}_{\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})}+\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱ \Rightarrow ۲\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱$$

$$\Rightarrow \cos(x-\frac{3\pi}{8})=\frac{1}{2}$$

جای $\frac{1}{2}$، $\cos\frac{\pi}{3}$ قرار می‌دهیم از طرفی جواب معادلهٔ $\cos x=\cos A$ به صورت $x=2k\pi\pm A$ بود، پس:

$$\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x-\frac{3\pi}{8}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{17\pi}{24} \\ x=2k\pi+\frac{\pi}{24} \end{cases}$$

جواب‌های در محدودهٔ $[0,2\pi]$ را می‌نویسیم:

$$x=2k\pi+\frac{17}{24}\pi \xrightarrow{k=0} x=\frac{17\pi}{24}$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{24} \xrightarrow{k=0} x=\frac{\pi}{24}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با: $\frac{17\pi}{24}+\frac{\pi}{24}=\frac{18}{24}\pi=\frac{3}{4}\pi$

۷۲۲- گزینهٔ ۲ از رابطهٔ $\cot x-\tan x=2\cot 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan x=\cot x+2\sqrt{3} \Rightarrow \cot x-\tan x=-2\sqrt{3}$$

$$2\cot 2x=-2\sqrt{3} \Rightarrow \cot 2x=-\sqrt{3} \Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$$

۷۲۳- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\cot x-\tan x=2\cot 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$2\tan 2x+\tan x=\cot x \Rightarrow 2\tan 2x=\underbrace{\cot x-\tan x}_{2\cot 2x}$$

$$\Rightarrow 2\tan 2x=2\cot 2x \Rightarrow \tan 2x=\cot 2x$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan^2 2x=1$$

جواب کلی معادلات $\sin^2 x=\sin^2 A$، $\cos^2 x=\cos^2 A$ و $\tan^2 x=\tan^2 A$ به صورت $k\pi\pm A$ هستند.

پس در این‌جا داریم:

$$\xrightarrow{\tan\frac{\pi}{4}=1} \tan^2 2x=\tan^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$$

۷۲۴- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan x=4\cos 2x-\cot x \Rightarrow \underbrace{\tan x+\cot x}_{\frac{2}{\sin 2x}}=4\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x}=4\cos 2x \Rightarrow 4\sin 2x\cos 2x=2$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=1 \Rightarrow \sin 2(2x)=1$$

$$\Rightarrow \sin 4x=1 \Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

۷۲۵- گزینهٔ ۱ اگر در سمت چپ تساوی از اتحاد $\cot x-\tan x=2\cot 2x$ استفاده کنیم، قیافهٔ معادله خیلی جمع‌وجور می‌شود:

$$\underbrace{2\cot 2x}_{\cot x-\tan x}+\tan x=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cot x-\tan x+\tan x=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cot x=\cos^2 x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cos x=\cos^2 x\sin x \Rightarrow \cos^2 x\sin x-\cos x=0$$

$$\cos x(\sin x\cos x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \\ \sin x\cos x-1=0 \end{cases}$$

هر دو معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم و جواب‌های در محدودهٔ $[0,2\pi]$ آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

چون $\tan x$ در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$، تعریف نمی‌شود پس هر دو جواب غیرقابل‌قبول‌اند.

$$\sin x\cos x-1=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin(2x)-1=0$$

$$\Rightarrow \sin 2x=2 \text{ (نمی‌شه!)}$$

پس معادلهٔ دوم هم جواب ندارد و معادله در کل هیچ جوابی ندارد.

۷۲۶- گزینهٔ ۲ برای حل از رابطهٔ $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{معادله:} \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=3\tan x \xrightarrow{\tan x\neq 0} \frac{2}{1+\tan^2 x}=3$$

$$\Rightarrow 1-\tan^2 x=\frac{2}{3} \Rightarrow \tan^2 x=\frac{1}{3} \Rightarrow \tan x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6} \xrightarrow{x\in(0,\frac{5\pi}{2})} x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6},\frac{13\pi}{6}$$

همچنین باید معادلهٔ $\tan x=0$ را حل کنیم:

$$\tan x=0 \xrightarrow{x\in(0,\frac{5\pi}{2})} x=\pi,2\pi$$

پس معادله در مجموع ۷ جواب دارد.

۷۲۷- گزینهٔ ۲

با دو اتحاد $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ و $\cot(\frac{3\pi}{2}-x)=\tan x$، معادله را ساده‌تر می‌نویسیم و حلش می‌کنیم:

$$\frac{\cot(\frac{3\pi}{2}-x)}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\tan x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \tan x.\cos^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\times\cos^2 x=\frac{1}{4}$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\sin A$، به صورت $\begin{cases} x=2k\pi+A \\ x=2k\pi+\pi-A \end{cases}$ هستند، پس:

$$\sin 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{12} \\ x=k\pi+\frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

۷۲۸- گزینهٔ ۲ سمت راست معادله را با اتحاد $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan(\frac{\pi}{4}-x)$، ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan 3x \Rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{4}-x)$$

جواب معادلهٔ $\tan x = \tan A$، به صورت $x = k\pi + A$ است، پس:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

۷۲۹- گزینهٔ ۳

$$\tan 3x + \tan x + \sqrt{3}\tan 3x \tan x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 3x + \tan x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan x \tan 3x$$

سمت راست از $\sqrt{3}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\tan x + \tan 3x = \sqrt{3}(1 - \tan x \tan 3x)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan 3x}{1 - \tan x \tan 3x} = \sqrt{3}$$

سمت چپ تساوی، بازشدهٔ $\tan(x+3x)$ است، پس:

$$\tan(x+3x) = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 4x = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,\pi)} x = \frac{\pi}{12}, \frac{4\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{10\pi}{12}$$

اما به ازای $x = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$، $\tan 3x$ تعریف نمی‌شود پس معادله ۳ جواب حقیقی دارد.

۷۳۰- گزینهٔ ۱ با اتحاد $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$، سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\tan(x+\frac{\pi}{4}) + \tan(x-\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan\frac{\pi}{4}} + \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+\tan x)^2 - (1-\tan x)^2}{(1-\tan x)(1+\tan x)} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1 + 2\tan x + \tan^2 x - 1 + 2\tan x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4\tan x}{1-\tan^2 x} = 2\sqrt{3} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$$

عبارت $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$، همان $\tan 2x$ است، پس:

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{3}$$

جواب معادلهٔ $\tan x = \tan A$ به صورت $x = k\pi + A$ است، پس:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۷۳۱- گزینهٔ ۴ مقدار حداقلِ عبارت $3 + \sin^2 x$ برابر با ۳ است:

$$0 \le \sin^2 x \le 1 \xrightarrow{+3} 3 \le 3 + \sin^2 x \le 4$$

حداکثر مقدار کسینوس یک زاویه هم عدد یک است، پس حداکثر عبارت $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$ برابر با ۳ است.

تساوی را به‌صورت مقابل ببینید: $\underbrace{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}_{\le 3} = \underbrace{3 + \sin^2 x}_{\ge 3}$

برای آن‌که تساوی برقرار باشد، فقط یک حالت وجود دارد؛ باید $\sin^2 x$ صفر باشد و هر کدام از کسینوس‌ها ۱ باشند.

جواب‌های معادلهٔ $\sin x = 0$ در بازهٔ $[\pi, 5\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi\}$$

از بین این جواب‌ها، آن‌هایی قابل‌قبول‌اند که هر سه عبارت $\cos x$، $\cos 2x$، $\cos 3x$ به ازای آن‌ها ۱ شوند:

	π	2π	3π	4π	5π
$\cos x$	-1	1	-1	1	-1
$\cos 2x$	1	1	1	1	1
$\cos 3x$	-1	1	-1	1	-1

پس فقط 2π و 4π قابل‌قبول‌اند.

۷۳۲- گزینهٔ ۱ **راه اول** از آن‌جا که $-1 \le \cos x \le 1$ است؛ بنابراین معادله زمانی جواب دارد که $\cos x$ و $\cos 2x$ هر دو ۱ یا هر دو ۱- باشند.

$$(1)\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \text{و} \\ \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \\ \Rightarrow x = k\pi \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 2k\pi$$

$$(2)\begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ \text{و} \\ \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \\ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

پس جواب کلی معادله برابر $2k\pi$ است.

راه دوم با اتحاد $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ معادله را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم:

$$\cos x \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos x(2\cos^2 x - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^3 x - \cos x - 1 = 0$$

با تغییر متغیر $\cos x = t$، معادله به شکل $2t^3 - t - 1 = 0$ در می‌آید.

