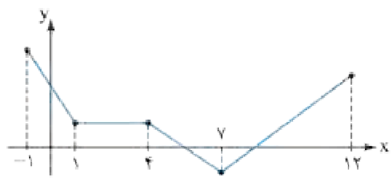
فهرست

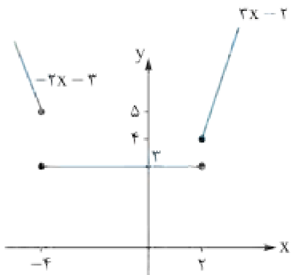
۲۴۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع در بازه‌های $[-1,1]$ و $[4,7]$ نزولی اکید و در بازهٔ $[1,4]$ ثابت است. پس تابع در بازهٔ $[-1,7]$ نزولی است، یعنی $[a,b]=[-1,7]$. نمودار تابع در بازهٔ $[7,12]$ صعودی است، پس $[c,d]=[7,12]$، بنابراین بیشترین مقدار b برابر ۷ و بیشترین مقدار d برابر ۱۲ است پس نسبت b به d برابر است با $\frac{7}{12}$.



۲۴۲- گزینهٔ ۴

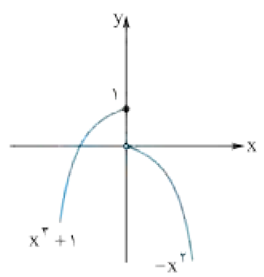
نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ 3 & -4\le x<2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$$



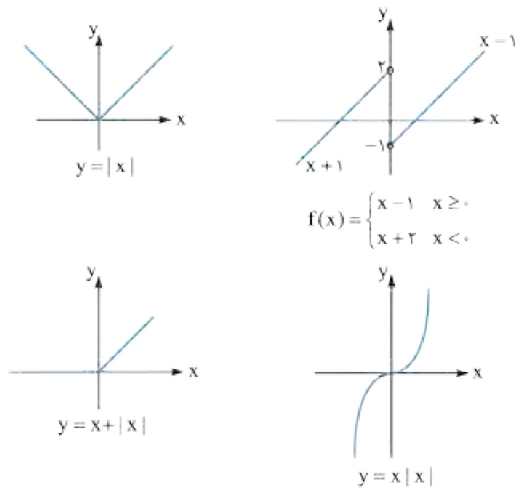
حالا با توجه به نمودار می‌دانیم که تابع در بازهٔ $[-4,+\infty)$ صعودی است (در واقع در بازهٔ $[-4,2)$ ثابت و در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی اکید است).

۲۴۳- گزینهٔ ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

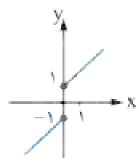
۲۴۴- گزینهٔ ۴ نمودار هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



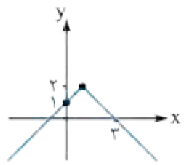
با توجه به نمودارها، تابع $y=x|x|$ صعودی اکید است.

۲۴۵- گزینهٔ ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

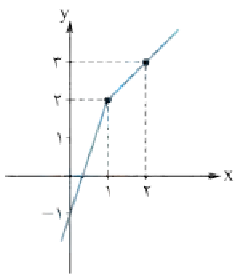
$$f(x)=\frac{|x|}{x}+x=\begin{cases}1+x & x>0\\ -1+x & x<0\end{cases}$$



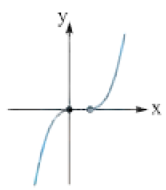
$$f(x)=2-|x-1|$$



$$f(x)=2x-|x-1| \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge 1\\ 3x-1 & x<1\end{cases}$$

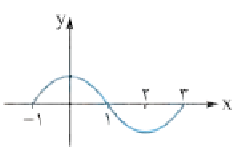


$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$$

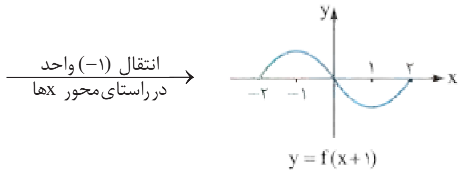


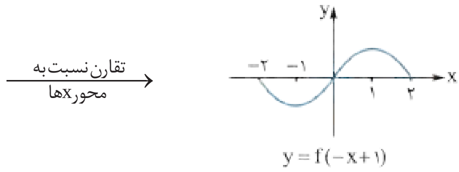
با توجه به نمودارها تابع $f(x)=2-|x-1|$ غیریکنوا است و بقیهٔ تابع‌ها صعودی اکید هستند.

۲۴۶- گزینهٔ ۴ اول نمودار تابع $y=f(1-x)$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ رسم می‌کنیم:



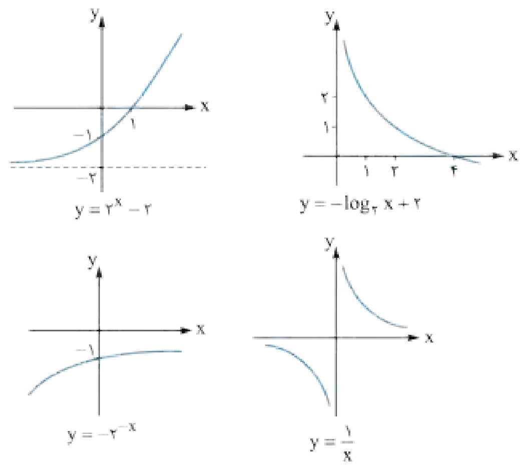
$y=f(x)$





حالا با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-2,-1]$ و $[1,2]$ نزولی اکید است پس با توجه به گزینه‌ها جواب می‌شود ۴.

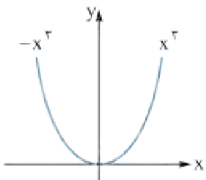
۲۴۷- گزینهٔ ۴ نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودارها، تابع $y = \frac{1}{x}$ غیریکنوا و یک‌به‌یک است.

۲۴۸- گزینهٔ ۲ تابع $f(x) = x^2|x|$ یعنی $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$

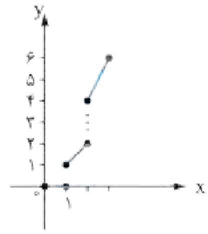
نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



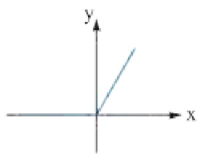
با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty, 0]$ نزولی اکید است، پس حداکثر a در بازهٔ $(-\infty, a]$ برابر است با صفر.

۲۴۹- گزینهٔ ۴ نمودار هر دو تابع را در بازهٔ $[0,3)$ (بازه‌ای که شامل تمام گزینه‌ها باشد) رسم می‌کنیم:

$$y = x[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

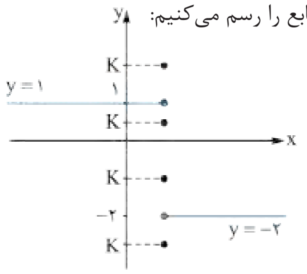


$$y = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$



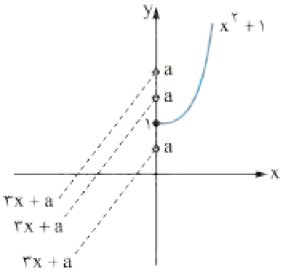
تابع $y = x + |x|$ به ازای $x \geq 0$ صعودی اکید است، پس فقط کافی است تابع $y = x[x]$ را بررسی کنیم. تابع $y = x[x]$ در بازهٔ $[0,1)$ ثابت است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل قسمتی از بازهٔ $[0,1)$ نباشد، یعنی بازهٔ $[\frac{3}{2}, \frac{7}{3}]$.

۲۵۰- گزینهٔ ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار تابع برای این‌که تابع نزولی است باید $-2 \leq f(1) = k \leq 1$ باشد، پس $-2 \leq k \leq 1$ و مقادیر صحیح k عبارت‌اند از -2، -1، 0 و 1 یعنی چهار مقدار صحیح.

۲۵۱- گزینهٔ ۲ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

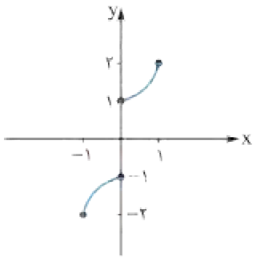


حالا با توجه به نمودار برای این‌که تابع در دامنه‌اش صعودی اکید باشد، حداکثر a می‌تواند برابر ۱ باشد.

۲۵۲- گزینهٔ ۱ اول ضابطهٔ تابع $f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|}$ را به ازای $x > 0$ و $x < 0$ ساده می‌کنیم:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 1$$

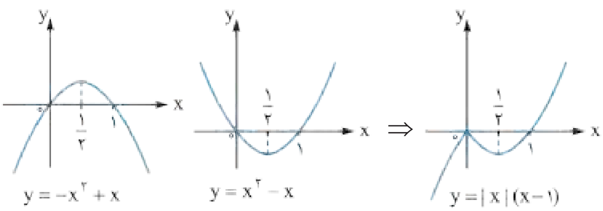


حالا نمودار تابع را در بازهٔ $(-1,1)$ رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل می‌بینیم تابع در بازهٔ $(-1,1)$ صعودی (اکید) است.

۲۵۳- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y = |x|(x-1)$ را رسم می‌کنیم:

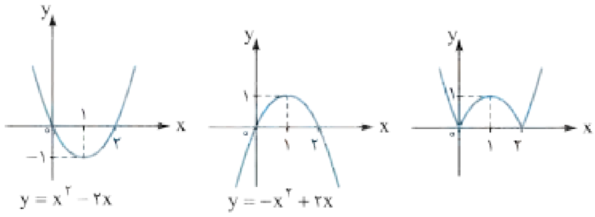
$$\begin{aligned} x < 0 &\Rightarrow y = -x^2 + x \\ x \geq 0 &\Rightarrow y = x^2 - x \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & x < 0 \\ x^2 - x & x \geq 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[0, \frac{1}{2}]$ نزولی اکید است پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ است.

۲۵۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم می‌کنیم:

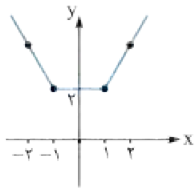
$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$



پس تابع در (۱,۲) نزولی است و $b-a=2-1=1$.

۲۵۵- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=|x-1|+|x+1|$ را رسم می‌کنیم:

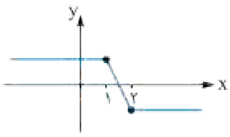
$$x\le -1 \Rightarrow y=-x+1-x-1=-2x$$
$$-1\le x\le 1 \Rightarrow y=-x+1+x+1=2$$
$$1\le x \Rightarrow y=x-1+x+1=2x \Rightarrow y=\begin{cases}-2x & x\le -1\\ 2 & -1\le x\le 1\\ 2x & 1\le x\end{cases}$$



نمودار تابع در بازهٔ $[-1,1]$ ثابت و در بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی اکید است، پس تابع در بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است. حالا باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعهٔ بازهٔ $[-1,+\infty)$ باشد که می‌شود $[-\frac{1}{2},+\infty)$.

۲۵۶- گزینهٔ ۴ نمودارتابع $g(x)=|x-2|-|x-1|$ رارسم‌می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x<1 \Rightarrow y=-x+2+x-1=1\\ 1\le x<2 \Rightarrow y=-x+2-x+1=-2x+3\\ 2\le x \Rightarrow y=x-2-x+1=-1\end{array}\right\}$$



$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}1 & x<1\\ -2x+3 & 1\le x<2\\ -1 & 2\le x\end{cases}$$

تابع در بازهٔ $(-\infty,1]$ ثابت و در بازهٔ $[1,2]$ نزولی اکید و در بازهٔ $[2,+\infty)$ ثابت است. پس تابع در کل نزولی است.

۲۵۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در یک تابع اکیداً صعودی اگر x زیاد شود، y زیاد می‌شود؛ یعنی $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$، پس بهتر است زوج مرتب‌های تابع f را به ترتیب صعودی برحسب x مرتب کنیم:

$$f=\{(1,1),(\sqrt{2},m^2-2),(3,6),(10,20)\}$$

$x=\sqrt{2}$ بین $1<\sqrt{2}<3$ است. پس باید $f(1)<f(\sqrt{2})<f(3)$ باشد:

$$1<m^2-2<6 \Rightarrow 3<m^2<8 \Rightarrow \sqrt{3}<|m|<2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}<m<2\sqrt{2} \Rightarrow m\ \text{مقدارصحیح}=2\\ -2\sqrt{2}<m<-\sqrt{3} \Rightarrow m\ \text{مقدارصحیح}=-2\end{cases}$$

پس حدود m شامل دو عدد صحیح است.

۲۵۸- گزینهٔ ۳ در یک تابع صعودی وقتی که x زیاد می‌شود y باید زیاد شود یا تغییر نکند پس با توجه به زوج‌های مرتب تابع داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(-2,10-x)\\ (0,x^2+4)\\ (1,2x+7)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x^2+4\ge 10-x\\ 2x+7\ge x^2+4\end{array}$$

حالا نامعادله‌های به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$x^2+4\ge 10-x \Rightarrow x^2+x-6\ge 0$$
$$\Rightarrow (x+3)(x-2)\ge 0 \Rightarrow x\le -3\ \text{یا}\ x\ge 2 \quad (I)$$
$$x^2+4\le 2x+7 \Rightarrow x^2-2x-3\le 0$$
$$\Rightarrow (x-3)(x+1)\le 0 \Rightarrow -1\le x\le 3 \quad (II)$$

حالا اشتراک (I) و (II) را پیدا می‌کنیم:

پس جواب می‌شود $2\le x\le 3$ در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $3-2=1$.