جمع ضرایب صفر است پس عبارت سمت چپ بر $t - 1$ بخش‌پذیر است:

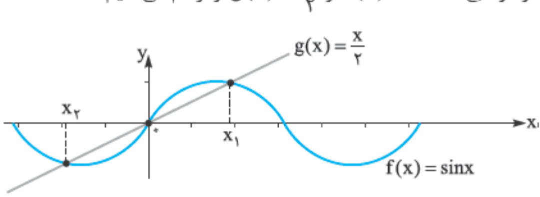
$$2t^3 - t - 1 = 0 \Rightarrow (t-1)(2t^2 + 2t + 1) = 0$$

دلتای پرانتز دوم منفی است، پس جواب حقیقی ندارد. تنها جواب این معادله $t = 1$ است، پس:

$$t = 1 \xrightarrow{\cos x = t} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

۷۳۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ $2\sin x = x$ را به شکل $\sin x = \frac{x}{2}$ می‌نویسیم.

نمودار دو تابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \frac{x}{2}$ را رسم می‌کنیم:



این دو نمودار در سه نقطه به طول‌های x_1، ۰ و x_2 یکدیگر را قطع می‌کنند، پس معادله ۳ جواب دارد.

۷۳۴- گزینهٔ ۳ اول معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$x\sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow x(2\sin x\cos x) - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x(2x\sin x - 1) = 0$$

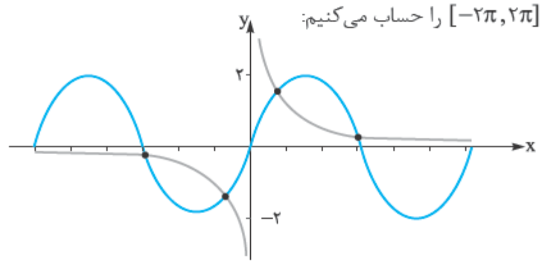
معادلهٔ بالا به دو معادله تبدیل می‌شود:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{-2\pi \le x \le 2\pi}$$

چهار جواب $\Rightarrow -\frac{۳\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$

$$۲x\sin x-۱=۰ \Rightarrow ۲\sin x=\frac{۱}{x}$$

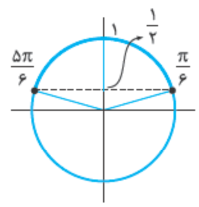
برای پیداکردن جواب‌های معادلهٔ $۲\sin x=\frac{۱}{x}$، نمودار دو تابع $f(x)=۲\sin x$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ را می‌کشیم و تعداد نقاط برخوردشان در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ را حساب می‌کنیم:



دو نمودار در این بازه در ۴ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.
از آن‌جا که این جواب‌ها با چهار جواب قبلی اشتراک ندارند پس این معادله در کل دارای $۴+۴=۸$ جواب است.

۷۳۵- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $۲\sin x+k=۰$، داریم: $\sin x=-\frac{k}{۲}$

حالا با توجه به محدودهٔ $\frac{\pi}{۶}\le x\le\frac{۵\pi}{۶}$، مقادیر عبارت $\sin x$ را تعیین می‌کنیم. از دایرهٔ مثلثاتی کمک می‌گیریم:



$$\frac{\pi}{۶}\le x\le\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\le\sin x\le ۱$$

پس: $\frac{۱}{۲}\le-\frac{k}{۲}\le ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲\le k\le -۱$

۷۳۶- گزینهٔ ۲ اگر اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ را بلد باشید، سؤال سریع‌تر حل می‌شود ولی اگر بلد نباشید کافی است تانژانت و کتانژانت را برحسب سینوس و کسینوس بنویسید و مخرج‌مشترک بگیرید:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{۱}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=\frac{۲}{\sin ۲x}$$

پس:

$$\tan x+\cot x=k-۱ \Rightarrow \frac{۲}{\sin ۲x}=k-۱$$

$$\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۲}{k-۱}$$

از آن‌جایی که $-۱\le\sin ۲x\le ۱$، پس:

$$-۱\le\frac{۲}{k-۱}\le ۱ \Rightarrow \left|\frac{۲}{k-۱}\right|\le ۱ \xrightarrow{k\neq ۱} ۲\le|k-۱|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-۱\ge ۲ \Rightarrow k\ge ۳ \\ k-۱\le -۲ \Rightarrow k\le -۱\end{cases}$$

پس $k\ge ۳$ یا $k\le -۱$ است.

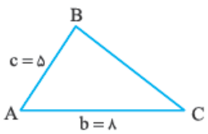
۷۳۷- گزینهٔ ۲ مساحت دایره را داریم. با کمک آن مقدار شعاع را می‌یابیم: $S=\pi r^۲ \Rightarrow ۳۶\pi=\pi r^۲ \Rightarrow r=۶$

زاویهٔ مرکزی برابر ۳ رادیان است؛ پس طول کمان روبه‌روی آن با استفاده از رابطهٔ $\ell=r\theta$ برابر است با: $\ell=۶\times ۳=۱۸$

۷۳۸- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع $y=|\cos ax|$ برابر با $T=\frac{\pi}{|a|}$ است، پس در این‌جا که دورهٔ تناوب این تابع ۲π شده است، داریم:

$$T=\frac{\pi}{|a|} \Rightarrow ۲\pi=\frac{\pi}{|a|} \Rightarrow ۲=\frac{۱}{|a|} \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

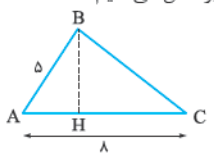
۷۳۹- گزینهٔ ۲ شکل مسئله به صورت روبه‌رو است:



مساحت مثلث برابر ۱۶ است، در نتیجه:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۵)(۸)\sin A=۱۶ \Rightarrow \sin A=\frac{۴}{۵}$$

حالا برای محاسبهٔ ضلع سوم مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\sin\hat{A}=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{BH}{۵} \Rightarrow BH=۴$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH طول AH برابر است با:

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲ \Rightarrow ۵^۲=AH^۲+۴^۲$$

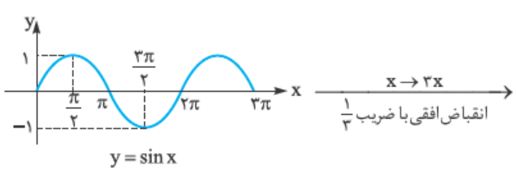
$$\Rightarrow AH=۳ \xrightarrow{AC=۸} CH=۵$$

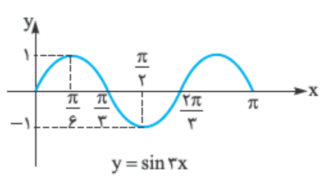
در نهایت در مثلث BCH با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BH^۲+CH^۲=BC^۲ \Rightarrow ۴^۲+۵^۲=BC^۲$$

$$\Rightarrow BC^۲=۴۱ \Rightarrow BC=\sqrt{۴۱}$$

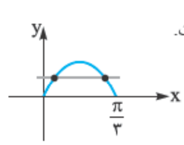
۷۴۰- گزینهٔ ۳ در نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}\sin ۳x+۱$، عدد ۱ باعث می‌شود نمودار ۱ واحد به بالا برود و ضریب $\frac{۱}{۲}$ پشت $\sin ۳x$ باعث می‌شود تابع در راستای عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض شود، پس هر دوی آن‌ها نقشی در یک‌به‌یک بودن یا نبودن تابع ندارند. در نتیجه ما جای $y=\frac{۱}{۲}\sin ۳x+۱$، با تابع $y=\sin ۳x$ کار می‌کنیم. اول نمودارش را می‌کشیم:



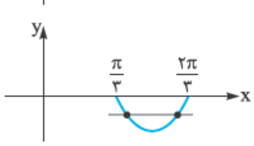


در هر کدام از این بازه‌ها اگر یک خط افقی تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند تابع یک‌به‌یک نیست.

(۱) $۰\le x\le\frac{\pi}{۳}$

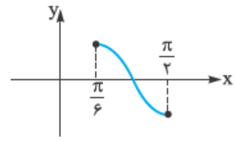


(۲) $\frac{\pi}{۳}\le x\le\frac{۲\pi}{۳}$

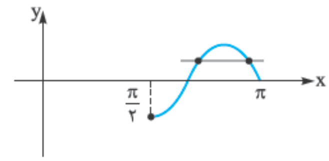


خیلی سبز!

③ $\frac{\pi}{۶} \le x \le \frac{\pi}{۲}$



④ $\frac{\pi}{۲} \le x \le \pi$



پس فقط در بازهٔ ③ این تابع یک‌به‌یک است.

-۷۴۱ گزینهٔ ۲

$(۱)\ \cot\alpha+\cos\alpha<۰ \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha<۰$

$\Rightarrow \frac{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}<۰$

$\Rightarrow \frac{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)}{\sin\alpha}<۰ \Rightarrow \cot\alpha(۱+\sin\alpha)<۰$

می‌دانیم عبارت $۱+\sin\alpha$ همواره نامنفی است، پس باید:

$\cot\alpha<۰ \Rightarrow$ انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم یا چهارم است

$(۲)\ \cos\alpha\cot\alpha>۰ \Rightarrow \cos\alpha(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})>۰$

$\Rightarrow \frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha}>۰ \Rightarrow \sin\alpha>۰$

انتهای کمان α در نواحی اول و دوم قرار دارد.

پس انتهای کمان α در اشتراک ناحیه‌ها یعنی ناحیهٔ دوم قرار دارد.

-۷۴۲ گزینهٔ ۲

با تغییر متغیر $\cos x=t$، معادلهٔ $۲\cos^۳x+۳\cos x-۵=۰$ به صورت $۲t^۳+۳t-۵=۰$ در می‌آید. چون جمع ضرایب صفر است، پس $t=۱$ ریشهٔ معادله است و عبارت سمت چپ بر $t-۱$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{l|l} ۲t^۳+۳t-۵ & t-۱ \\ \hline -\ \ ۲t^۳+۲t^۲ & ۲t^۲+۲t+۵ \\ \hline ۲t^۲+۳t-۵ & \\ -۲t^۲+۲t & \\ \hline ۵t-۵ & \\ -۵t+۵ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

پس معادله به صورت $(t-۱)(۲t^۲+۲t+۵)=۰$ در می‌آید. ریشهٔ هر دو پرانتز را حساب می‌کنیم:

$t-۱=۰ \Rightarrow t=۱$

$۲t^۲+۲t+۵=۰ \xrightarrow{\Delta<۰}$ ریشهٔ حقیقی ندارد

پس فقط معادلهٔ $\cos x=۱$ را باید حل کنیم که جوابش $x=۲k\pi$ است و در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای ۲ جواب ۰ و ۲π است.

با توجه به این‌که حداکثر مقدار $\cos x$ برابر ۱ است، حداکثر مقدار عبارت طرف چپ برابر ۵ است. پس معادله زمانی جواب دارد که:

$\cos x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x=۰\,, x=۲\pi$

-۷۴۳ گزینهٔ ۳ از آن‌جا که مقدار $\tan ۲۰^\circ$ را داریم، تمام نسبت‌ها را باید برحسب کمان ۲۰° بنویسیم:

$\sin(۲۵۰^\circ)=\sin(\overbrace{\underset{\frac{۳\pi}{۲}}{۲۷۰^\circ}-۲۰^\circ}^{\text{سوم}})=-\cos ۲۰^\circ$

$\sin(۷۰۰^\circ)=\sin(\underset{۴\pi}{\cancel{۴(۱۸۰^\circ)}}-۲۰^\circ)=\sin(-۲۰^\circ)=-\sin ۲۰^\circ$

$\cos(۵۶۰^\circ)=\cos(\underset{\pi}{\cancel{۳(۱۸۰^\circ)}}+۲۰^\circ)=-\cos ۲۰^\circ$

$\cos(۱۱۰^\circ)=\cos(\overbrace{\underset{\frac{\pi}{۲}}{۹۰^\circ}+۲۰^\circ}^{\text{دوم}})=-\sin ۲۰^\circ$

پس کسر داده‌شده به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

عبارت $=\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}$

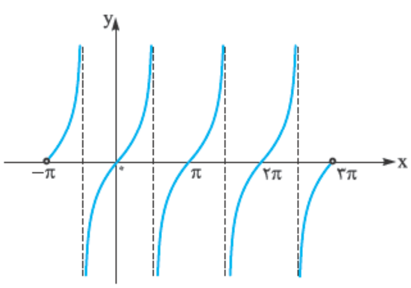
حالا صورت و مخرج را بر $\cos ۲۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

عبارت $=\dfrac{\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}=\frac{-۱-\tan ۲۰^\circ}{-۱+\tan ۲۰^\circ}$

با توجه به این‌که $\tan ۲۰^\circ=۰/۴$، داریم:

عبارت $=\frac{-۱-۰/۴}{-۱+۰/۴}=\frac{-۱/۴}{-۰/۶}=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}$

-۷۴۴ گزینهٔ ۳ **راه اول** نمودار تابع $y=\tan x$ را در بازهٔ $(-\pi,۳\pi)$ می‌کشیم:



پس در این بازه، تابع $y=\tan x$، در سه نقطه به طول‌های ۰، π و ۲π محور xها را قطع می‌کند.

راه دوم طول نقاط برخورد تابع $y=\tan x$ با محور xها، جواب‌های معادلهٔ $\tan x=۰$ است. چون $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، پس برای آن‌که $\tan x=۰$ باشد، کافی است $\sin x=۰$ باشد. جواب‌های $\sin x=۰$، مضارب صحیح π هستند که در این بازه ۰، π و ۲π می‌باشد.

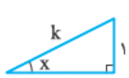
-۷۴۵ گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنیم که: $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\sin x$

پس باید با استفاده از اطلاعات داده‌شده مقدار $\sin x$ را بیابیم:

$\sin x=\frac{۱}{۲}\cos x \xrightarrow{\div\cos x} \tan x=\frac{۱}{۲}$

حالا با روش مثلث مقدار $\sin x$ را محاسبه می‌کنیم. فقط توجه داشته باشید که چون انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم است: $\sin x<۰$

$\tan x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow$



$\Rightarrow k^۲=۱^۲+۲^۲=۵ \Rightarrow k=\sqrt{۵} \Rightarrow \sin x=-\frac{۱}{k} \Rightarrow \sin x=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

بنابراین: $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-(-\frac{۱}{\sqrt{۵}})=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

۷۴۶- گزینهٔ ۴ **راه اول** از رابطهٔ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\cos^4 x}+\frac{A}{\cos^2 x}=\tan^4 x-1 \xrightarrow{\frac{1}{\cos^4 x}=(\frac{1}{\cos^2 x})^2}$$

$$(1+\tan^2 x)^2+A(1+\tan^2 x)=\tan^4 x-1$$

$$\Rightarrow 1+\tan^4 x+2\tan^2 x+A+A\tan^2 x=\tan^4 x-1$$

$$\Rightarrow \tan^4 x+(2+A)\tan^2 x+A+1=\tan^4 x-1$$

چون در طرف راست، $\tan^2 x$ نداریم، پس ضریب آن در طرف چپ، یعنی $(2+A)$ باید صفر باشد. از طرفی چون عدد ثابت طرف راست برابر -1 است، بنابراین عدد ثابت طرف چپ، یعنی $(A+1)$، نیز باید (-1) باشد؛

پس:
$$\begin{cases}2+A=0 \Rightarrow A=-2\\ A+1=-1 \Rightarrow A=-2\end{cases} \Rightarrow A=-2$$

راه دوم چون تساوی داده‌شده یک اتحاد است، پس باید به ازای مقدار دلخواه $x=0$ نیز برقرار باشد:

$x=0$: عبارت $=\frac{1}{1}+\frac{A}{1}=0-1 \Rightarrow A=-2$

۷۴۷- گزینهٔ ۲ اول $\sin\frac{7\pi}{12}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12})=\cos\frac{\pi}{12}$$

در نتیجه:
$$\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$

حال از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

۷۴۸- گزینهٔ ۳

$\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$ و $\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$.

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم: $\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=1 \Rightarrow -2\cot 2(\frac{x}{2})=1$

$$\Rightarrow -2\cot x=1 \Rightarrow \cot x=-\frac{1}{2}$$

پس: $\tan x=-2$

حالا مقدار $\tan 2x$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(-2)}{1-(-2)^2}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

۷۴۹- گزینهٔ ۴ *اول ببینیم مسئله چی می‌خواد؟!*

$$\sin(2x-\frac{3\pi}{2})=\sin(-(\frac{3\pi}{2}-2x))=-\sin(\frac{3\pi}{2}-2x)$$
$$=-(-\cos 2x)=\cos 2x$$

حالا تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم:
$$\begin{cases}\sin(\pi-x)=\sin x\\ \cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x\end{cases}$$

تساوی: $2\sin x-(-\sin x)=1 \Rightarrow 3\sin x=1 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{3}$

چون $\cos 2x$ را می‌خواهیم و مقدار $\sin x$ را داریم، پس از رابطهٔ $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2x=1-2(\frac{1}{3})^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

۷۵۰- گزینهٔ ۳ با دو اتحاد زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)=\sin(\underbrace{2\pi}_{\text{حذف}}+\frac{\pi}{2}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$$

پس معادله به شکل زیر در می‌آید: $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=1+\sin(\frac{5\pi}{2}+x)$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{4})=1+\cos x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)=1+\cos x$$

$$\Rightarrow \cos x-\sin x=1+\cos x \Rightarrow \sin x=-1$$

$\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ یا $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$

۷۵۱- گزینهٔ ۴ بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است؛ بنابراین:

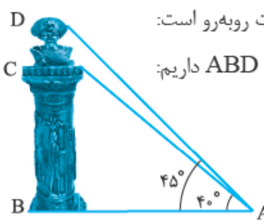
$$a+1=1 \Rightarrow a=0 \Rightarrow f(x)=\sin(x+b\pi)$$

از طرفی نمودار تابع از نقطهٔ $(0,1)$ می‌گذرد، پس:

$$f(0)=1 \Rightarrow \sin b\pi=1 \xrightarrow{-2<b<2} b\pi=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}=0/5$$