۲۵۹- گزینهٔ ۲ می‌دانیم تابع $f(x)=a^x$ به ازای $0<a<1$، نزولی اکید است و از طرفی تابع به ازای $f(x)=0$ و $f(x)=1$ هم نزولی (ثابت) است. پس در تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ باید داشته باشیم:

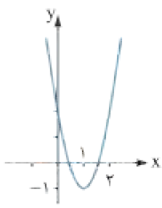
$$0<\frac{3m+1}{4}\le 1 \Rightarrow 0<3m+1\le 4 \Rightarrow -1<3m\le 3$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3}<m\le 1$$

مقادیر صحیح بازهٔ $-\frac{1}{3}<m\le 1$ عبارت‌اند از $m=0$ و $m=1$ یعنی دو مقدار صحیح.

۲۶۰- گزینهٔ ۳ تابع ثابت یعنی $f(x)=k$ و تابع $f(x)=(a^2-3)^x$ وقتی ثابت است که $a^2-3=1$ باشد پس $a^2=4$ و در نتیجه $a=2$ یا $a=-2$. حالا برای تابع $g(x)=a^x$ مقدار $a=-2$ غیرقابل‌قبول است پس $g(x)=2^x$ و در نتیجه تابع g، صعودی اکید است.

۲۶۱- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=3x^2-6x+2$ (که یک سهمی است) را رسم می‌کنیم: (یادمان هست که طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید) $y=3x^2-6x+2$

$$x_S=-\frac{-6}{2\times 3}=\frac{6}{6} \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=3-6+2=-1 \Rightarrow S(1,-1)$$



$x=0$ نقطهٔ برخورد با محور yها
$\Rightarrow y=2 \Rightarrow A(0,2)$

حالا با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[-1,1]$ نزولی و در بازهٔ $[1,2]$ صعودی است؛ پس تابع روی بازهٔ $[-1,2]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۲۶۲- گزینهٔ ۴ اول دامنهٔ $\{x:|x-1|<2\}$ را ساده می‌کنیم:

$$|x-1|<2 \Rightarrow -2<x-1<2 \Rightarrow -1<x<3$$

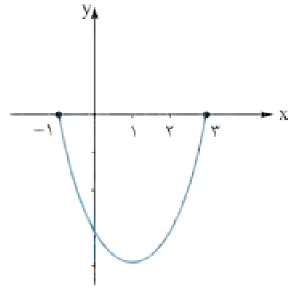
حالا نمودار تابع $f(x)=x^2-2x-3$ را رسم می‌کنیم:

$$y=x^2-2x-3$$

$$\text{سهمی} \Rightarrow x_{\text{رأس}}=-\frac{-2}{2(1)}=1 \Rightarrow y=1-2-3=-4 \Rightarrow S(1,-4)$$

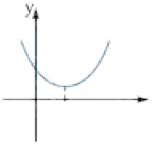
$$x=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow (0,-3)$$
$$x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (-1,0)$$
$$x=3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (3,0)$$

$\Rightarrow$

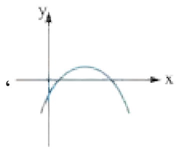


حالا با توجه به شکل، تابع در بازهٔ $[-1,3]$ همواره منفی است.

۲۶۳- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{m})x^2-x+3$ یک سهمی است که یا مینیمم دارد



یا ماکزیمم



پس در صورتی می‌تواند در بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی باشد که اولاً مینیمم داشته باشد و ثانیاً ($1 \leq$ طول رأس) باشد. برقراری این دو شرط را بررسی می‌کنیم:

$$\text{مینیمم } a>0 \Rightarrow \frac{1}{m}>0 \Rightarrow m>0$$

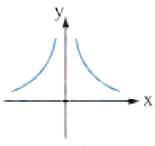
$$\text{طول رأس} \leq 1 \Rightarrow -\frac{-1}{2(\frac{1}{m})} \leq 1 \Rightarrow \frac{m}{2} \leq 1 \xrightarrow{m>0} m \leq 2$$

پس باید $0<m\leq 2$ باشد.

۲۶۴- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=(a-2)x^2+2ax+3$ یک تابع درجه‌دوم است پس نمی‌تواند یکنوا باشد پس برای یکنوابودن تابع باید جملهٔ x^2 حذف شود یعنی $a-2=0$ پس $a=2$ و در نتیجه:

$$f(x)=4x+3 \Rightarrow f(2)=4(2)+3=11$$

۲۶۵- گزینهٔ ۴ عبارت «برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطهٔ $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ برقرار باشد» یعنی می‌خواهیم بازه‌ای را پیدا کنیم که تابع در آن بازه نزولی اکید باشد. برای پیداکردن این بازه تابع را رسم می‌کنیم:



$f(x)=\frac{1}{|x|}$

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(0,+\infty)$ نزولی اکید است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعهٔ این بازه باشد که می‌شود بازهٔ $(0,1)$.

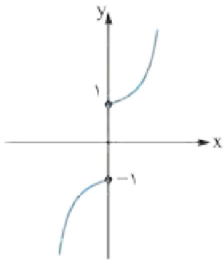
۲۶۶- گزینهٔ ۴ می‌دانیم یک تابع کسری در بازه‌هایی که ریشهٔ مخرج داخل بازه قرار دارد حتماً نایکنوا است. ریشهٔ مخرج تابع $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ برابر $x=3$ است، پس برای این‌که تابع در بازهٔ $(-\infty,a)$ اکیداً نزولی باشد باید $3 \notin (-\infty,a)$ یعنی $a\leq 3$، پس حداکثر a برابر ۳ است.

۲۶۷- گزینهٔ ۱ طبق آن‌چه در سؤال قبل دیدیم ریشهٔ مخرج تابع باید در بازهٔ $(-2,+\infty)$ قرار نداشته باشد و با این حساب فقط (۱) یعنی $y=\frac{x-1}{x+3}$، قابل‌قبول است.

۲۶۸- گزینهٔ ۱ اول ضابطهٔ تابع را به ازای $x>0$ و $x<0$ ساده می‌کنیم:

$$x>0 \Rightarrow f(x)=x(x+\frac{1}{x})=x^2+1$$
$$x<0 \Rightarrow f(x)=-x(x+\frac{1}{x})=-x^2-1$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع اکیداً صعودی است.

۲۶۹- گزینهٔ ۲ از بین گزاره‌ها، (ب) و (پ) همواره درست است؛ چون اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \\ x_1>x_2 \Rightarrow g(x_1)\geq g(x_2)\end{array}\right\} \Rightarrow x_1>x_2$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_1)>(f+g)(x_2)$$

برای نشان‌دادن نادرستی گزاره‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=2x+3 & \text{صعودی} \\ g(x)=-x & \text{نزولی}\end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(x)=x+3 \ \text{صعودی}$$

ت) اگر تابع f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ صعودی اکید است:

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x)=2x+3 & \text{صعودی اکید} \\ g(x)=-3 & \text{ثابت}\end{array}\right. \Rightarrow (f\times g)(x)=-6x-9 \ \text{نزولی اکید}$$

اگر توجه کنید دو گزارهٔ (ب) و (پ) در حقیقت یکسان‌اند:

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

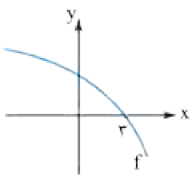
بگویید چرا این دو گزاره یکسان‌اند؟!

۲۷۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در یک تابع صعودی اگر $f(x_1)>f(x_2)$ باشد حتماً داریم $x_1>x_2$ پس:

$$f(3-2a)>f(1+a) \Rightarrow 3-2a>1+a$$
$$\Rightarrow 3a<2 \Rightarrow a<\frac{2}{3}$$

و حالا که $a<\frac{2}{3}$ است، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a برابر صفر است.

۲۷۱- گزینهٔ ۱ f یک تابع نزولی اکید است و $f(3)=0$؛ پس اگر یک نمودار فرضی برای f رسم کنیم:



نتیجه می‌گیریم برای $x<3$ مقدار f مثبت و برای $x>3$ مقدار f منفی است. حالا برای پیداکردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x		۰		۳	+∞
f(x)	+		+	۰	−
x	−	۰	+		+
xf(x)	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow 0\leq x\leq 3$$

۲۷۲- گزینهٔ ۱ f تابعی صعودی است پس از $f(2)=0$ نتیجه می‌گیریم

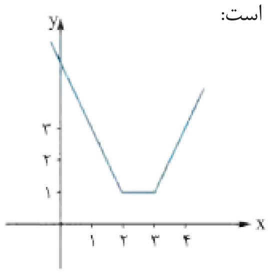
x	−∞		۲		+∞
f(x)		−	۰	+	

حالا عبارت $(x^2-x)f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
$(x^۲-x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	
$(x^۲-x)f(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲-x)f(x)}$ برابر بازه‌ای است که $(x^۲-x)f(x)\geq ۰$ باشد، پس طبق جدول می‌شود $[۰,۱]\cup[۲,+\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

۲۷۳- گزینهٔ ۱ اول نمودار تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ را رسم می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه نزولی‌اکید است:



$$f(x)=|x-۲|+|x-۳|$$

۱	۲	۳	۴
۳	۱	۱	۳

پس تابع در بازهٔ $(-\infty,۲]$ نزولی اکید است و ضابطه‌اش در این بازه برابر است با $f(x)=-x+۲-x+۳=-۲x+۵$، حالا نقاط برخورد تابع f را با تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$، در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=-۲x+۵ \\ y=۲x^۲-x-۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=-۲x+۵$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+x-۱۵=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(۲)(-۱۵)}}{۲(۲)}$$

$$=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۲۱}}{۴}=\frac{-۱\pm ۱۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \\ x=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

چون تعداد نقاط برخورد در بازهٔ $(-\infty,۲]$ را می‌خواهیم، پس فقط جواب $x=-۳$ قابل‌قبول است یعنی می‌شود یک نقطهٔ مشترک.

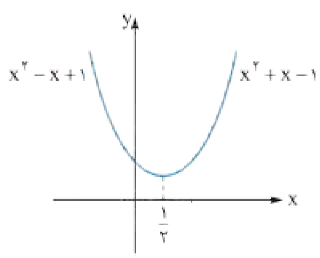
۲۷۴- گزینهٔ ۴ نمودار تابع $f(x)=x^۲-(۲m+۱)x+۱$ یک سهمی است پس به شرطی در بازهٔ $[-۱,۲]$ غیریکنواست که طول رأس سهمی بین -۱ و ۲ باشد:

$$-۱<-\frac{-(۲m+۱)}{۲(۱)}<۲ \Rightarrow -۱<\frac{۲m+۱}{۲}<۲ \Rightarrow -۲<۲m+۱<۴$$

$$\Rightarrow -۳<۲m<۳ \Rightarrow \frac{-۳}{۲}<m<\frac{۳}{۲}$$

۲۷۵- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را به ازای $x\geq ۱$ و $x<۱$ رسم می‌کنیم:

$$y=x^۲+|x-۱|$$



$$x\geq ۱ \Rightarrow y=x^۲+x-۱ \Rightarrow \text{رأس}\ S(-\frac{۱}{۲},-\frac{۵}{۴})$$

$$x<۱ \Rightarrow y=x^۲-x+۱ \Rightarrow \text{رأس}\ S(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$$

حالا با توجه به نمودار تابع در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ صعودی است.

۲۷۶- گزینهٔ ۲ اولاً دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲x+۱)-f(۲-x)}$ برابر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $f(۲x+۱)-f(۲-x)\geq ۰$ است، پس باید $f(۲x+۱)\geq f(۲-x)$ باشد. ثانیاً چون f یک تابع نزولی است پس $f(x_۱)\geq f(x_۲) \Rightarrow x_۱\leq x_۲$:

$$f(۲x+۱)\geq f(۲-x) \Rightarrow ۲x+۱\leq ۲-x$$

$$\Rightarrow ۳x\leq ۱ \Rightarrow x\leq \frac{۱}{۳}$$

۲۷۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲)-f(|x-۱|)}$ برابر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $f(۲)-f(|x-۱|)\geq ۰$ است پس باید $f(۲)\geq f(|x-۱|)$ باشد. ثانیاً چون f یک تابع نزولی است، داریم $f(x_۱)\geq f(x_۲) \Rightarrow x_۱\leq x_۲$:

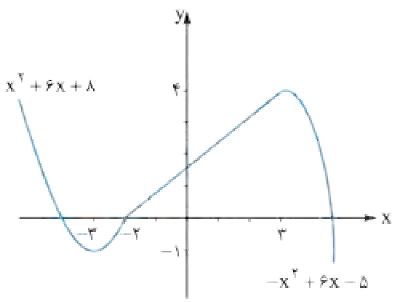
$$f(۲)\geq f(|x-۱|) \Rightarrow ۲\leq |x-۱|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱\geq ۲ \\ x-۱\leq -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۳ \\ x\leq -۱ \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع برابر است با $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$

۲۷۸- گزینهٔ ۳

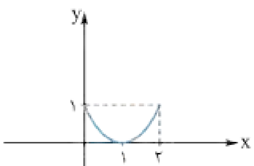
اول نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x^۲+۶x-۵ & x>۳ \\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۸}{۵} & -۲\leq x\leq ۳ \\ x^۲+۶x+۸ & x<-۲ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی اکید است عبارت است از $[-۳,۳]$ که طولش برابر است با $۳-(-۳)=۶$.