۷۵۲- گزینهٔ ۳ شکل مسئله به صورت روبه‌رو است:



با توجه به شکل، در مثلث‌های ABC و ABD داریم:

در $\overset{\Delta}{ABC}$: $\tan 40°=\frac{BC}{AB}$

$$\Rightarrow 0/8=\frac{BC}{35} \Rightarrow BC=28$$

در $\overset{\Delta}{ABD}$: $\tan 45°=\frac{BD}{AB} \Rightarrow 1=\frac{BD}{35} \Rightarrow BD=35$

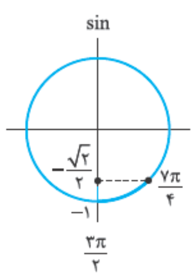
پس طول مجسمه برابر است با: $CD=BD-BC=35-28=7$

۷۵۳- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ f را با اتحاد $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ساده می‌کنیم:

$$f(x)=2\sin(3x+\pi)=-2\sin 3x$$

با توجه به دامنهٔ f، برد آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{\times 3} \frac{3\pi}{2}\le 3x\le\frac{7\pi}{4}$$



حالا با کمک دایرهٔ مثلثاتی، محدودهٔ سینوس یک کمان در بازهٔ $[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}]$ را حساب می‌کنیم:

$$-1\le\sin 3x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حالا ادامه می‌دهیم: $-1\le\sin 3x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\xrightarrow{\times(-2)} \sqrt{2}\le\overbrace{-2\sin(3x)}^{f(x)}\le 2$$

پس در این بازه، کم‌ترین و بیشترین مقدار تابع f به ترتیب $\sqrt{2}$ و ۲ هستند.

۷۵۴- گزینهٔ ۲ شیب خط گذرنده از دو نقطه، برابر تانژانت زاویه‌ای است که با جهت مثبت محور xها می‌سازد. در نتیجه:

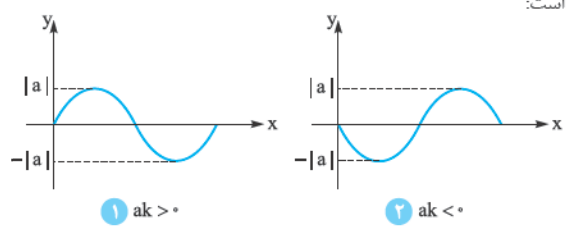
$m_{AB}=\tan$ (زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها)

$$\Rightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\tan 30° \Rightarrow \frac{a-4}{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$3a-12=3-3a \Rightarrow 6a=15 \Rightarrow a=\frac{15}{6}=2/5$$

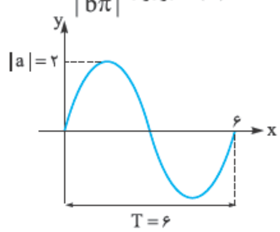
۷۵۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=a\sin kx$ با شرط هم‌علامت بودن a و k به شکل ۱ و با شرط ناهم‌علامت بودن a و k به شکل ۲ است:



با توجه به نکتهٔ بالا، در ضابطهٔ $f(x)=a\sin(b\pi x)$، a و b هم‌علامت‌اند.

روی نمودار |a| و T را مشخص می‌کنیم:

دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)$ برابر با $\frac{2\pi}{|b\pi|}$ است که باید با ۶ برابر باشد:



$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=6 \Rightarrow \frac{2}{|b|}=6 \Rightarrow |b|=\frac{1}{3}$$

با توجه به تساوی‌های $|a|=2$ و $|b|=\frac{1}{3}$ و هم‌علامت بودن a و b دو حالت داریم:

① $a=2$ و $b=\frac{1}{3}$، پس: $a+b=\frac{7}{3}$

② $a=-2$ و $b=-\frac{1}{3}$، پس: $a+b=-\frac{7}{3}$

۷۵۶- گزینهٔ ۳ **راه اول** با استفاده از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$، ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2$$

$$=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}_{1}-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\Rightarrow f(x)=1-2(\sin x\cos x)^2 \xrightarrow{\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$f(x)=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 \Rightarrow f(x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

با استفاده از اتحاد $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ و با قراردادن $\alpha=4x$، داریم:

$$\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$$

با جای‌گذاری این تساوی در f داریم:

$$f(x)=1-\frac{1}{2}(\frac{1-\cos 4x}{2})=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

دو عدد $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$ در دورهٔ تناوب f تأثیری ندارند و دورهٔ تناوب آن برابر است با:

$$T=\frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

راه دوم

دورهٔ تناوب تابع $y=\sin^2 ax$ (یا هر توان زوج دیگری) برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است.

پس وقتی ضابطهٔ f به شکل $f(x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ درآمد چون $a=2$ است، پس دورهٔ تناوب f برابر با $\frac{\pi}{2}$ است.

۷۵۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه: $\tan\alpha=\cot\beta$

در نتیجه در این‌جا خواهیم داشت:

$$(x+\frac{\pi}{12})+(2x-\frac{\pi}{8})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x+\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}=\frac{12\pi+3\pi-2\pi}{24}$$

$$\Rightarrow 3x=\frac{13\pi}{24} \Rightarrow x=\frac{13\pi}{72}$$

۷۵۸- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ f را با دو اتحاد $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\tan x.\frac{1}{1+\tan^2 x}=\tan x.\cos^2 x$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^2 x=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

دورهٔ تناوب تابع $y=\sin ax$ برابر با $\frac{2\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ برابر با $\frac{2\pi}{2}=\pi$ است.

۷۵۹- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=a\tan(x-\frac{\pi}{4})+b$، محور xها را در $x=\frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند، پس:

$$f(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow a\tan\frac{\pi}{4}+b=0 \Rightarrow a+b=0$$

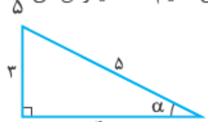
این تابع محور yها را در $y=2$ قطع می‌کند، پس:

$$f(0)=2 \Rightarrow a\tan(-\frac{\pi}{4})+b=2 \Rightarrow -a+b=2$$

با حل دو معادلهٔ $a+b=0$ و $-a+b=2$، داریم: $a=-1 \quad , \quad b=1$

پس: $a-b=-1-1=-2$

۷۶۰- گزینهٔ ۴ باید از تساوی $\sin\alpha=\frac{3}{5}$، مقدار $\tan\alpha$ را حساب کنیم. یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ حادهٔ α می‌کشیم که سینوس آن $\frac{3}{5}$ باشد:



حالا تانژانت α را حساب می‌کنیم: $\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{3}{4}$

چون α زاویهٔ منفرجه بود، تانژانت منفی است و $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

حالا مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-(-\frac{3}{4})}{1+(1)(-\frac{3}{4})}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}}=7$$

۷۶۱- گزینهٔ ۳ مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sqrt{3}\sin 10^\circ}-\frac{1}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sqrt{3}\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

در صورت به جای $\sqrt{3}$، $\tan 60^\circ$ قرار می‌دهیم. در مخرج هم از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\frac{\cos 10^\circ-\tan 60^\circ\sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\cos 60^\circ\cos 10^\circ-\sin 60^\circ\sin 10^\circ}{\cos 60^\circ}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ}=\frac{\frac{\cos(60^\circ+10^\circ)}{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ}=\frac{\cos 70^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ}$$

با توجه به این‌که $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ$، بنابراین: $\text{عبارت}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

۷۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که:

$$\sin 110^\circ=\sin(90^\circ+20^\circ)=\cos 20^\circ\ (*)$$

حالا با کمک فرمول $\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\text{عبارت}=\sin 110^\circ\left(\frac{\sin(20^\circ+35^\circ)}{\cos 20^\circ\cos 35^\circ}\right)$$

$$\xrightarrow{(*)}\ \text{عبارت}=\cancel{\cos 20^\circ}\left(\frac{\sin 55^\circ}{\cancel{\cos 20^\circ}\cos 35^\circ}\right)=\frac{\sin 55^\circ}{\cos 35^\circ}$$

صورت و مخرج با هم برابرند (چون مجموع کمان‌ها 90° است)؛ پس:

$\text{حاصل عبارت}=1$

۷۶۳- گزینهٔ ۲

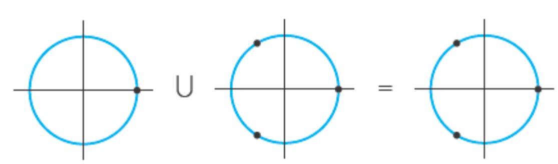
$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\Rightarrow -(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\Rightarrow -\cos 2x=-\cos x \Rightarrow \cos 2x=\cos x$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm x \Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+x\\ 2x=2k\pi-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi\\ x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

اجتماع دو جواب به دست آمده، $\frac{2k\pi}{3}$ است، ببینید:



$x=2k\pi$ $\quad\cup\quad$ $x=\frac{2k\pi}{3}$ $\quad=\quad$ $x=\frac{2k\pi}{3}$

۷۶۴- گزینهٔ ۳

$$\underbrace{\cos 2x}_{2\cos^2 x-1}-\cos x+1=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0$$

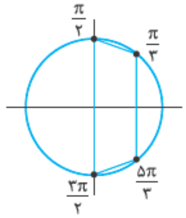
$$\Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0 \Rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

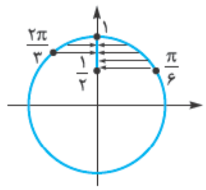
جواب‌های معادلهٔ ستون قبل را در بازهٔ $[0,2\pi]$ می‌نویسیم:

$$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\quad,\quad \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

این نقاط را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص و به هم وصل می‌کنیم:
شکل حاصل یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.