۲۷۹- گزینهٔ ۲

با توجه به نمودار، در تابع $y=f(f(x))$ با ورودی $۱\leq x\leq ۲$ مقادیر تابع $f(x)$ اعداد بین $[۰,۱]$ است و چون $f(x)$ در بازهٔ $[۰,۱]$ نزولی است پس تابع $y=f(f(x))$ تابعی است نزولی.



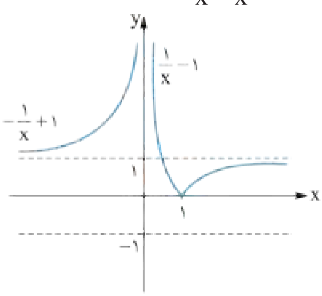
۲۸۰- گزینهٔ ۱ اول ضابطهٔ تابع را به ازای $x>۰$ و $x<۰$ ساده می‌کنیم:

$$f(x)=|\frac{|x|}{x}(\frac{۱}{x}-۱)|$$

$$x>۰ \Rightarrow f(x)=|\frac{x}{x}(\frac{۱}{x}-۱)| \Rightarrow f(x)=|\frac{۱}{x}-۱|$$

$$x<۰ \Rightarrow f(x)=|\frac{-x}{x}(\frac{۱}{x}-۱)| \Rightarrow f(x)=|-\frac{۱}{x}+۱|$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع $f(x)$، تابع در بازهٔ $(۰,۱)$ نزولی است.

۲۸۱- گزینهٔ ۳ اول برای $x \geq \frac{۱}{۲}$ و $x < \frac{۱}{۲}$، قدرمطلق را برداریم:

$$x \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱ \geq ۰$$

$$\Rightarrow f(x) = (۳a-a^۲)x + ۲x - ۱ = (۳a-a^۲+۲)x-۱$$

$$x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱ < ۰$$

$$\Rightarrow f(x) = (۳a-a^۲)x-(۲x-۱) = (۳a-a^۲-۲)x+۱$$

پس نمودار این تابع از دو نیم‌خط ساخته می‌شود برای اکیداً صعودی‌بودن باید شیب این دو نیم‌خط مثبت باشد یعنی:

$$\begin{cases} ۳a-a^۲+۲>۰ \Rightarrow a^۲-۳a-۲<۰ \\ ۳a-a^۲-۲>۰ \Rightarrow a^۲-۳a+۲<۰ \end{cases}$$

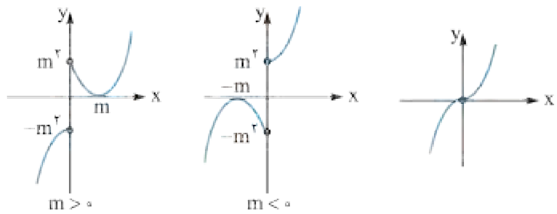
a		$\frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲}$		$\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$	
$a^۲-۳a-۲$	+		−		+
			ج		

a		۱		۲	
$a^۲-۳a+۲$	+		−		+

با توجه به $\sqrt{۱۷} \simeq ۴/۱$ جواب دومی به صورت $(-۰/۵, ۳/۵)$ و جواب اولی $(۱,۲)$ است که اشتراک آن‌ها می‌شود $(۱,۲)$.

۲۸۲- گزینهٔ ۲ حاصل $(x-m)^۲$ دو ضابطهٔ تابع $f(x)=\frac{|x(x-m)^۲|}{x}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است پس ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\frac{|x|}{x}(x-m)^۲$ ساده می‌شود. حالا با توجه به این‌که x می‌تواند $x>۰$ یا $x<۰$ باشد، پس:

$f(x)=\begin{cases}(x-m)^۲ & x>۰\\ -(x-m)^۲ & x<۰\end{cases}$ حالا اگر نمودار تابع را با فرض $m>۰$، $m=۰$ و $m<۰$ رسم کنیم:



می‌بینیم فقط به ازای $m=۰$ تابع صعودی است پس می‌شود به ازای یک مقدار m.

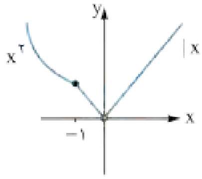
۲۸۳- گزینهٔ ۱ می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{-۱}{x-۲}$ در همسایگی مجانب قائمش به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند پس برای این‌که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی باشد باید a را طوری انتخاب کنیم که بازهٔ $(-\infty,a]$ شامل عدد ۲ (یعنی ریشهٔ مخرج) نشود و چون قرار است a عدد صحیح باشد پس حداکثر a برابر است با ۱.

۲۸۴- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\frac{۲x+a-۱}{x-a+۱}$ در اطراف مجانب قائمش (یعنی ریشهٔ مخرج $x=a-۱$) به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند پس برای این‌که تابع در هر کدام از بازه‌های $(-\infty,۳)$ و $(۳,+\infty)$ یکنوا باشد باید ریشهٔ مخرج جزء هیچ کدام از این بازه‌ها نباشد پس باید $a-۱=۳$ باشد و در نتیجه $a=۴$، حالا $f(۱)$ را پیدا می‌کنیم:

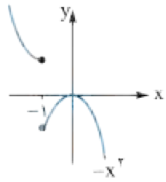
$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۳} \Rightarrow f(۱)=\frac{۵}{-۲}=-\frac{۵}{۲}$$

۲۸۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq -۱\\ g(x) & x>-۱\end{cases}$ را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:

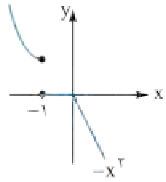
(۱) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq -۱\\ |x| & x>-۱\end{cases} \Rightarrow$



(۲) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq -۱\\ -x^۲ & x>-۱\end{cases} \Rightarrow$



(۳) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq -۱\\ -|x|-x & x>-۱\end{cases} \Rightarrow$



می‌بینیم که تابع f به ازای (۳) نزولی است پس جواب می‌شود (۳)، نمودار (۴) را هم خودتان رسم کنید!

۲۸۶- گزینهٔ ۴ داریم: $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$ و $g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}$. برای پیداکردن $(f+g)(۲)$ باید مقادیر $f(۲)$ و $g(۲)$ را با هم جمع کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}(۲,۵)\in f \Rightarrow f(۲)=۵\\ (۲,۴)\in g \Rightarrow g(۲)=۴\end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(۲)=۹$$

۲۸۷- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ $f+۲g$ به ازای اعضایی از f و g تشکیل می‌شود که مؤلفه‌های اول یکسان دارند. (یعنی اشتراک دامنه‌های f و g)، پس:

$$\left.\begin{array}{l}f=\{(۱,۳),(۲,۵)\}\\ g=\{(۲,۳),(۵,۱)\}\end{array}\right\} \Rightarrow f+۲g=\{(۲,۵+۲(۳))\}=\{(۲,۱۱)\}$$

۲۸۸- گزینهٔ ۳ داریم: $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-۲x}$

و چون $(۲f-g)(-۴)=۲f(-۴)-g(-۴)$، پس:

$$(۲f-g)(-۴)=۲(-۴+۱)-\sqrt{۱-۲(-۴)}=-۶-۳=-۹$$

۲۸۹- گزینهٔ ۳ تعداد زوج‌های مرتب تابع $\frac{۲f}{g}$ برابر تعداد عضوهای دامنهٔ $\frac{۲f}{g}$ است و می‌دانیم دامنهٔ $\frac{۲f}{g}$ برابر است با: $D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}$

پس:

$$\left.\begin{array}{l}f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}\\ g=\{(۱,۵),(۲,۶),(۳,۰)\}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{۲f}{g}}=(\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۲,۳\})-\{۳\}=\{۱,۲\}$$

و حالا که دامنهٔ $\frac{۲f}{g}$ دو عضو دارد پس $\frac{۲f}{g}$ دو زوج‌مرتب دارد.

۲۹۰- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودارهای پیکانی داریم:

$$f=\{(1,-1),(2,1),(3,2),(4,0)\}$$
$$g=\{(1,2),(-1,1),(3,1),(-2,-1)\}$$

تابع $gf-\frac{f}{g}$ را پیدا می‌کنیم. دامنهٔ $gf-\frac{f}{g}$ برابر است با $\{1,3\}$ و:

$$fg-\frac{f}{g}=\{(1,(-1)(2)-\frac{-1}{2}),(3,(2)(1)-\frac{2}{1})\}=\{(1,\frac{-3}{2}),(3,0)\}$$

پس برد $fg-\frac{f}{g}$ برابر است با مجموعهٔ $\{-\frac{3}{2},0\}$.

۲۹۱- گزینهٔ ۲ f را داریم، f^{-1} را هم تشکیل می‌دهیم:

$$f=\{(-1,0),(1,2)(0,1),(2,-1)\}$$
$$f^{-1}=\{(0,-1),(2,1),(1,0),(-1,2)\}$$

پس $f+f^{-1}$ برابر است با: $f+f^{-1}=\{(-1,2),(1,2),(0,0),(2,0)\}$

و $f+f^{-1}$ زوج‌مرتب $(-1,1)$ یعنی ۳ را ندارد.

۲۹۲- گزینهٔ ۲ داریم:

$$f=\{(1,2),(2,4),(3,4)\}$$
$$g=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$

پس $f(1)=2$ و $g(1)=4$، می‌خواهیم مقدار $(\frac{f+g}{3f})(x)$ را به ازای $x=f(1)$ پیدا کنیم و چون $f(1)=2$ پس $x=2$:

$$(\frac{f+g}{3f})(2)=\frac{f(2)+g(2)}{3f(2)}=\frac{4+3}{3(4)}=\frac{7}{12}$$

۲۹۳- گزینهٔ ۴

از $g=\{(1,-3),(2,5),(3,4)\}$ و $(\frac{f}{g})(x)=2x+1$ نتیجه می‌گیریم $g(3)=4$ و $(\frac{f}{g})(3)=7$. از طرف دیگر چون $(\frac{f}{g})(3)=\frac{f(3)}{g(3)}$، پس:

$$(\frac{f}{g})(3)=\frac{f(3)}{g(3)}\Rightarrow 7=\frac{f(3)}{4}\Rightarrow f(3)=28$$

۲۹۴- گزینهٔ ۲ اگر توجه کنیم که $g=f-(f-g)$ می‌توانیم بعضی از اعضای تابع g را به راحتی به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}f=\{(1,4),(2,3),(3,4)\}\\ f-g=\{(1,-4),(3,1)\}\end{array}\right.\Rightarrow g=\{(1,8),(3,3)\}$$

حالا زوج‌های مرتب $h(x)=\frac{1}{g(x)-8}$ را پیدا می‌کنیم. تابع به ازای $x=1$ تعریف نشده است چون $g(1)=8$ و مخرج $h(x)$ برابر صفر می‌شود، پس $h(x)$ فقط شامل یک زوج مرتب با $x=3$ است و داریم:

$$h(3)=\frac{1}{g(3)-8}=\frac{1}{3-8}=-\frac{1}{5}\Rightarrow(3,-\frac{1}{5})\in h$$

شاید g زوج مرتبی مثل $(11,12)$ هم داشته باشد که در $f-g$ نیامده، اما در $\frac{1}{g-8}$ می‌آید. اما دقت کنید که گزینه‌ها فقط مؤلفهٔ اول ۱ و ۳ را دارند و نگران سایر اعضای g نیستیم.

۲۹۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $(f+2g)(-1)=f(-1)-2g(-1)$ پس مقدار $f(-1)$ و $g(-1)$ را با توجه به ضابطه‌هایشان پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ x-1 & x\le 0\end{cases}\Rightarrow f(-1)=-1-1=-2$$

$$g(x)=\begin{cases}x & x\ge -2\\ x-2 & x<-2\end{cases}\Rightarrow g(-1)=-1$$

بنابراین: $(f+2g)(-1)=f(-1)+2g(-1)=-2+2(-1)=-4$

۲۹۶- گزینهٔ ۱ داریم:

$$g=\{(2,-1),(-1,2),(0,1)\} \text{ و } f=\sqrt{1-x^2}$$

می‌دانیم دامنهٔ تابع $(g-f).g$ برابر اشتراک دامنه‌های f و g است. پس دامنهٔ $(g-f).g$ برابر است با $\{-1,0\}$ (چون f به ازای $x=2$ تعریف‌نشده است). تابع $(g-f).g$ را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(-1)=0\\ g(-1)=2\end{array}\right\}\Rightarrow((g-f).g)(-1)=(2-0)(2)=4$$

$$\left.\begin{array}{l}f(0)=1\\ g(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow(g-f)(g)(0)=(1-1)(1)=0$$

پس $(g-f)g=\{(-1,4),(0,0)\}$ و مجموع مقادیر بردش برابر است با $4+0=4$.

۲۹۷- گزینهٔ ۲

داریم $f(x)+g(x)=2x-1$ و $f(x)-g(x)=x+2$، پس می‌توانیم ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=2x-1\\ f(x)-g(x)=x+2\end{cases}\xrightarrow{+}2f(x)=3x+1\Rightarrow f(x)=\frac{3x+1}{2}$$

حالا $f(1)$ را پیدا می‌کنیم: $f(1)=\frac{3(1)+1}{2}=2$

۲۹۸- گزینهٔ ۲ مثل سؤال قبل با استفاده از $f(x)+g(x)=4x^2+1$ و $f(x)-g(x)=2x+1$ ضابطهٔ $g(x)$ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=4x^2+1\\ f(x)-g(x)=2x+1\end{cases}\xrightarrow{(-)}2g(x)=4x^2-2x$$

$$\Rightarrow g(x)=2x^2-x$$

حالا مقدار $g(2)$ را پیدا می‌کنیم: $g(2)=2(2^2)-2=8-2=6$

۲۹۹- گزینهٔ ۳ برد تابع $(fg)(x)$ را باید با توجه به دامنه‌های هر کدام از تابع‌های f و g پیدا کنیم. اول $(fg)(x)$ و دامنه‌اش را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=1+\sqrt{x}\Rightarrow D_f:x\ge 0\\ g(x)=1-\sqrt{x}\Rightarrow D_g:x\ge 0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow(f.g)(x)=(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})=1-x,D_{f.g}:x\ge 0$$

پس $(f\times g)(x)=1-x$ و دامنه‌اش $x\ge 0$ است. بنابراین:

$$x\ge 0\Rightarrow -x\le 0\Rightarrow 1-x\le 1\Rightarrow y\le 1$$

پس برد $(f.g)(x)$ برابر است با $(-\infty,1]$.