۷۶۵- گزینهٔ ۳ اول با توجه به حدود x، حدود $\sin x$ را می‌یابیم:



$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le \sin x\le 1$$

حالا حدود $\frac{1}{1+\sin x}$ را می‌یابیم:

$$\frac{1}{2}\le \sin x\le 1 \xrightarrow{+1} \frac{3}{2}\le 1+\sin x\le 2$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2}\le \frac{1}{1+\sin x}\le \frac{2}{3}$$

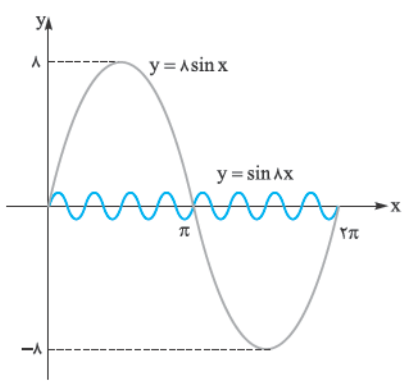
۷۶۶- گزینهٔ ۳ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{\sin(2x)\cos 2x}\cos 4x=2\sin x \Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\sin 4x\cos 4x}=2\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 8x\right)=2\sin x \Rightarrow \frac{1}{4}\sin 8x=2\sin x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin 8x}_{y_1}=\underbrace{8\sin x}_{y_2}$$

حالا با استفاده از رسم، تعداد جواب‌ها را در بازهٔ $[0,2\pi]$ می‌یابیم:



با توجه به شکل دو نمودار در سه نقطه به طول‌های ۰، π و 2π متقاطع‌اند؛ بنابراین معادله ۳ ریشهٔ حقیقی دارد.

۷۶۷- گزینهٔ ۲ اول باید A را ساده کنیم. برای ساده‌سازی از رابطه‌های روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\sin 2u=2\sin u\cos u\\ 1+\cos 2u=2\cos^2\frac{u}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}$$

بنابراین $A+\frac{۱}{A}$ برابر است با:

$$A+\frac{۱}{A}=\tan\frac{\alpha}{۲}+\frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}+\cot\frac{\alpha}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ $\tan u+\cot u=\frac{۲}{\sin ۲u}$ خواهیم داشت:

$$A+\frac{۱}{A}=\frac{۲}{\sin ۲(\frac{\alpha}{۲})}=\frac{۲}{\sin\alpha}$$

پس معکوس این عبارت برابر است با: $\text{معکوس}=\frac{\sin\alpha}{۲}$

۷۶۸- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج تساوی داده‌شده را بر $\cos^{۲}x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{تساوی}:\ \frac{\tan^{۲}x-۲+\frac{۱}{\cos^{۲}x}}{\tan^{۲}x+۲-\frac{۱}{\cos^{۲}x}}=۴$$

حالا از رابطهٔ $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\tan^{۲}x-۲+(۱+\tan^{۲}x)}{\tan^{۲}x+۲-(۱+\tan^{۲}x)}=۴$$

$$\Rightarrow \frac{۲\tan^{۲}x-۱}{۱}=۴\Rightarrow ۲\tan^{۲}x=۵\Rightarrow \tan^{۲}x=\frac{۵}{۲}$$

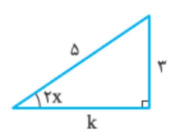
۷۶۹- گزینهٔ ۴ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\cos x\cos ۳x(\tan x+\tan ۳x)$$

$$=\cos x\cos ۳x(\frac{\sin(x+۳x)}{\cos x\cos ۳x})=\sin ۴x$$

حالا باید با کمک مقدار داده‌شده حاصل $\sin ۴x$ را بیابیم. پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sin ۲x=\frac{۳}{۵}\Rightarrow$$

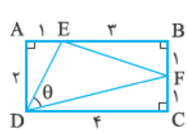


$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} k=۴ \xrightarrow[\frac{\pi}{۲}<۲x<\pi]{\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}} \cos ۲x=-\frac{k}{۵}=-\frac{۴}{۵}$$

حالا مقدار $\sin ۴x$ را با استفاده از رابطهٔ $\sin ۲u=۲\sin u\cos u$ می‌یابیم:

$$\sin ۴x=۲\sin ۲x\cos ۲x=۲(\frac{۳}{۵})(-\frac{۴}{۵})=-\frac{۲۴}{۲۵}$$

۷۷۰- گزینهٔ ۲ مطابق شکل مقابل با کم‌کردن مساحت مثلث‌های ADE، EBF و FDC از مساحت مستطیل، مساحت مثلث DEF را می‌یابیم:



$$S_{DEF}=۴(۲)-(\frac{۲(۱)}{۲}+\frac{۳(۱)}{۲}+\frac{۱(۴)}{۲})$$

$$\Rightarrow S_{DEF}=۸-(۱+۱/۵+۲)=۳/۵\ (*)$$

از طرفی طول اضلاع DE و DF با کمک قضیهٔ فیثاغورس برابر است با:

$$DF=\sqrt{۴^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۱۷}\quad,\quad DE=\sqrt{۲^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۵}$$

پس با استفاده از رابطهٔ مساحت مثلث، اندازهٔ $\sin\theta$ را می‌یابیم:

$$S_{DEF}=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۷})(\sqrt{۵})\sin\theta\overset{(*)}{=}۳/۵\Rightarrow \sin\theta=\frac{۷}{\sqrt{۸۵}}$$

۷۷۱- گزینهٔ ۴ دقت کنید که:

$$\begin{cases}\sin^{۲}۲^\circ+\sin^{۲}۸۸^\circ=\sin^{۲}۲^\circ+\cos^{۲}۲^\circ=۱\\ \sin^{۲}۴^\circ+\sin^{۲}۸۶^\circ=\sin^{۲}۴^\circ+\cos^{۲}۴^\circ=۱\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \sin^{۲}۴۴^\circ+\sin^{۲}۴۶^\circ=\sin^{۲}۴۴^\circ+\cos^{۲}۴۴^\circ=۱\end{cases}$$

از آن‌جایی که ۲۲ سطر داریم، اگر طرفین تساوی‌های بالا را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin^{۲}۲^\circ+\sin^{۲}۴^\circ+\cdots+\sin^{۲}۴۴^\circ+\sin^{۲}۴۶^\circ+\cdots+\sin^{۲}۸۶^\circ+\sin^{۲}۸۸^\circ=۲۲$$

از طرفی چون $\sin^{۲}۹۰^\circ=۱$، پس مجموع داده‌شده برابر $۲۲+۱=۲۳$ است.

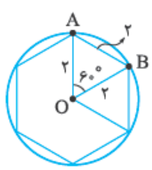
۷۷۲- گزینهٔ ۱ عبارت را در $\sin\frac{\pi}{۹}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{۹}\cos\frac{\pi}{۹}}^{\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۹}}\cos\frac{۲\pi}{۹}\cos\frac{۴\pi}{۹}}{\sin\frac{\pi}{۹}}=\frac{\frac{۱}{۲}\overbrace{\sin\frac{۲\pi}{۹}\cos\frac{۲\pi}{۹}}^{\frac{۱}{۲}\sin\frac{۴\pi}{۹}}\cos\frac{۴\pi}{۹}}{\sin\frac{\pi}{۹}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۴}\sin\frac{۴\pi}{۹}\cos\frac{۴\pi}{۹}}{\sin\frac{\pi}{۹}}=\frac{\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}\sin\frac{۸\pi}{۹})}{\sin\frac{\pi}{۹}}=\frac{\frac{۱}{۸}\sin\frac{۸\pi}{۹}}{\sin\frac{\pi}{۹}}$$

چون $\frac{۸\pi}{۹}+\frac{\pi}{۹}=\pi$، بنابراین $\sin\frac{۸\pi}{۹}=\sin\frac{\pi}{۹}$ و در نتیجه: $\text{عبارت}=\frac{۱}{۸}$

۷۷۳- گزینهٔ ۳ چون شش‌ضلعی منتظم است، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. پس طول شعاع دایره هم برابر طول ضلع شش‌ضلعی است: $r=۲$



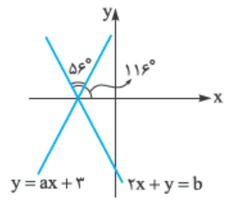
از آن‌جایی که زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۶۰° یا $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است، طول کمان AB برابر است با: $\text{طول کمان } AB=r\theta=۲(\frac{\pi}{۳})=\frac{۲\pi}{۳}$

پس اختلاف طول کمان AB از طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$\text{اختلاف}=\frac{۲\pi}{۳}-۲=\frac{۲\pi-۶}{۳}\simeq\frac{۶/۲۸-۶}{۳}=\frac{۰/۲۸}{۳}\simeq ۰/۰۹...$$

که این مقدار در فاصلهٔ $(۰/۰۹,۰/۱)$ قرار دارد.