۳۰۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$. پس اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\log x\Rightarrow D_f:x>0$$

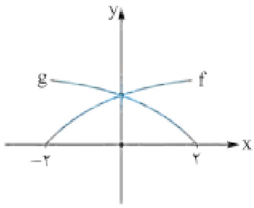
$$g(x)=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow 4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 4$$
$$\Rightarrow|x|\le 2\Rightarrow -2\le x\le 2\Rightarrow D_g:-2\le x\le 2$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ $\frac{f}{g}$: (حواسمان هست که $g(x)$ در $x=۲$ و $x=-۲$ صفر می‌شود)

$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=۰\}$

$=((x>۰)\cap(-۲\le x\le ۲))-\{-۲,۲\}=(۰,۲)$

۳۰۱- گزینهٔ ۴ دامنهٔ مشترک تابع‌های f و g، با توجه به شکل برابر بازهٔ $[-۲,۲]$ است و چون در $x=۰$ مقدار f و g با هم برابر است، پس تابع $y=\frac{(f+g)(x)}{(f-g)(x)}$ در $x=۰$ تعریف نشده است پس دامنهٔ تابع y شامل اعداد صحیح ۲-، ۱-، ۱ و ۲ یعنی چهار عدد صحیح است.



۳۰۲- گزینهٔ ۲ برای پیداکردن برد تابع $(f^۲+g^۲)(x)$ اول باید دامنه‌اش را پیدا کنیم. می‌دانیم $D_{f^۲+g^۲}=D_f\cap D_g$، پس:

$f(x)=\sqrt{۲x-۲} \Rightarrow ۲x-۲\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۱ \Rightarrow D_f=[۱,+\infty)$

$g(x)=\sqrt{۱-x} \Rightarrow ۱-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۱ \Rightarrow D_g=(-\infty,۱]$

پس دامنهٔ $f^۲+g^۲$ برابر است با: $(-\infty,۱]\cap[۱,+\infty)=\{۱\}$

و حالا که دامنهٔ $f^۲+g^۲$ یک عضو دارد پس بردش هم یک عضو دارد.

۳۰۳- گزینهٔ ۲ $f(x)=\sqrt{n-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۳m}$ و $f+g=\{(۱,a)\}$ است، چون $f+g$ فقط یک عضو دارد و دامنه‌های f و g به صورت $D_f=\{x : x\le \frac{n}{۳}\}$ و $D_g:\{x : x\ge ۳m\}$ هستند، پس اشتراک دامنه‌های f و g باید یک عضو داشته باشد، در نتیجه باید:

$۳m=\frac{n}{۳}=۱ \Rightarrow m=\frac{۱}{۳}, n=۳$

حالا چون $f(x)=\sqrt{۳-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ پس $f(۱)=۰$ و $g(۱)=۰$ و در نتیجه $(f+g)(۱)=۰$ پس $a=۰$ است. بنابراین حاصل عبارت $am+n$ برابر است با $(۰)(\frac{۱}{۳})+۳=۳$.

۳۰۴- گزینهٔ ۴ داریم: $f(x)=۱-\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+\sqrt{x}$،

برای پیداکردن ضابطهٔ تابع $\frac{f^۳g^۲+f^۲g^۳}{f+g}$ اول این عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{f^۳g^۲+f^۲g^۳}{f+g}=\frac{f^۲g^۲(f+g)}{f+g}\xrightarrow{(f+g)\neq ۰} f^۲g^۲=(fg)^۲$$

پس باید ضابطهٔ $(fg)^۲$ را پیدا کنیم:

$(f.g)^۲=((۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x}))^۲=(۱-x)^۲$

از طرف دیگر چون $D_f:x\ge ۰$ و $D_g:x\ge ۰$ است پس دامنهٔ تابع $(f.g)^۲$ هم $x\ge ۰$ است. بنابراین:

$$(\frac{f^۳g^۲+f^۲g^۳}{f+g})(x)=(f.g)^۲(x)=(۱-x)^۲ \ , x\ge ۰$$

۳۰۵- گزینهٔ ۴ برای رسم نمودار تابع $(f.g)(x)$ باید ضابطه و دامنه‌اش را پیدا کنیم. اول می‌رویم سراغ f و g:

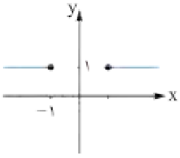
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x+\sqrt{x^۲-۱}\\ g(x)=x-\sqrt{x^۲-۱}\end{array}\right\}\Rightarrow D:x^۲-۱\ge ۰\Rightarrow x^۲\ge ۱\Rightarrow |x|\ge ۱\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge ۱\\ x\le -۱\end{array}\right.$$

پس دامنهٔ تابع f.g برابر است با $x\ge ۱$ یا $x\le -۱$، حالا ضابطهٔ f.g را پیدا می‌کنیم:

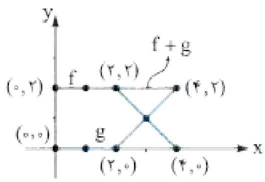
$(f.g)(x)=f(x)\times g(x)$

$=(x+\sqrt{x^۲-۱})(x-\sqrt{x^۲-۱})=x^۲-(x^۲-۱)=۱$

یعنی تابع f.g برابر تابع ثابت $(f.g)(x)=۱$ با دامنهٔ $x\ge ۱$ یا $x\le -۱$ است. پس نمودارش می‌شود:



۳۰۶- گزینهٔ ۳ در درس‌نامه گفتیم که وقتی نمودار f و g هر دو به صورت مجموعه‌ای از چند پاره‌خط هستند. برای رسم نمودار تابع‌های $f\pm g$ کافی است مختصات نقاط گوشه‌ای را با استفاده از نمودارهای f و g پیدا کنیم. پس:



۳۰۷- گزینهٔ ۳ چون هر کدام از نمودارهای دو تابع f و g خط راست‌اند، پس پیداکردن ضابطه‌های f و g، مختصات دو نقطه از f و دو نقطه از g را از روی شکل پیدا می‌کنیم و معادلهٔ f و g را می‌نویسیم:

$f:(۰,۰),(۱,۳)\Rightarrow$ (شیب) $m=\frac{۳-۰}{۱-۰}=۳\Rightarrow y=۳x$

$g:(۰,۰),(۲,۴)\Rightarrow$ (شیب) $m=\frac{۴-۰}{۲-۰}=۲\Rightarrow y=۲x$

حالا ضابطهٔ $(f+g)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۳x+۲x\Rightarrow (f+g)(x)=۵x$

۳۰۸- گزینهٔ ۲ توابع f و g هر دو خط راست‌اند، پس می‌توانیم ضابطهٔ f و g را با استفاده از مختصات نقاط داده‌شده در شکل بنویسیم:

$f:(۰,۰),(۱,۲)\Rightarrow$ (شیب) $m=\frac{۲-۰}{۱-۰}=۲\Rightarrow f(x)=۲x$

$g:(-۲,۰),(۰,۲)\Rightarrow$ (شیب) $m=\frac{۲-۰}{۰-(-۲)}=۱\Rightarrow g(x)=x+۲$

حالا چون $(f+g)\frac{۱}{۲}=f(\frac{۱}{۲})+g(\frac{۱}{۲})$ داریم:

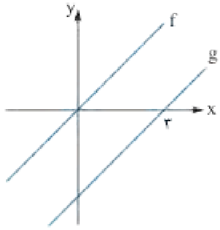
$(f+g)(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲})+g(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}+۲)=۱+\frac{۵}{۲}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$

۳۰۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f به صورت $[۰,+\infty)$ و دامنهٔ g به صورت $[-۱,۴]$ است پس دامنهٔ مشترک می‌شود $[۰,۴]$ و تا همین جا ۲ و ۱ رد می‌شود. حالا برویم سراغ نقطه‌ها: مثلاً $f(۳)=-۲$ و $g(۳)=۴$ است پس $(f+۲g)(۳)=۶$ و ۴ هم نیست. بنابراین جواب می‌شود ۳.

۳۱۰- گزینهٔ ۳ وقتی $(f+g)(x)=۰$ می‌شود (یعنی تابع ثابت صفر می‌شود) که در همهٔ xها مقادیر f و g قرینهٔ یکدیگر باشند. از بین گزینه‌ها فقط ۳ چنین ویژگی‌ای را دارد.

۳۱۱- گزینهٔ ۳ در شکل داده‌شده f و g هر دو خط راست (یعنی از نوع درجهٔ‌اول) هستند. پس fg یک تابع درجه‌دوم است یعنی نمودارش یک سهمی است. f و g محور xها را به ترتیب در $x=۰$ و $x=۳$ قطع می‌کنند پس f.g هم باید محور xها را در همین دو نقطه قطع کند یعنی گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند.

از طرف دیگر شیب f و g هر دو مثبت است. پس ضریب $x^۲$ هم در سهمی (که برابر حاصل‌ضرب شیب f و g است) مثبت است یعنی سهمی باید رو به بالا باشد. پس جواب می‌شود ۳.

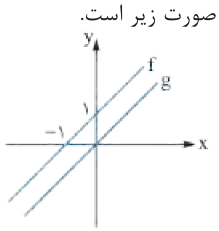


۳۱۲- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، نقاط $(-۲,۰)$ و $(۰,۲)$ روی نمودار f هستند پس ضابطهٔ f برابر است با:

$$(۰,۲),(-۲,۰) \Rightarrow (\text{شیب})\ m=\frac{۰-(۲)}{-۲-۰}=۱ \Rightarrow f(x)=x+۲$$

نمودار g هم خطی است که از مبدأ می‌گذرد پس ضابطهٔ g هم برابر $g(x)=mx$ است. در نتیجه $(f.g)(x)=mx(x+۲)$ و از بین گزینه‌ها، ۳ یعنی نقطهٔ $(-۲,۰)$ در این ضابطه صدق می‌کند.

۳۱۳- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول نمودار f و g به صورت زیر است.

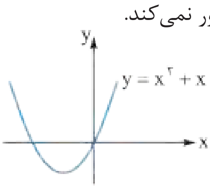


علامت مختصات نقاط روی تابع $\frac{f}{g}$ را می‌توانیم با توجه به علامت عرض‌های نقاط روی f و g تعیین کنیم. برای این‌کار یک جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

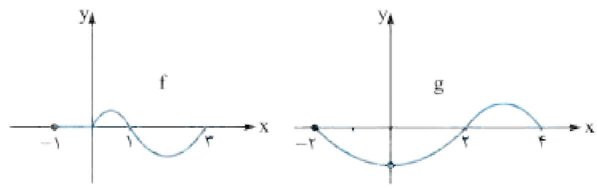
x	$-\infty$		-۱		۰		$+\infty$
f		$-$	۰	$+$		$+$	
g		$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{f}{g}$		$+$	۰	$-$	تن	$+$	
علامت y,x در $\frac{f}{g}$		$x<۰$، $y>۰$		$x<۰$، $y<۰$		$x>۰$، $y>۰$	
ناحیه		دوم		سوم		اول	

پس نمودار از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

راه‌حل دوم با توجه به شکل‌ها $f(x)=x+۱$ و $g(x)=x$ و ضابطهٔ fg به صورت $y=x^۲+x$ است که از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.



۳۱۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم تابع $y=\sqrt{(\frac{f}{g})(x)}$ در بازه‌ای تعریف شده است که $\frac{f}{g}\geq ۰$ باشد. حالا علامت $\frac{f}{g}$ را با توجه به نمودارهای f و g تعیین می‌کنیم:

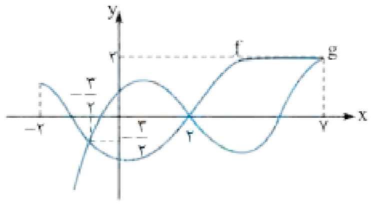


دامنهٔ مشترک دو تابع $[-۱,۳]$ است. جدول را ببینید:

	-۱		۰		۱		۲		۳
f		صفر		$+$	۰	$-$		$-$	۰
g		$-$	ندارد	$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{f}{g}$		صفر ج	ندارد	$-$	۰ ج	$+$ ج	تن	$-$	۰ ج

پس: $(-۱,۰)\cup[۱,۲)\cup\{۳\}$

۳۱۵- گزینهٔ ۴ اول نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



حالا چون تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{f(x)-g(x)}}$ به ازای xهایی تعریف شده است که $f(x)-g(x)>۰$ یا $f(x)>g(x)$ باشد با توجه به نمودار دامنهٔ تعریف تابع y برابر است با $(-۲,-\frac{۳}{۲})\cup(۲,۷)$

۳۱۶- گزینهٔ ۴ اول $\frac{f}{g}$ را با توجه به تابع‌های

$$f=\{(۱,۳),(۴,m),(۲,-n^۲+۱),(-۳,۱)\}$$
$$g=\{(۴,۱-n),(-۲,۱),(۲,۵),(-۳,n+۲)\} \Rightarrow$$

$$\frac{f}{g}=\{(۴,\frac{m}{۱-n}),(۳,\frac{۱}{n+۲}),(۲,\frac{-n^۲+۱}{۵})\}$$

حالا با مقایسهٔ $\frac{f}{g}=\{(۴,\frac{m}{۱-n}),(۲,\frac{-n^۲+۱}{۵})\}$ با $\frac{f}{g}=\{(۴,۵),(۲,-\frac{۳}{۵})\}$

و توجه به $n=-۲$ داریم: $\frac{m}{۳}=۵ \Rightarrow m=۱۵$

پس داریم $(m=۱۵,n=-۲)$ و مقدار $n+m$ برابر است با:

$-۲+۱۵=۱۳$

۳۱۷- گزینهٔ ۲ در نمودار $\frac{g}{f}$ می‌بینیم که $x=۰$ در دامنه نیست پس $x=۰$ ریشهٔ مخرج است یعنی $f(۰)=۰$ و فقط به ۲ و ۳ می‌خورد.

معادلهٔ خط g را بلدیم: $g(x)=\frac{x-۲}{۲}$

با انتخاب $f(x)=x$ داریم: $f(x)=x \Rightarrow \frac{g}{f}(x)=\frac{x-۲}{۲x}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{x}$

و با انتخاب $f(x)=-x$ داریم:

$$f(x)=-x \Rightarrow \frac{g}{f}(x)=\frac{x-۲}{-۲x}=\frac{-۱}{۲}+\frac{۱}{x}$$

که با توجه به شکل صورت سؤال، نمودار شبیه $\frac{۱}{x}$ نیست بلکه دقیقاً قرینه‌اش است پس $f(x)=x$ یعنی ۲ مناسب است.

۳۱۸- گزینهٔ ۲ f یک سهمی رو به پایین با ریشه‌های ۰ و ۲ است پس ضابطه‌اش $f(x)=a(x-۰)(x-۲)$ است. g نیز خطی با شیب منفی و عرض از مبدأ صفر است پس ضابطه‌اش $g(x)=a'x$ است و دقت کنید که a و a' هر دو منفی‌اند. ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{ax(x-۲)}{a'x}$ یعنی $x\neq ۰$ و $\frac{f}{g}(x)=\frac{a}{a'}(x-۲)$ است یعنی از $(۲,۰)$ می‌گذرد و $x=۰$ در دامنه‌اش نیست. راستی $\frac{a}{a'}$ مثبت است پس باید خط با شیب مثبت باشد ۲ مناسب است.

۳۱۹- گزینهٔ ۳ گفتیم برای پیداکردن مقدار $(fog)(۰)$ اول $g(۰)$ را پیدا می‌کنیم و بعد مقدار $f(g(۰))$، پس داریم: $f(x)=\cos x\,,g(x)=\sqrt{x}$

$$(fog)(۰)=f(g(۰))=f(\sqrt{۰})=f(۰)=\cos ۰=۱$$
$$(gof)(۰)=g(f(۰))=g(\cos ۰)=g(۱)=\sqrt{۱}=۱$$

پس: $(fog)(۰)+(gof)(۰)=۱+۱=۲$

۳۲۰- گزینهٔ ۴ تابع (fog) و (gof) را پیدا می‌کنیم:

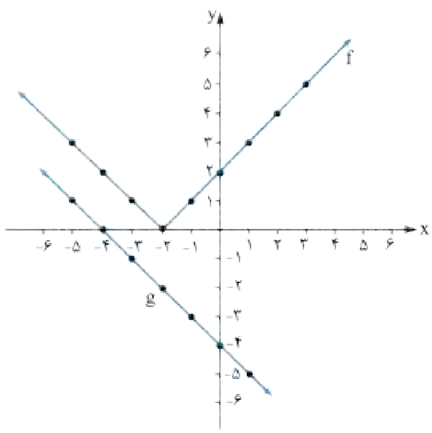
$$f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$$
$$g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$$
$$fog=\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\}\ ,\ gof=\{(۵,۵)\}$$

پس fog، ۴ زوج‌مرتب و gof، ۱ زوج‌مرتب دارد و $۴-۱=۳$.

۳۲۱- گزینهٔ ۲ هر کدام از عامل‌های صورت و مخرج را با استفاده از نمودار پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(-۳)=۱$$
$$(gof)(۰)=g(f(۰))=g(۲)=-۶$$
$$(fof)(۱)=f(f(۱))=f(۳)=۵$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر است با $-۱=\frac{۱+(-۶)}{۵}$.



۳۲۲- گزینهٔ ۳ داریم: $f=\{(-۱,a),(۲,۱),(b,۲)\}$

$$g=\{(-۲,-۱),(c,۳),(-۳,\tfrac{۱}{۲})\}$$

حالا $(fog)(-۲)$ و $(fog)(۱)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}(fog)(-۲)&=f(g(-۲))=f(-۱)=a\\(fog)(۱)&=f(g(۱))=f(\underbrace{۳}_{c=۱})=f(\underbrace{b}_{b=۳})=۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow a+۲=۵$$

$$\Rightarrow a=۳$$

پس مقدار $a+b+c$ برابر است با $۷=۳+۳+۱$.

۳۲۳- گزینهٔ ۳ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $f(۷)=۵\,,g(۴)=۷\ \Rightarrow\ (fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵$

پس (۱) نادرست است.

در مورد (۲) تساوی $fog=gof$ معمولاً برقرار نیست اما بعضی از وقت‌ها حتی اگر $f\neq g$ باشد ممکن است $fog=gof$ باشد، مثلاً

$$f(x)=x^۲\,,g(x)=x^۳$$
$$(fog)(x)=(x^۳)^۲=x^۶$$
$$(gof)(x)=(x^۲)^۳=x^۶$$

پس (۲) هم نادرست است.

در (۳) داریم: $f(x)=\sqrt{x}\,,g(x)=۲x-۱$

$$g(۲)=۳,(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۹)=\sqrt{۹}=۳$$

پس (۳) درست است.

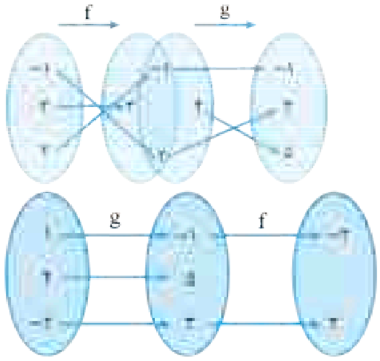
نادرستی (۴) را هم خودتان بررسی کنید.

۳۲۴- گزینهٔ ۴ تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ را به صورت زیر می‌توانیم به صورت دو تابع f و g بنویسیم:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=۳x^۲-۴x+۱\\g(x)&=x^۵\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(x)=(gof)(x)$$

پس در $x\xrightarrow{\boxed{۱}}\boxed{\quad}\xrightarrow{\boxed{۲}}(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ به جای $\boxed{۱}$ باید تابع $۳x^۲-۴x+۱$ و به جای $\boxed{۲}$ باید تابع $x^۵$ را قرار داد.

۳۲۵- گزینهٔ ۳ چون fog را می‌خواهیم بهتر است از تابع g شروع کنیم و شکل را دوباره رسم کنیم:



حالا از روی شکل fog برابر است با: $fog=\{(۱,-۲),(-۲,۳)\}$

۳۲۶- گزینهٔ ۱ داریم $f(x)=[x]$ و $g(x)=\frac{x}{۱-x}$، پس:

$$(fog)(\sqrt{۲})=f(g(\sqrt{۲}))=f(\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}})=[\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}]$$

حالا برای محاسبهٔ $[\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}]$ دو راه داریم:

روش اول: محاسبه با مقدار تقریبی $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$:

$$[\frac{۱/۴}{۱-۱/۴}]=[\frac{۱/۴}{-۰/۴}]=[-۳/۵]=-۴$$

روش دوم: مخرج کسر $\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})}{۱-۲}=-(\sqrt{۲}+۲)$$

حالا چون $۳<\sqrt{۲}+۲<۴$

پس: $[-(\sqrt{۲}+۲)]=-۴$

۳۲۷- گزینهٔ ۱ داریم $f(x)=|x|$ و $g(x)=(x+۱)^۲$، پس:

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})=f(g(۱-\sqrt{۲}))=f((۱-\sqrt{۲}+۱)^۲)$$
$$=f((۲-\sqrt{۲})^۲)=|(۲-\sqrt{۲})^۲|=(۲-\sqrt{۲})^۲=۴-۴\sqrt{۲}+۲=۶-۴\sqrt{۲}$$
$$(gof)(۱-\sqrt{۲})=g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(|۱-\sqrt{۲}|)$$

$$= g(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1+1)^2 = 2$$

پس داریم:

$$(fog)(1-\sqrt{2}) - gof(1-\sqrt{2}) = 6-4\sqrt{2}-2$$

$$= 4-4\sqrt{2} = 4(1-\sqrt{2})$$

۳۲۸- گزینهٔ ۴ داریم $f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geq -1\\ x-4 & x<-1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & x\geq 2\\ x^2+2 & x<2\end{cases}$،

حاصل $(fog-f^2)(-2)=(fog)(-2)-(f(-2))^2$ را پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(-2)=f(g(-2))=f((-2)^2+2)=f(6)=19$$

$$(f(-2))^2=(-2-4)^2=36 \Rightarrow (fog)(-2)-(f(-2))^2=19-36=-17$$

۳۲۹- گزینهٔ ۴ **روش اول** به جای این‌که ضابطهٔ $g(f(x))$ را پیدا کنیم که وقت‌گیر است. مقدار $g(f(x))$ را به ازای یک عدد مشخص (مثلاً $g(f(3))$) پیدا می‌کنیم و بعد با مقدار گزینه‌ها به ازای $x=3$ مقایسه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1},\ g(x)=\frac{2x+2}{2-x}$$

$$g(f(3))=g\left(\frac{6-1}{3+1}\right)=g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{2(\frac{5}{4})+2}{2-\frac{5}{4}}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}}=6$$

حالا از بین گزینه‌ها $2x=2\times 3=6$ است. پس جواب می‌شود ۴.

روش دوم ضابطهٔ $g(f(x))$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(x))=g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}=\frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}}=\frac{6x}{3}=2x$$

۳۳۰- گزینهٔ ۳ داریم $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x)=\tan x$، پس:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

از سال دهم یادمان هست که $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ و $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$،

پس:

$$(fog)(x)=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{|\cos x|}}$$

حال چون $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ است، پس $\cos x<0$:

$$(fog)(x)=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{-\cos x}}=-\sin x$$

۳۳۱- گزینهٔ ۱ قرار شد برای پیداکردن $(gof)(\frac{\pi}{4})$ اول $\frac{\pi}{4}$ را بگذاریم توی f و بعد جوابش را بگذاریم توی g:

$$(gof)\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=g\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

۳۳۲- گزینهٔ ۳ داریم $f(\frac{1}{x})=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x)=2\cos^2 x$، پس:

$$(fog)\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=f\left(2\cos^2\frac{\pi}{3}\right)=f\left(2\times\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

حالا چون ضابطهٔ $f(\frac{1}{x})$ را داریم پس برای پیداکردن مقدار $f(\frac{1}{2})$ باید به جای x بگذاریم ۲:

$$x=2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2(2)-1}{2^2}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۳۳- گزینهٔ ۱ داریم $f(x)=2x+2a$ و $g(x)=x^2+bx+c$،

ضابطهٔ fog را پیدا می‌کنیم و با ضابطهٔ داده‌شده مقایسه می‌کنیم:

$$f(g(x))=f(x^2+bx+c)=2(x^2+bx+c)+2a$$

$$=2x^2+2bx+2c+2a$$

حالا اگر $2x^2+2bx+2c+2a$ بخواهد برابر $2x^2+x+1$ باشد داریم:

$$\begin{cases}2=2\\ 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}\\ 2c+2a=1 \Rightarrow a+c=\frac{1}{2}\end{cases}$$

و در نتیجه: $a+b+c=1$

۳۳۴- گزینهٔ ۱ داریم $f(x)=\begin{cases}x-3 & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$ و $fofof(1)=f(f(f(1)))$.

پس فقط باید با دقت هر مرحله را محاسبه کنیم:

$$f(f(f(1)))=f(f(1-3))=f(f(-2))=f((-2)^2)=f(4)=4-3=1$$

۳۳۵- گزینهٔ ۳ اول با توجه به $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $f=\{(x,2x-1), x\in A\}$ تابع f را به صورت زوج‌های مرتب می‌نویسیم:

$$f=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}$$

حالا fof را پیدا می‌کنیم: $fof=\{(1,1),(2,5),(3,9)\}$

پس fof، سه زوج‌مرتب دارد.

۳۳۶- گزینهٔ ۱ داریم $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\geq 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$، حاصل $fof(\sin^2 x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$fof(\sin^2 x)=f(f(\sin^2 x))$$

$$=f(\sin^2 x-1)=f(-\cos^2 x)=-\cos^2 x+1=\sin^2 x$$

نکته در مرحلهٔ اول چون همیشه $\sin^2 x\geq 0$ از ضابطهٔ بالایی استفاده کردیم. در مرحلهٔ دوم چون $-\cos^2 x<0$ است سراغ ضابطهٔ پایین رفتیم.