۷۷۴- گزینهٔ ۱ شیب خط $۲x+y=b$ برابر -۲ است. با توجه به این‌که $\tan ۶۴^\circ=۲$، بنابراین زاویهٔ این خط با جهت مثبت محور xها برابر $۱۸۰^\circ-۶۴^\circ=۱۱۶^\circ$ است؛ پس مطابق شکل صفحهٔ بعد، زاویهٔ خط $y=ax+۳$ با جهت مثبت محورxها برابر $۱۱۶^\circ-۵۶^\circ=۶۰^\circ$ است.



در نتیجه شیب این خط که برابر a است، با تانژانت ۶۰ درجه برابر است:

$$a=\tan 60^\circ \Rightarrow a=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{3}x+3$$

برای محاسبهٔ b، باید ریشهٔ خط $y=\sqrt{3}x+3$ را محاسبه کنیم. ریشهٔ این خط همان ریشهٔ خط $2x+y=b$ است:

$$\sqrt{3}x+3=0 \Rightarrow x=-\sqrt{3}$$

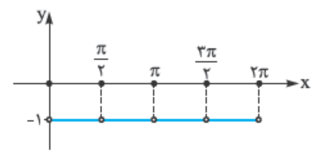
این ریشه، ریشهٔ $2x+y=b$ نیز هست. پس نقطهٔ $(-\sqrt{3},0)$ روی این خط قرار دارد:

$$\Rightarrow 2(-\sqrt{3})+0=b \Rightarrow b=-2\sqrt{3}$$

۷۷۵- گزینهٔ ۱

$$[\cos x]+[-\cos x]=\begin{cases}0 & \cos x\in\mathbb{Z}\\ -1 & \cos x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

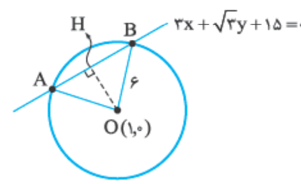
$\cos x$ در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ در نقاط به طول‌های $x=0$، $x=\frac{\pi}{2}$، $x=\pi$، $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=2\pi$ مقداری صحیح دارد، پس نمودار تابع به صورت مقابل است:



بنابراین نمودار از ۶ قطعهٔ مجزا تشکیل شده است.

۷۷۶- گزینهٔ ۲ به شکل فرضی زیر توجه کنید:

فاصلهٔ نقطهٔ O (مرکز) از خط AB را می‌یابیم:



$$OH=\frac{|3(1)+\sqrt{3}(0)+15|}{\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{18}{\sqrt{12}}=\frac{18}{2\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

در مثلث OHB داریم: $\cos H\hat{O}B=\frac{OH}{OB}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow H\hat{O}B=30^\circ$

$$\Rightarrow A\hat{O}B=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

پس با توجه به این‌که طول شعاع دایره ۶ است، طول کمان AB برابر است با:

$$\ell=r\theta=6\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\pi$$

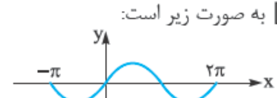
۷۷۷- گزینهٔ ۳ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{3+\cos^2 x}{2-\sin x}-2=\frac{3+1-\sin^2 x}{2-\sin x}-2$$

$$\Rightarrow y=\frac{4-\sin^2 x}{2-\sin x}-2 \Rightarrow y=\frac{(2-\sin x)(2+\sin x)}{2-\sin x}-2$$

$$\Rightarrow y=2+\sin x-2=\sin x$$

نمودار $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[-\pi,2\pi]$ به صورت زیر است:



تعداد ریشه‌های تابع (صفرهای تابع) برابر ۴ تا است. حالا باید با انتقال عمودی، تعداد صفرهای تابع را دوتا کنیم. اگر نمودار تابع را کم‌تر از یک واحد به پایین منتقل کنیم، تعداد صفرهای تابع ۲تا می‌شود؛ پس $a\in(-1,0)$. *(چون داریم به پایین منتقل می‌کنیم، a منفی می‌شه.)*

هم‌چنین اگر نمودار تابع را دقیقاً یک واحد به بالا منتقل کنیم، تعداد صفرهای تابع دوتا می‌شود؛ پس a می‌تواند برابر ۱ هم باشد. از اجتماع جواب‌های به دست آمده خواهیم داشت: $a\in(-1,0)\cup\{1\}$

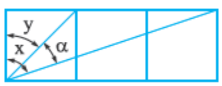
که این مجموعه جواب با مجموعه جواب ۳ برابر است.

۷۷۸- گزینهٔ ۳ در صورت از رابطهٔ: $(1+\sin u)^2=(\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2})^2$

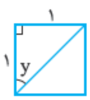
و در مخرج از رابطهٔ $1+\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2(1+\sin x)}{1+\cos x}=\frac{\cancel{2}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{\cancel{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\left(\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2=\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2$$

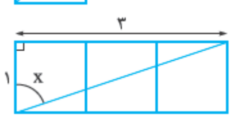
۷۷۹- گزینهٔ ۱ مطابق شکل، زاویهٔ α برابر با $x-y$ است:



ابتدا تانژانت دو زاویهٔ x و y را حساب می‌کنیم:



$$\tan\hat{y}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{1}{1}=1$$



$$\tan\hat{x}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{3}{1}=3$$

حالا مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

$$=\frac{3-1}{1+3\times 1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{2}$$

با داشتن $\tan\alpha=\frac{1}{2}$، مقدار $\tan 2\alpha$ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

۷۸۰- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ هر دو تابع را تشکیل می‌دهیم. برای ساده‌کردن ضابطهٔ تابع اول، از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

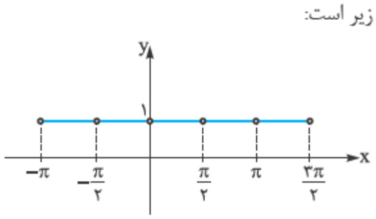
۱ $y_1=f(2x)-g(2x)=\tan 2x-\cot 2x=-2\cot 4x$

دورهٔ تناوب تابع $y=\cot ax$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس: $T_1=\frac{\pi}{|4|}=\frac{\pi}{4}$

حالا ابتدا ضابطهٔ $f(x)g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

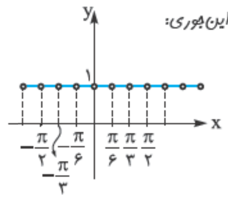
۲ $y=f(x)g(x)=\tan x.\cot x \Rightarrow y=1\,,\ x\neq\frac{k\pi}{2}$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



برای رسم نمودار تابع $y_2=f(3x)g(3x)$، باید نمودار بالا را در

راستای افقی با ضریب $\frac{۱}{۳}$ منقبض کنیم. *یعنی این‌جوری:*



دورهٔ تناوب این تابع $T_۲ = \frac{π}{۶}$ است.

پس:

$$\frac{T_۱}{T_۲} = \frac{\frac{π}{۴}}{\frac{π}{۶}} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

۷۸۱- گزینهٔ ۱

از دو اتحاد $\sin x = \dfrac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$ و $\cos x = \dfrac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin x + ۲\cos x = ۱ \Rightarrow \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} + ۲\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})} ۲\tan\frac{x}{۲} + ۲ - ۲\tan^۲\frac{x}{۲} = ۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳\tan^۲\frac{x}{۲} - ۲\tan\frac{x}{۲} - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \begin{cases} \tan\frac{x}{۲} = ۱ \\ \tan\frac{x}{۲} = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{۳} \end{cases}$$

۷۸۲- گزینهٔ ۲

از اتحادهای $۱-\cos ۲α = ۲\sin^۲ α$ و $۱+\cos ۲α = ۲\cos^۲ α$ و $\sin ۲α = ۲\sin α \cos α$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱+\sin ۴x - \cos ۴x}{۱+\sin ۴x + \cos ۴x} = \frac{(۱-\cos ۴x)+\sin ۴x}{(۱+\cos ۴x)+\sin ۴x}$$

$$= \frac{۲\sin^۲ ۲x + ۲\sin ۲x\cos ۲x}{۲\cos^۲ ۲x + ۲\sin ۲x \cos ۲x} = \frac{\sin ۲x(\cancel{۲\sin ۲x + ۲\cos ۲x})}{\cos ۲x(\cancel{۲\cos ۲x + ۲\sin ۲x})}$$

$$= \tan ۲x$$

حالا کافی است از روی $\tan x = ۲$، مقدار $\tan ۲x$ را حساب کنیم:

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \frac{۲(۲)}{۱-۲^۲} = \frac{-۴}{۳}$$

۷۸۳- گزینهٔ ۱ دو مرتبه از اتحاد $۲\cot ۲α = \cot α - \tan α$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan ۲۰^\circ + ۲\tan ۴۰^\circ + ۴\cot ۸۰^\circ$$

$$= \tan ۲۰^\circ + ۲\tan ۴۰^\circ + ۲\underbrace{(۲\cot ۸۰^\circ)}_{\cot ۴۰^\circ - \tan ۴۰^\circ}$$

$$= \tan ۲۰^\circ + \cancel{۲\tan ۴۰^\circ} + ۲\cot ۴۰^\circ - \cancel{۲\tan ۴۰^\circ}$$

$$= \tan ۲۰^\circ + \underbrace{۲\cot ۴۰^\circ}_{\cot ۲۰^\circ - \tan ۲۰^\circ}$$

$$= \tan ۲۰^\circ + \cot ۲۰^\circ - \tan ۲۰^\circ = \cot ۲۰^\circ$$

چون دو زاویهٔ ۲۰ و ۷۰ متمم‌اند، پس به جای $\cot ۲۰^\circ$ می‌توانیم $\tan ۷۰^\circ$ را قرار دهیم.