۳۳۷- گزینهٔ ۴ **روش اول** داریم $f(x)=|x|-x$، برای پیداکردن $(fof)(x)$ فقط باید حواسمان به علامت عامل‌ها باشد:

$$(fof)(x)=f(f(x))=f(|x|-x)=||x|-x|-(|x|-x)$$

می‌دانیم همیشه $|x|\geq x$، پس $|x|-x\geq 0$ است:

$$||x|-x|-(|x|-x)=|x|-x-|x|+x=0$$

روش دوم چون علامت x مشخص نشده است مقدار تابع را به ازای یک مقدار دلخواه مثلاً $x=1$ پیدا و با گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow (fof)(1)=f(f(1))=f(|1|-1)=f(0)$$

$$|0|-0=0$$

پس جواب ۴ است.

۳۳۸- گزینهٔ ۴ اول در تساوی $f(x)+f(۲)=۳x+۲$ به جای x می‌گذاریم ۲، تا مقدار $f(۲)$ را پیدا کنیم:

$$f(۲)+f(۲)=۳(۲)+۲ \Rightarrow ۲f(۲)=۸ \Rightarrow f(۲)=۴$$

پس: $f(x)+۴=۳x+۲ \Rightarrow f(x)=۳x-۲$

حالا ضابطهٔ $fof(x)$ را پیدا می‌کنیم: $(fof)(x)=۳(۳x-۲)-۲=۹x-۸$

پس $fof(x)=۹x-۸$ یا $y=۹x-۸$ است که محور yها را در نقطهٔ $(۰,-۸)$ قطع می‌کند.

۳۳۹- گزینهٔ ۱

چون f یک تابع درجه‌اول است فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$، در نتیجه:

$$fof(x)=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b$$

حالا $a^۲x+ab+b$ باید برابر $۴x+۱۵$ باشد، پس: $a^۲=۴$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۲, ab+b=۱۵ \Rightarrow ۳b=۱۵ \Rightarrow b=۵ \\ a=-۲, ab+b=۱۵ \Rightarrow -b=۱۵ \Rightarrow b=-۱۵ \end{cases}$$

بنابراین $f(x)$ ممکن است برابر $f(x)=۲x+۵$ یا $f(x)=-۲x-۱۵$ باشد و مقادیر ممکن برای $f(۱)$ برابرند با:

$$f(۱)=۲(۱)+۵=۷$$

$$f(۱)=-۲-۱۵=-۱۷$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مقدارهای ممکن } f(۱)=۷+(-۱۷)=-۱۰$$

۳۴۰- گزینهٔ ۳ $fog(x)$ و $gof(x)$ را با استفاده از $f(x)=۳x+a$ و $g(x)=۲-x$ پیدا و در تساوی داده‌شده جایگزین می‌کنیم:

$$(fog)(x)-(gof)(x)=۶ \Rightarrow f(g(x))-g(f(x))=۶$$

$$\Rightarrow (۳(۲-x)+a)-(۲-(۳x+a))=۶$$

$$\Rightarrow ۶-۳x+a-۲+۳x+a=۶ \Rightarrow ۴+۲a=۶ \Rightarrow a=۱$$

۳۴۱- گزینهٔ ۲ **روش اول** برای حل معادلهٔ $g(f(x))=-۵$ اول جواب معادلهٔ $g(x)=-۵$ را پیدا می‌کنیم و سپس $f(x)$ را برابر با جواب پیداشده قرار می‌دهیم:

$$g(x)=-۵ \Rightarrow ۱-۲x=-۵ \Rightarrow x=۳$$

$$f(x)=۳ \Rightarrow ۳x^۲+x-۱=۳ \Rightarrow ۳x^۲+x-۴=۰$$

سؤال حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ آخر را می‌خواهد که می‌دانیم برابر است با $\frac{c}{a}$ یعنی $-\frac{۴}{۳}$.

روش دوم gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=g(f(x))=۱-۲(۳x^۲+x-۱)$$

$$=۱-۶x^۲-۲x+۲=-۶x^۲-۲x+۳$$

و آن را مساوی -۵ می‌گذاریم:

$$-۶x^۲-۲x+۳=-۵ \Rightarrow ۶x^۲+۲x-۸=۰$$

ضرب ریشه‌ها می‌شود: $P=\frac{c}{a}=-\frac{۸}{۶}=-\frac{۴}{۳}$

۳۴۲- گزینهٔ ۱ داریم $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$، ضابطهٔ $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را پیدا می‌کنیم و برابر هم قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=(gof)(x) \Rightarrow \frac{۲(x+۴)-۱}{(x+۴)+۲}=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴$$

$$\Rightarrow \frac{۲x+۷}{x+۶}=\frac{۶x+۷}{x+۲} \Rightarrow (۲x+۷)(x+۲)=(x+۶)(۶x+۷)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۴x+۷x+۱۴=۶x^۲+۷x+۳۶x+۴۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=-۷ \end{cases}$$

۳۴۳- گزینهٔ ۲ داریم $f(x)=(۲x-۳)^۲$ و $g(x)=x+۲$، ضابطهٔ f و fog را با هم تقاطع می‌دهیم (یعنی با هم برابر قرار می‌دهیم):

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+۲)=(۲(x+۲)-۳)^۲=(۲x+۱)^۲$$

$$\text{تقاطع} \Rightarrow fog=f \Rightarrow (۲x+۱)^۲=(۲x-۳)^۲$$

حالا از سال دهم یادمان هست که برای حل معادلهٔ $A^۲=B^۲$ می‌توانیم از روش ریشه‌گیری استفاده کنیم یعنی:

$A^۲=B^۲ \Rightarrow (A=B)$ یا $(A=-B)$، پس:

$$(۲x+۱)^۲=(۲x-۳)^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۲x-۳ \Rightarrow ۱=-۳ \text{ جواب ندارد.} \\ ۲x+۱=-۲x+۳ \Rightarrow ۴x=۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۳۴۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم ضابطهٔ یک تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ یا همان معادلهٔ خط $y=ax+b$ است. داریم $f(۲)=۰$ و $f(۰)=۱$، پس معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(۰,۱)$ می‌گذرد:

$$(۰,۱),(۲,۰) \Rightarrow \text{شیب } a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۰-۱}{۲-۰}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

پس ضابطهٔ f برابر است با $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱$، حالا معادلهٔ $fof(x)=۰$ را حل می‌کنیم: $f(f(x))=۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}f(x)+۱=۰ \Rightarrow f(x)=۲$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}x+۱=۲ \Rightarrow x=-۲$$

۳۴۵- گزینهٔ ۳ داریم $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^۲+x-۲$، پس برای حل معادلهٔ $g(f(x))=-۲$ داریم:

$$g(x)=-۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=-۲ \Rightarrow x(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۱ \end{cases}$$

حالا ضابطهٔ $f(x)$ را برابر جواب‌های معادلهٔ $g(x)=-۲$ قرار می‌دهیم:

$$[x]+[-x]=۰ \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \;,\; [x]+[-x]=-۱ \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

پس مجموعه‌جواب معادلهٔ $g(f(x))=-۲$ برابر است با $(x\in\mathbb{Z})\cup(x\notin\mathbb{Z})$ یعنی تمام اعداد حقیقی یا $\mathbb{R}$.

نکته برای این‌که جواب g برابر -۲ شود باید مقدار ورودی g، یا صفر باشد یا -۱. خب جواب $f(x)$ همیشه صفر یا -۱ است. (یادتان هست؟) پس این معادله همیشه برقرار است.

۳۴۶- گزینهٔ ۴ همان‌طور که قبلاً هم دیدیم برای پیداکردن جواب‌های معادلهٔ $(gof)(x)=۲۷$، اول معادلهٔ $g(x)=۲۷$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=[x]+[۲-x] \qquad g(x)=۳^x$$

$$g(x)=۲۷ \Rightarrow ۳^x=۲۷ \Rightarrow x=۳$$

حالا جواب به دست آمده را برابر $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$[x]+[۲-x]=۳ \Rightarrow [x]+[-x]+۲=۳ \Rightarrow [x]+[-x]=۱$$

از طرف دیگر می‌دانیم حاصل $[x]+[-x]$ یا برابر صفر است (وقتی که x صحیح باشد) یا برابر (-۱) است (وقتی x صحیح نباشد) پس معادلهٔ $[x]+[-x]=۱$ هرگز جواب ندارد.

۳۴۷- گزینهٔ ۳ برای پیداکردن طول نقاط برخورد نمودار تابع fog با محور xها باید ریشه‌های معادلهٔ $f(g(x))=۰$ را پیدا کنیم، یعنی باید

اول ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آوریم و بعد تابع $g(x)$ را برابر ریشه‌های به دست آمده قرار دهیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ge 0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1 & \text{ق ق}\\ x=-1 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \quad \text{ق ق}$$

$$g(x)=\frac{x-1}{2} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{2}=1 \Rightarrow x=3\\ \frac{x-1}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=0\end{cases}$$

پس نمودار تابع fog محور طول‌ها را در نقاط $x=0$ و $x=3$ قطع می‌کند و مجموع طول نقاط برخورد برابر است با $0+3=3$.

۳۴۸- گزینهٔ ۱ نقاطی از منحنی تابع gof بالای محور xها قرار می‌گیرند که عرضشان مثبت باشد پس اول ضابطهٔ gof را با استفاده از $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ حساب می‌کنیم و بعد نامعادلهٔ $(gof)(x)>0$ را حل می‌کنیم:

$$g(f(x))=g(x^2+3x)=-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2$$

$$g(f(x))>0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+3x)+2>0$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x+4)<0 \Rightarrow -4<x<1$$

۳۴۹- گزینهٔ ۲ مثل سؤال قبل، ضابطهٔ fog را پیدا می‌کنیم و نامعادلهٔ $(fog)(x)<0$ را حل می‌کنیم:

(این بار چون منحنی زیر محور xها است، عرض نقاط باید منفی باشند)

$$(fog)(x)<0 \Rightarrow f(g(x))<0$$

چون تشکیل fog وقت می‌گیرد، اول نامعادلهٔ $f(x)<0$ را حل می‌کنیم:

$$x^2+x-2<0 \Rightarrow (x-1)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<1$$

حالا چون قرار است $f(g(x))<0$ باشد، باید داشته باشیم:

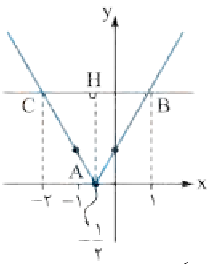
$$-2<g(x)<1 \Rightarrow -2<\frac{1}{2}(x-3)<1$$

$$\Rightarrow -4<x-3<2 \Rightarrow -1<x<5$$

۳۵۰- گزینهٔ ۳ اول ضابطهٔ تابع gof را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^2+x\,,\ g(x)=\sqrt{4x+1}$$

$$(gof)(x)=\sqrt{4(x^2+x)+1}=\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$$



حالا نمودار تابع $y=|2x+1|$ و خط $y=3$ را رسم می‌کنیم تا مساحت ناحیهٔ محدود بین این دو نمودار را پیدا کنیم:

برای پیداکردن مساحت ناحیهٔ محدود بین دو نمودار که مثلث ABC است، باید طول نقاط B و C را پیدا کنیم:

$$|2x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases}2x+1=3 \Rightarrow x=1\\ 2x+1=-3 \Rightarrow x=-2\end{cases}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}(AH\times BC) \Rightarrow S=\frac{1}{2}(3\times 3)=\frac{9}{2}=4/5$$

۳۵۱- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقاطی به طول ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع می‌کند، پس جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ برابر ۶ و $-\frac{1}{4}$ است، از طرف دیگر داریم $g(x)=x-\sqrt{x}$، پس معادلهٔ $(fog)(x)=0$ به صورت زیر است:

$$f(g(x))=0 \Rightarrow \begin{cases}g(x)=6 \Rightarrow x-\sqrt{x}=6\\ g(x)=-\frac{1}{4} \Rightarrow x-\sqrt{x}=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

حالا برای حل هر کدام از معادله‌ها فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t$ و معادله را حل می‌کنیم:

البته می‌توانیم گزینه‌ها را هم امتحان کنیم:

$$x-\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow (t+2)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases}t=-2\\ t=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=-2 \Rightarrow \text{غ ق ق}\\ t=3 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9 \ \text{ق ق}\end{cases}$$

$$x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow t^2-t+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow (t-\frac{1}{2})^2=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \quad \text{ق ق}$$

پس نمودار تابع fog محور طول‌ها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{1}{4}$ قطع می‌کند.

۳۵۲- گزینهٔ ۳

تعداد باکتری‌ها برحسب دما از تابع $N(d)=20d^2-80d+500$ به دست می‌آید و دما نیز از تابع $d(t)=4t+3$ محاسبه می‌شود. پس برای پیداکردن تعداد باکتری‌ها بعد از ۳ ساعت باید $N(d(3))$ را پیدا کنیم:

$$N(d(3))=N(4(3)+3)=N(15)=\underbrace{20(15)^2}_{4500}-\underbrace{80(15)}_{1200}+500=3800$$

۳۵۳- گزینهٔ ۲ الناز دو انتخاب دارد: اول کارت تخفیف بیست درصدی را بدهد و روی قیمت تخفیف‌خورده، ۲۰۰ هزار تومان نقدی تخفیف بگیرد یا برعکس. ببینیم کدام به‌صرفه‌تر است؟

اگر تابع $f(x)$ نشان‌دهندهٔ قیمت لپ‌تاپ بعد از تخفیف ۲۰۰ هزار تومان و تابع $g(x)$ نشان‌دهندهٔ قیمت آن بعد از تخفیف ۲۰ درصدی باشد، داریم:

$$f(x)=x-200000\,,\ g(x)=x-\frac{20}{100}x=\frac{4}{5}x$$

حالا باید $(fog)(2400000)$ و $(gof)(2400000)$ را محاسبه و با هم مقایسه کنیم:

$$(fog)(2400000)=f(\frac{4}{5}\times 2400000)=f(1920000)$$

$$=1920000-200000=1720000$$

$$(gof)(2400000)=g(2400000-200000)=g(2200000)$$

$$=\frac{4}{5}\times 2200000=1760000$$

پس بهترین قیمتی که الناز می‌تواند خریداری کند برابر ۱۷۲۰۰۰۰ است.

۳۵۴- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^2-1=t$، پس $x=\sqrt{t+1}$ و $f(t)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x^2-1)=2x \Rightarrow f(t)=2\sqrt{t+1} \Rightarrow f(x)=2\sqrt{1+x}$$

در تساوی $f(x^{۲}-۱)=۲x$ به جای x می‌گذاریم $\sqrt{x+۱}$ که $x^{۲}-۱$ تبدیل شود به x:

$$f(x^{۲}-۱)=۲x \xrightarrow{x\to\sqrt{x+۱}} f((\sqrt{x+۱})^{۲}-۱)=۲\sqrt{x+۱} \Rightarrow f(x)=۲\sqrt{x+۱}$$

اگر $x=۲$ قرار دهیم، داریم: $\xrightarrow{x=۲} f(۳)=۴$

پس گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که با قراردادن $x=۳$ حاصل آن بشود ۴. در بین گزینه‌ها فقط ۱ این‌طور است

۳۵۵- گزینهٔ ۳ داریم $g(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۸x^{۲}+۶x+۵$، پس داریم $f(۲x+۱)=۸x^{۲}+۶x+۵$ و می‌خواهیم $f(x)$ را پیدا کنیم.

پس: $۲x+۱=t \Rightarrow ۲x=t-۱ \Rightarrow x=\frac{t-۱}{۲}$

با جای‌گذاری داریم:

$$f(t)=۸(\frac{t-۱}{۲})^{۲}+۶(\frac{t-۱}{۲})+۵=۸(\frac{t^{۲}-۲t+۱}{۴})+۳(t-۱)+۵$$

$$=۲t^{۲}-۴t+۲+۳t-۳+۵=۲t^{۲}-t+۴$$

سؤال می‌گوید $f(۲x+۱)=۸x^{۲}+۶x+۵$. پس به ازای $x=۰$ داریم: $f(۱)=۵$

که در بین گزینه‌ها فقط به ۳ می‌خورد.

۳۵۶- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ $f(x-۳)=x^{۲}-۴x+۵$ را داریم و می‌خواهیم $f(۱-x)$ را پیدا کنیم، یعنی باید به جای x عاملی را جایگزین کنیم که $x-۳$ تبدیل شود به $۱-x$، پس به جای x می‌گذاریم $۴-x$:

$$f(x-۳)=(x-۲)^{۲}+۱ \xrightarrow{x\to ۴-x} f(۴-x-۳)$$

$$=(۴-x-۲)^{۲}+۱=(۲-x)^{۲}+۱=x^{۲}-۴x+۴+۱=x^{۲}-۴x+۵$$

۳۵۷- گزینهٔ ۱ داریم: $f(x)=\frac{x}{۲-x}$ و $g(f(x))=\frac{x}{۲}$

پس قرار است از تساوی $g(\frac{x}{۲-x})=\frac{x}{۲}$ ضابطهٔ $g(x)$ را پیدا کنیم:

فرض می‌کنیم $\frac{x}{۲-x}=t$ و x را برحسب t پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x}{۲-x}=t\Rightarrow x=۲t-tx\Rightarrow x+tx=۲t\Rightarrow x(۱+t)=۲t\Rightarrow x=\frac{۲t}{۱+t}$$

$$g(\frac{x}{۲-x})=\frac{x}{۲} \Rightarrow g(t)=\frac{\frac{۲t}{۱+t}}{۲}=\frac{t}{۱+t} \Rightarrow g(x)=\frac{x}{۱+x}$$

در عبارت $g(\frac{x}{۲-x})=\frac{x}{۲}$ با قراردادن $x=۱$ داریم: $g(۱)=\frac{۱}{۲}$

که فقط به ۱ می‌خورد.

۳۵۸- گزینهٔ ۱ داریم: $f(x)=(x+۱)^{۲}$ و $f(g(x))=x^{۴}$

پس می‌توانیم بنویسیم: $f(g(x))=x^{۴} \Rightarrow (g(x)+۱)^{۲}=x^{۴}$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |g(x)+۱|=x^{۲} \Rightarrow \begin{cases} g(x)+۱=x^{۲}\Rightarrow g(x)=x^{۲}-۱ \\ g(x)+۱=-x^{۲}\Rightarrow g(x)=-x^{۲}-۱ \end{cases}$$

۳۵۹- گزینهٔ ۳ داریم: $f(x)=\frac{x}{۱-x}$ و $f(g(x))=\frac{x+۲}{x}$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{g(x)}{۱-g(x)}=\frac{x+۲}{x} \Rightarrow xg(x)=x+۲-xg(x)-۲g(x)$$

$$\Rightarrow ۲xg(x)+۲g(x)=x+۲ \Rightarrow g(x)(۲x+۲)=x+۲$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{x+۲}{۲x+۲}$$

در عبارت $f(g(x))=\frac{g(x)}{۱-g(x)}=\frac{x+۲}{x}$ با قراردادن $x=۱$ داریم:

$$\frac{g(۱)}{۱-g(۱)}=۳ \Rightarrow g(۱)=\frac{۳}{۴}$$

که فقط در ۳ برقرار است.

۳۶۰- گزینهٔ ۱ می‌دانیم برای پیداکردن $(f+g)(x)$ ضابطه‌های f و g را با هم جمع می‌کنیم. برای این کار باید اول ضابطهٔ $g(x)$ را پیدا کنیم.

داریم: $f(x)=x^{۲}-x-۲\,,\,f(g(x))=x^{۲}+x-۲$

پس می‌توانیم بنویسیم: $(g(x))^{۲}-g(x)-۲=x^{۲}+x-۲$

$$\Rightarrow (g(x))^{۲}-x^{۲}-g(x)-x=۰$$

$$\Rightarrow (g(x)-x)(g(x)+x)-(g(x)+x)=۰$$

$$\Rightarrow (g(x)+x)(g(x)-x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x)=-x \\ g(x)=x+۱ \end{cases}$$

حالا با توجه به این‌که ممکن است $g(x)=-x$ یا $g(x)=x+۱$ باشد، پس $(f+g)(x)$ می‌تواند برابر باشد با:

$$(f+g)(x)=x^{۲}-x-۲+(-x)=x^{۲}-۲x-۲$$

$$(f+g)(x)=x^{۲}-x-۲+(x+۱)=x^{۲}-۱$$

۳۶۱- گزینهٔ ۲ داریم $g(x)=۲x-۱$ و $f(g(x))=\frac{x}{x-۳}$، یعنی $f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}$ می‌خواهیم $f(۳)$ را پیدا کنیم، پس به جای x می‌گذاریم ۲ که $f(۳)$ را به طور مستقیم پیدا کنیم:

$$۲x-۱=۳ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f(۳)=\frac{-۲}{۱}=-۲$$

۳۶۲- گزینهٔ ۱ داریم: $f(x)=۲x^{۲}+۴$ و $f(g(x))=۴x^{۲}+۶x$

پس می‌توانیم بنویسیم: $f(g(-۲))=۴(-۲)^{۲}+۶(-۲)\Rightarrow f(g(-۲))=۴$

از طرف دیگر: $f(g(-۲))=۲(g(-۲))^{۲}+۴$ است، پس:

$$۲(g(-۲))^{۲}+۴=۴ \Rightarrow (g(-۲))^{۲}=۰ \Rightarrow g(-۲)=۰$$

۳۶۳- گزینهٔ ۳ داریم:

$f=\{(۵,۲),(۳,۴),(۱,۸),(۶,۹)\}$ و $g(x)=۲f(x+۲)-۳$

و می‌خواهیم از $(gof)(a)=۱۵$ مقدار a را پیدا کنیم. می‌دانیم $(gof)(a)=g(f(a))$. حالا اگر فرض کنیم $f(a)=b$ می‌توانیم بنویسیم:

$$g(f(a))=۱۵ \Rightarrow g(b)=۱۵ \Rightarrow ۲f(b+۲)-۳=۱۵$$

$$\Rightarrow f(b+۲)=۹$$

حالا چون $f(۶)=۹$ است، پس $b+۲=۶$ و در نتیجه $b=۴$. از طرفی $b=f(a)$ بود، پس:

$$b=۴ \Rightarrow f(a)=۴ \Rightarrow a=۳$$

۳۶۴- گزینهٔ ۲ f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$

$g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$

حالا چون $(۴,۲)\in fog$، پس می‌رویم سراغ زوج‌مرتبی از تابع g که با ۴

شروع شود و بعد از قراردادن مقدار g در f به ۲ ختم شود، یعنی:

$$a \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۲ \Rightarrow a=۴$$

از طرف دیگر $(۴,۱)\in gof$ پس:

$$۴ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ۱ \Rightarrow b=۵$$

پس دوتایی مرتب (a,b) برابر است با $(۴,۵)$.

۳۶۵- گزینهٔ ۴

داریم $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و چون $g(f(a))=۵$ است و در g زوج‌مرتب $(۶,۵)$ داریم پس $f(a)=۶$، حالا با توجه به ضابطهٔ f:

$$a+\sqrt{a}=۶ \xrightarrow{a=t^۲} t^۲+t-۶=۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۲ \Rightarrow \sqrt{a}=۲ \Rightarrow a=۴ \\ t=-۳ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۳۶۶- گزینهٔ ۱ داریم:

$g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(-۲,۳),(-۴,-۳)\}$ و چون $g(f(a))=۳$ و زوج‌مرتب $(-۲,۳)\in g$، پس $f(a)=-۲$. از طرفی در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ حاصل ضابطهٔ بالایی (یعنی $\sqrt{x}$) همواره مثبت است و نمی‌تواند برابر ۲− باشد. پس می‌رویم سراغ ضابطهٔ پایینی، یعنی:

$$-\sqrt{-a}=-۲ \Rightarrow \sqrt{-a}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} -a=۴ \Rightarrow a=-۴$$

۳۶۷- گزینهٔ ۳ اگر طبق شکل زیر فرض کنیم $f(x)=۲x-۲$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۱}}$ باید داشته باشیم $g(f(x))=\frac{۴}{۳}$ و از این تساوی مقدار x را پیدا کنیم:

$$x \longrightarrow \underset{f}{\boxed{۲x-۲}} \longrightarrow \underset{g}{\boxed{\frac{x}{\sqrt{x+۱}}}} \longrightarrow \frac{۴}{۳}$$

$$g(f(x))=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)+۱}}=\frac{۴}{۳} \xrightarrow[f(x)=۴]{\text{با عددگذاری}} f(x)=۴$$

بنابراین $۲x-۲=۴$ و در نتیجه $x=۳$.

۳۶۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل $x \longrightarrow \underset{f}{\boxed{۲x-۱}} \longrightarrow \underset{g}{\boxed{?}} \longrightarrow ۳x+۱$ داریم $g(f(x))=۳x+۱$. پس $g(۲x-۱)=۳x+۱$، حالا می‌خواهیم $g(۳)$ را پیدا کنیم یعنی باید به جای x عدد بگذاریم که $۲x-۱=۳$ بشود، پس $x=۲$:

$$x=۲ \Rightarrow g(۳)=۳(۲)+۱=۷$$

۳۶۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل $x \longrightarrow \underset{f}{\boxed{?}} \longrightarrow \underset{g}{\boxed{۳x+۴}} \longrightarrow ۲x$ داریم $g(f(x))=۲x$. پس:

$$g(f(x))=۲x \Rightarrow ۳f(x)+۴=۲x$$

حالا می‌خواهیم $f(۵)$ را پیدا کنیم، پس به جای x می‌گذاریم ۵:

$$x=۵ \Rightarrow ۳f(۵)+۴=۱۰ \Rightarrow ۳f(۵)=۶ \Rightarrow f(۵)=۲$$

۳۷۰- گزینهٔ ۴ داریم:

$f=\{(۱,۵),(۲,۳),(۴,۷),(۸,۹)\}$ و $gof=\{(۱,۱),(۴,۷),(۸,۹)\}$،

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{matrix} ۱ \xrightarrow{gof} ۱ \\ ۴ \xrightarrow{gof} ۷ \\ ۸ \xrightarrow{gof} ۹ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ۱ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۴ \xrightarrow{f} ۷ \xrightarrow{g} ۷ \\ ۸ \xrightarrow{f} ۹ \xrightarrow{g} ۹ \end{matrix}$$

بنابراین تابع g حتماً باید شامل سه زوج‌مرتب $(۵,۱)$ و $(۷,۷)$ و $(۹,۹)$ باشد که می‌شود ۴.