۷۸۴- گزینهٔ ۲ اگر طرفین تساوی $A+B = \frac{π}{۲}$ را به دو تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{A}{۲} + \frac{B}{۲} = \frac{π}{۴}$$

از دو طرف تساوی بالا تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}) = \tan\frac{π}{۴} \Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{۲} + \tan\frac{B}{۲}}{۱-\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}} = ۱$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{۲} + \tan\frac{B}{۲} = ۱ - \tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{۲} + \tan\frac{B}{۲} + \tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲} = ۱ \qquad (*)$$

حالا می‌رویم سراغ عبارتی که سؤال حاصلش را می‌خواهد:

$$(۱+\tan\frac{A}{۲})(۱+\tan\frac{B}{۲})$$

$$= ۱ + \underbrace{\tan\frac{A}{۲} + \tan\frac{B}{۲} + \tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}}_{(*)\ ۱} = ۱+۱ = ۲$$

۷۸۵- گزینهٔ ۳ اول دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{۱+\cos x}{\sin x}$ را به دست می‌آوریم:

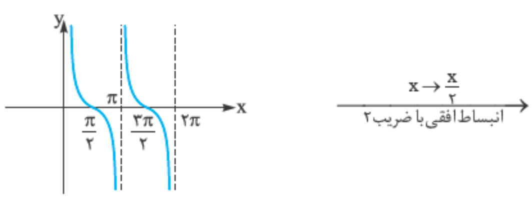
$$\sin x \neq ۰ \Rightarrow x \neq kπ$$

حالا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

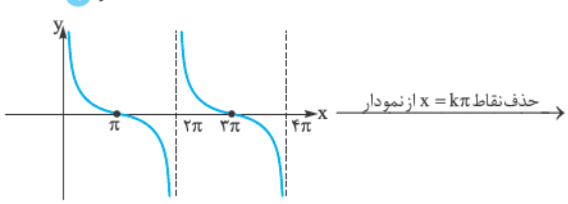
$$f(x) = \frac{۱+\cos x}{\sin x} = \frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} \Rightarrow f(x) = \cot\frac{x}{۲}$$

دورهٔ تناوب تابع $y = \cot ax$ برابر با $\frac{π}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \cot\frac{x}{۲}$ برابر با $T = \frac{π}{\frac{۱}{۲}} = ۲π$ است.

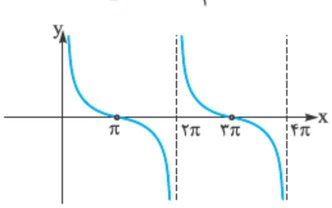
پس کافی است نمودار تابع $f(x) = \cot\frac{x}{۲}$ با دامنهٔ $x \neq kπ$ را رسم کنیم:



۱ $y = \cot x$



۲ $y = \cot\frac{x}{۲}$



۳ $y = \cot\frac{x}{۲}, (x \neq xπ)$

۷۸۶- گزینهٔ ۴ از اتحاد $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ (*) استفاده می‌کنیم:

$$(\underbrace{\cot 1^\circ - \tan 1^\circ}_{(*)2\cot 2^\circ})^2 (1 - \underbrace{2\cot 4^\circ}_{(*)(\cot 2^\circ - \tan 2^\circ)}\tan 2^\circ)$$

$$= (2\cot 2^\circ)^2(1-(\cot 2^\circ - \tan 2^\circ)\tan 2^\circ)$$

$$= (4\cot^2 2^\circ)(1 - \underbrace{\cot 2^\circ \tan 2^\circ}_{1} + \tan^2 2^\circ)$$

$$= 4\cot^2 2^\circ \tan^2 2^\circ = 4(1)^2 = 4$$

۷۸۷- گزینهٔ ۲ از طرفین تساوی $3x = 2x + x$ ، تانژانت می‌گیریم:

$$3x = 2x + x \Rightarrow \tan 3x = \tan(2x + x)$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

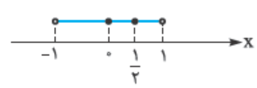
$$\Rightarrow \tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$$

$$\Rightarrow \tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$$

اگر $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$ باشد، آن‌گاه:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

۷۸۸- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ $(-1,1)$ یک همسایگی اعداد $\frac{1}{2}$ و صفر است، چون $\frac{1}{2}$ و صفر داخل بازه قرار دارند:



همچنین این بازه یک همسایگی راست عدد -1 و یک همسایگی چپ عدد ۱ است.
فاصلهٔ $(-1,1)$ همسایگی محذوف عدد ۱ نیست.

۷۸۹- گزینهٔ ۳ ابتدا مجموعه جواب نامعادله را می‌یابیم. می‌دانیم اگر $|u| < k$ باشد، آن‌گاه: $-k < u < k$

پس در اینجا داریم: $|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \xrightarrow{+2} 1 < x < 3$

پس با توجه به گزینه‌ها، این فاصله یک همسایگی عدد ۲/۵ است، چون این عدد در داخل بازه قرار دارد.

۷۹۰- گزینهٔ ۲ اول دامنهٔ تابع را حساب می‌کنیم:

دامنهٔ صورت: $1 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$

دامنهٔ مخرج: $\mathbb{R}$ ، ریشهٔ مخرج: $x = 0$

$$\Rightarrow D_f = (\text{دامنهٔ صورت}) \cap (\text{دامنهٔ مخرج}) - \{\text{ریشهٔ مخرج}\}$$

$$\Rightarrow D_f = [-1,1] \cap \mathbb{R} - \{0\} = [-1,1] - \{0\}$$

که این فاصله یک همسایگی محذوف صفر است.

۷۹۱- گزینهٔ ۲ برای اینکه فاصلهٔ داده‌شده یک همسایگی عدد ۱ باشد، باید این عدد داخل بازه قرار داشته باشد، در نتیجه باید:

$$\underbrace{x - 2 < 1}_{(1)}\overbrace{< 3x - 1}^{(2)}$$

هر یک از نامعادله‌های (۱) و (۲) را حل می‌کنیم و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} (1)\ x - 2 < 1 \Rightarrow x < 3 \\ (2)\ 1 < 3x - 1 \Rightarrow 3x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{2}{3} < x < 3$$

حالا برای اینکه بررسی کنیم حدود x، همسایگی چند عدد صحیح است، باید ببینیم این فاصله شامل چندتا عدد صحیح است که اعداد صحیح این فاصله، دو عدد $\{1,2\}$ هستند.

۷۹۲- گزینهٔ ۴ برای اینکه $(a^2 - 6 , 2a - 1) - \{a\}$ نشان‌دهندهٔ یک همسایگی محذوف باشد، باید عدد a از عدد ابتدای بازه بیشتر و از عدد انتهای بازه کم‌تر باشد، در نتیجه باید:

$$(1)\ a^2 - 6 < a \Rightarrow a^2 - a - 6 < 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < a < 3$$

$$(2)\ 2a - 1 > a \Rightarrow a > 1$$

از اشتراک (۱) و (۲) حدود a به دست می‌آید: $\Rightarrow$ حدود $a = (1,3)$

۷۹۳- گزینهٔ ۳ می‌دانیم مجموعهٔ $(a,\underline{b}) \cup (\underline{b},c)$ یک همسایگی محذوف عدد b است، چون مجموعهٔ زیر یک همسایگی محذوف عدد ۲ است، $(2b - a , \underline{a-b}) \cup (\underline{b+1} , 2a)$

پس:

$$\begin{cases} b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1 \\ a - b = 2 \xrightarrow{b=1} a = 3 \end{cases}$$

در نتیجه فاصلهٔ $(a-b , a+b)$ که برابر $(2,4)$ است، یک همسایگی راست عدد ۲ است.

۷۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نامعادلهٔ داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - ax < 8 \Rightarrow x^2 - ax - 8 < 0$$

مجموعه جواب این نامعادله فاصلهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ زیر است.

$$x^2 - ax - 8 = 0$$

اگر ریشه‌های معادله را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، مجموعه جواب نامعادله به صورت (x_1 , x_2) است. چون این فاصله یک همسایگی چپ عدد ۴ است، پس مجموعه جواب به صورت $(x_1 , 4)$ قابل نمایش است و خب این نشان می‌دهد که $x = 4$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - ax - 8 = 0$ است، پس در معادله صدق می‌کند: $4^2 - a(4) - 8 = 0 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$

حالا با جای‌گذاری مقدار a در تابع، دامنهٔ تابع را می‌یابیم:

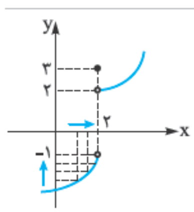
$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} \text{عبارت زیر رادیکال} \ge 0 \Rightarrow 9 - x^2 \ge 0 \\ \text{مخرج} \ne 0 \Rightarrow x + 2 \ne 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le x \le 3 \\ x \ne -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنهٔ } f = [-3,3] - \{-2\}$$

پس دامنهٔ تابع f، یک همسایگی محذوف عدد ۲− است.

۷۹۵- گزینهٔ ۴ محاسبهٔ حد چپ:



مطابق شکل، وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به عدد ۱− نزدیک می‌شوند؛ بنابراین: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1$

محاسبهٔ حد راست: به طریق مشابه وقتی x با مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به ۲ نزدیک می‌شوند، بنابراین: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$

از طرفی $f(2)$ که همان مقدار تابع در $x = 2$ است، همان نقطهٔ توپری است که بالای نقاط توخالی است، پس: $f(2) = 3$

بنابراین: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) + f(2) = 2 + (-1) + 3 = 4$

۷۹۶- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل، وقتی x با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، پس: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

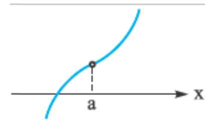
هم‌چنین وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به صفر نزدیک می‌شوند، در نتیجه: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$

از طرفی مقدار تابع در $x=1$ برابر ۱ است، *(همون نقطه توپره دیگه!)* $f(1)=1$
پس تابع هم حد چپ دارد و هم حد راست (رد ۱ و ۳) از طرفی حد چپ تابع در $x=1$، صفر است (رد ۲)؛ بنابراین ۴ صحیح است.

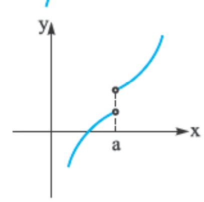
۷۹۷- گزینهٔ ۴ تابع در همسایگی $x=1$ تعریف شده، پس با ۱ *خداحافظی می‌کنیم*. از طرفی تابع در $x=1$ حد دارد، در نتیجه ۳ *هم باید جمع رو ترک کنه*. هم‌چنین در ۲ حد تابع با مقدار تابع در $x=1$ برابر نیست در نتیجه ۲ را هم کنار می‌گذاریم.

۷۹۸- گزینهٔ ۲ چون تابع فقط در همسایگی محذوف صفر تعریف شده، پس ۱ و ۳ حذف می‌شوند. (این توابع در همسایگی صفر و نه محذوف آن تعریف شده‌اند چون $f(0)$ تعریف شده است.)
حالا در دو شکل دیگر باید دنبال نموداری باشیم که در $x=0$ حد ندارد. در ۲ حدهای چپ و راست تابع، مقدار یکسانی ندارند، پس تابع در $x=0$ حد ندارد. *پس جواب همینه!*
دقت کنید در ۴ تابع در $x=0$ حد دارد و حد آن برابر صفر است.

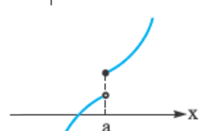
۷۹۹- گزینهٔ ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:
۱ نادرست است. در شکل مقابل تابع در یک همسایگی a تعریف شده و حد دارد.



۲ درست است. در شکل مقابل تابع در a حد چپ و راست دارد ولی به دلیل نابرابری حدهای چپ و راست، تابع در a حد ندارد.



۳ درست است. در شکل مقابل تابع در a تعریف شده ولی حد ندارد.



۴ درست است. برای این‌که تابع در a حد داشته باشد، باید هم حد چپ و هم حد راست داشته باشد. در نتیجه باید هم در همسایگی راست و هم در همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

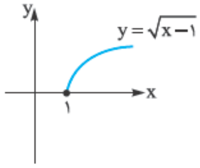
۸۰۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم حد تابع در یک نقطه، ارتباطی به مقدار تابع در آن نقطه ندارد. چون حد f در $x=2$ برابر ۳ است و f و g در هر نقطه‌ای غیر از $x=2$ بر هم منطبق‌اند، پس حد تابع g هم در $x=2$ برابر ۳ است. (تفاوت مقادیر در $x=2$ مهم نیست). حالا باید گزینهٔ درست را پیدا کنیم. گزینه‌ای جواب است که مقدارش ۳ است، پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2f(2)=g(2)=2 \Rightarrow \begin{cases}2f(2)=2 \Rightarrow f(2)=1\\ g(2)=2\end{cases}$$

پس ۲ که مقدار آن برابر ۳ است، جواب است. $g(2)+1=2+1=3$

۸۰۱- گزینهٔ ۳ در $x=a$ حد چپ و راست تابع نابرابر هستند، پس تابع در $x=a$ حد ندارد. *(این یه نقطه)*. در $x=b$ و $x=c$ حد چپ و راست تابع با هم برابر هستند، پس تابع در این دو نقطه حد دارد. در $x=d$ تابع در همسایگی راست این نقطه تعریف نشده، پس در این نقطه حد ندارد. *(اینم دومیش!)*

۸۰۲- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-1}$ فاصلهٔ $x\ge 1$ است، پس تابع در همسایگی $x=1$ تعریف نشده و در نتیجه حد تابع در $x=1$ موجود نیست:



از طرفی تابع در $x=1$ مقدار دارد، *ببین!* $f(1)=\sqrt{1-1}=0$
پس تابع حد ندارد و مقدار دارد.

۸۰۳- گزینهٔ ۱ اول دامنهٔ تابع را محاسبه می‌کنیم. باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

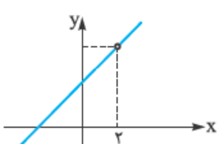
$$x-x^2\ge 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2-x\le 0 \Rightarrow x(x-1)\le 0$$
$$\Rightarrow 0\le x\le 1$$

با توجه به دامنه، تابع در همسایگی راست ۱ تعریف نمی‌شود، پس حد راست ندارد. از طرفی چون حد راست ندارد، پس در $x=1$ حد هم ندارد. (رد ۲ و ۳) هم‌چنین از آن‌جا که $f(1)=\sqrt{1-1}=0$، پس تابع در $x=1$ مقدار دارد. (رد ۴) پس ۱ صحیح است. در واقع چون تابع در همسایگی چپ ۱ تعریف می‌شود، پس شرط لازم وجود حد چپ را داراست.

۸۰۴- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{2\}$ است، پس تابع در $x=2$ مقدار ندارد. برای این‌که بررسی کنیم f در $x=2$ حد دارد یا نه، ابتدا تابع را ساده و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

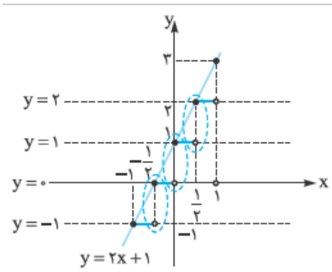
$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2 \quad (x\ne 2)$$

نمودار تابع f به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع در $x=2$ حد دارد. (حد چپ و راستش برابرند.)

۸۰۵- گزینهٔ ۳
راه اول نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:
با توجه به شکل، تابع f در سه نقطهٔ مشخص‌شده در بازهٔ $(-1,1)$ حد ندارد.



راه دوم می‌دانیم به ازای صحیح‌شونده‌های داخل جزءصحیح در یک بازه تابع f حد ندارد. (البته به شرطی که مینیمم یا ماکزیمم تابع داخل جزءصحیح نباشند.) پس داریم: $x\in(-1,1) \Rightarrow -1<x<1$
با این حدود، حدود عبارت داخل جزءصحیح را می‌یابیم:

$$-1<x<1 \xrightarrow{\times 2} -2<2x<2 \xrightarrow{+1} -1<2x+1<3$$

اعداد صحیح این فاصله $\{0,1,2\}$ هستند، بنابراین تابع f در سه نقطه حد ندارد (دقت کنید که چون تابع داخل جزءصحیح خطی است، پس مینیمم یا ماکزیمم ندارد.) اگر طول نقاطی که تابع f در آن‌ها حد ندارد را بخواهید، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2x+1=\{0,1,2\} \xrightarrow{-1} 2x=\{-1,0,1\}$$
$$\xrightarrow{\div 2} x=\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}$$