۳۷۱- گزینهٔ ۳ چون $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$، ضابطهٔ gof را به راحتی محاسبه می‌کنیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=(x-۲)^۲-۱=x^۲-۴x+۴-۱=x^۲-۴x+۳$$

برای دامنهٔ gof هم می‌دانیم: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

و چون $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$، بنابراین:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{(x-۲)\in\mathbb{R}}_{\text{همواره‌برقرار است}}\} \Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}$$

۳۷۲- گزینهٔ ۳ اول دامنهٔ هر کدام از تابع‌های f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x-۱} \Rightarrow D_f=[۱,+\infty)$$

$$g(x)=۲x^۲-۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

حالا D_{fog} و D_{gof} را تعیین می‌کنیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R} \mid (۲x^۲-۱)\in[۱,+\infty)\}=\{x \mid ۲x^۲-۱\ge ۱\}$$

$$=\{x \mid x^۲\ge ۱\}=\{x \mid |x|\ge ۱\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[۱,+\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}}_{\text{همواره‌برقرار است}}\}=[۱,+\infty)$$

بنابراین اشتراک دامنهٔ fog و gof می‌شود:

$$((-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty))\cap[۱,+\infty)=[۱,+\infty)$$

۳۷۳- گزینهٔ ۴ اول دامنهٔ تابع‌های f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۳-۲x} \Rightarrow ۳-۲x\ge ۰ \Rightarrow x\le\frac{۳}{۲} \Rightarrow D_f: x\le\frac{۳}{۲}$$

$$g(x)=\frac{۶}{x-۵} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۵\} \text{ یا } D_g: x\ne ۵$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ gof:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\le\frac{۳}{۲} \mid \sqrt{۳-۲x}\ne ۵\}$$

$$=\{x\le\frac{۳}{۲} \mid ۳-۲x\ne ۲۵\}=\{x\le\frac{۳}{۲} \mid x\ne -۱۱\}=(-\infty,\frac{۳}{۲}]-\{-۱۱\}$$

۳۷۴- گزینهٔ ۲ اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲}{x-۱} \Rightarrow D_f: x\ne ۱ \qquad g(x)=\frac{۳}{x} \Rightarrow D_g: x\ne ۰$$

حالا دامنهٔ fog را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\ne ۰ \mid \frac{۳}{x}\ne ۱\}$$

$$=\{x\ne ۰ \mid x\ne ۳\}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$$

پس دامنهٔ تابع fog شامل دو عدد صحیح نیست.

۳۷۵- گزینهٔ ۱ با توجه به صورت سؤال داریم:

$$f(x)=x^2,\ D_f:0\le x\le 1 \qquad g(x)=x^2+1,\ D_g:0\le x\le 2$$

پس دامنهٔ تابع fog برابر است با:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{0\le x\le 2 \mid 0\le x^2+1\le \ \}$$

$$=\{0\le x\le 2 \mid -1\le x^2\le 0\}=\{0\le x\le 2\mid x=0\}=\{0\}$$

۳۷۶- گزینهٔ ۲ باید دامنهٔ تابع fog را تعیین کنیم:

$$f(x)=\sqrt{3-2x}\ \Rightarrow\ D_f:3-2x\ge 0\ \Rightarrow\ x\le\frac{3}{2}$$

$$g(x)=\frac{6}{3x-5}\ \Rightarrow\ D_g:3x-5\ne 0\ \Rightarrow\ x\ne\frac{5}{3}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\ne\frac{5}{3},\ \frac{6}{3x-5}\le\frac{3}{2}\}$$

حالا باید نامعادلهٔ $\frac{6}{3x-5}\le\frac{3}{2}$ را حل کنیم:

$$\frac{6}{3x-5}\le\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ \frac{6}{3x-5}-\frac{3}{2}\le 0\ \Rightarrow\ \frac{12-9x+15}{2(3x-5)}\le 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{-9x+27}{2(3x-5)}\le 0$$

$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
	$-$	ت ن	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow\ x<\frac{5}{3}$ یا $x\ge 3$

پس دامنهٔ تابع fog برابر است با $(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$ و در نتیجه دامنهٔ fog شامل عدد صحیح ۲ نیست.

۳۷۷- گزینهٔ ۱ اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=4x^2-1\ \Rightarrow\ D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{1-x^2}\ \Rightarrow\ 1-x^2\ge 0\ \Rightarrow\ x^2\le 1\Rightarrow\ D_g:-1\le x\le 1$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ gof:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le 4x^2-1\le 1\}$$

$$=\{x\mid 0\le 4x^2\le 2\}=\{x\mid x^2\le\frac{1}{2}\}=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$$

۳۷۸- گزینهٔ ۱ دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\ \Rightarrow\ D_f:x\ne -1$$

$$g(x)=\frac{1}{2-x^2}\ \Rightarrow\ D_g:x\ne\sqrt{2},x\ne-\sqrt{2}$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ fog:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\ne\sqrt{2},x\ne-\sqrt{2}\mid \frac{1}{2-x^2}\ne -\}$$

$$=\{x\ne\pm\sqrt{2}\mid 2-x^2\ne -1\}=\{x\ne\pm\sqrt{2}\mid x^2\ne 3\}$$

$$=\{x\ne\pm\sqrt{2}\mid x\ne\pm\sqrt{3}\}=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$$

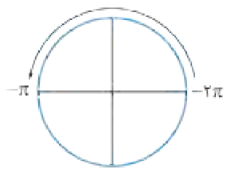
پس تابع fog به ازای چهار عدد حقیقی تعریف نشده است.

۳۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا تعریف دامنهٔ تابع gof را می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin x\ \Rightarrow\ D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ D_g=[0,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \sin x\ge 0\}$$



بنابراین باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که در آن همواره $\sin x\ge 0$ باشد که با توجه به گزینه‌ها می‌شود (۴).

$$-2\pi<x<-\pi\ \Rightarrow\ \sin x>0$$

۳۸۰- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ برابر است با $x\le 1$، تعریف دامنهٔ تابع fof را می‌نویسیم:

$$D_{fof}=\begin{cases} x\in D_f: x\le 1\\ f(x)\in D_f:\sqrt{1-x}\le 1\ \Rightarrow\ 1-x\le 1\ \Rightarrow\ x\ge 0\end{cases}$$

پس $D_{fof}=[0,1]$ که شامل دو عدد صحیح است.

۳۸۱- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x}-x$ برابر است با $x\ge 0$، تعریف دامنهٔ fof را می‌نویسیم:

$$D_{fof}=\begin{cases} x\in D_f: x\ge 0\\ f(x)\in D_f:\sqrt{x}-x\ge 0\ \Rightarrow\ \sqrt{x}\ge x\\ \xrightarrow{\text{توان ۲}}\ x\ge x^2\ \Rightarrow\ x^2-x\le 0\end{cases}$$

$\Rightarrow\ x(x-1)\le 0\ \Rightarrow$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow\ 0\le x\le 1$$

پس دامنهٔ تابع fof برابر است با $[0,1]$.

(نکته) اگر $x=9$ باشد، $f(x)$ می‌شود -6 که به عنوان ورودی نمی‌توانیم آن را دوباره به f بدهیم، پس fof به ازای $x=9$ وجود ندارد و گزینه‌های (۴) و (۲) غلط‌اند. به ازای $x=\frac{1}{4}$ داریم:

$$fof(\frac{1}{4})=f(\underbrace{f(\frac{1}{4})}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}})=f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$$

پس $\frac{1}{4}$ در جواب هست و این یعنی (۱) غلط است.

۳۸۲- گزینهٔ ۱ اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+|x|}\ \Rightarrow\ x+|x|\ge 0$$

$$\xrightarrow{\text{چون } |x|\ge -x}\ \text{همواره برقرار است}\ \Rightarrow\ D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2-4x}\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}\Rightarrow D_g:x\ne 0,x\ne 4$$

حالا دامنهٔ تابع gof را پیدا می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid \sqrt{x+|x|}\ne 0,\sqrt{x+|x|}\ne 4\}$$

معادله‌های $\sqrt{x+|x|}\ne 0$ و $\sqrt{x+|x|}\ne 4$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+|x|}\ne 0\ \Rightarrow\ |x|\ne -x\ \Rightarrow\ x>0$$

$$\sqrt{x+|x|}\ne 4\ \xrightarrow{x>0}\ \sqrt{2x}\ne 4\ \Rightarrow\ 2x\ne 16\ \Rightarrow\ x\ne 8$$

پس دامنهٔ gof به صورت زیر درمی‌آید:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0,x\ne 8\}=(0,8)\cup(8,+\infty)$$

۳۸۳- گزینهٔ ۱ اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}} \Rightarrow -x^۲+x+۲>۰$$
$$\Rightarrow -(x^۲-x-۲)>۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)<۰$$
$$\Rightarrow -۱<x<۲ \Rightarrow D_f:-۱<x<۲$$
$$g(x)=(\frac{۱}{۴})^x \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

حالا دامنهٔ تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid -۱<(\frac{۱}{۴})^x<۲\}$$

در نامعادلهٔ $-۱<(\frac{۱}{۴})^x<۲$ قسمت $-۱<(\frac{۱}{۴})^x$ که همواره برقرار است، پس می‌رویم سراغ $(\frac{۱}{۴})^x<۲$:

$$(\frac{۱}{۴})^x<۲ \Rightarrow (۲^{-۲})^x<۲ \Rightarrow ۲^{-۲x}<۲^۱ \Rightarrow -۲x<۱ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲}$$

پس دامنهٔ fog برابر است با: $D_{fog}=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-\frac{۱}{۲}\}=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$

هم $x=۰$ و هم $x=۱$ در زنجیر $x \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to y$ مُجاز هستند. پس جواب باید شامل این دو عدد باشد و فقط ۱ می‌شود.

۳۸۴- گزینهٔ ۴ اول دامنهٔ تابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۳-x} \Rightarrow ۳-x\ge۰ \Rightarrow D_f: x\le۳$$

$g(x)=\log_۲(x^۲+۲x) \Rightarrow x(x+۲)>۰ \Rightarrow x<-۲$ یا $x>۰$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ تابع fog: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$=\{x<-۲$ یا $x>۰ \mid \log_۲(x^۲+۲x)\le۳\}$

برای پیداکردن جواب شرط دوم دامنهٔ fog باید نامعادلهٔ لگاریتمی $\log_۲(x^۲+۲x)\le۳$ را حل کنیم، از تعریف لگاریتم استفاده می‌کنیم، یعنی:

$$b>۱, \log_b a\le c \Rightarrow a\le b^c$$

پس: $\log_۲(x^۲+۲x)\le۳ \Rightarrow x^۲+۲x\le۲^۳$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۸\le۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۴)\le۰ \Rightarrow -۴\le x\le۲$$

پس دامنهٔ fog برابر می‌شود با:

$D_{fog}=\{x<-۲$ یا $x>۰ \mid -۴\le x\le۲\}=[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

برای fog باید بتوانیم زنجیر مقابل را طی کنیم: $x=-۱$ نمی‌تواند وارد g شود (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند) پس هر گزینه‌ای که $x=-۱$ را داشته باشد غلط است و فقط ۴ می‌ماند.

۳۸۵- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[-۲,۶]$ است پس تابعی مثل $f(g(x))$ وقتی تعریف شده است که $-۲\le g(x)\le۶$ باشد. بنابراین در تابع $f(۲x+۱)$ داریم:

$$-۲\le۲x+۱\le۶ \Rightarrow -۳\le۲x\le۵ \Rightarrow -\frac{۳}{۲}\le x\le\frac{۵}{۲}$$

و در بازهٔ $[-\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}]$ اعداد صحیح عبارت‌اند از: $۲,۱,۰,-۱$؛ یعنی چهار عدد.

۳۸۶- گزینهٔ ۴ اول دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^۲+x+۶}$ را پیدا می‌کنیم:

$$-x^۲+x+۶\ge۰ \Rightarrow -(x^۲-x-۶)\ge۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x+۲)\le۰ \Rightarrow -۲\le x\le۳ \Rightarrow D_f=[-۲,۳]$$

حالا باید از روی D_f، دامنهٔ تابع $y=f(۱-۲x)$ را پیدا کنیم. پس مثل سؤال قبل داریم:

$$-۲\le۱-۲x\le۳ \Rightarrow -۳\le-۲x\le۲ \Rightarrow -۱\le x\le\frac{۳}{۲}$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(۱-۲x)$ برابر است با بازهٔ $[-۱,\frac{۳}{۲}]$.

در $f(۱-۲x)$ با قراردادن $x=۲$ داریم: $f(۱-۲\times۲)=f(-۳)$ اما $f(-۳)$ معنی ندارد (زیر رادیکال منفی است). پس $x=۲$ در دامنهٔ $f(۱-۲x)$ نیست، پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ حذف می‌شوند.

۳۸۷- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع $f(۲-x)$ برابر بازهٔ $[۱,۴]$ است یعنی:

$$۱\le x\le۴ \Rightarrow -۴\le-x\le-۱ \Rightarrow -۲\le۲-x\le۱$$

پس تابع $f(g(x))$ وقتی تعریف شده است که $-۲\le g(x)\le۱$ باشد حالا می‌رویم سراغ $y=۳f(۳x-۴)$، ضریب ۳ قبل از f که در دامنه تأثیر ندارد بنابراین:

$$-۲\le۳x-۴\le۱ \Rightarrow ۲\le۳x\le۵ \Rightarrow \frac{۲}{۳}\le x\le\frac{۵}{۳}$$
$$\Rightarrow D_{f(۳x-۴)}=[\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۳}]$$

۳۸۸- گزینهٔ ۳ اول دامنهٔ $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=۱-\sqrt{x+۱} \Rightarrow D_f: x\ge-۱$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ fof:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x\ge-۱ \mid ۱-\sqrt{x+۱}\ge-۱\}$$
$$=\{x\ge-۱ \mid \sqrt{x+۱}\le۲\}=\{x\ge-۱ \mid x+۱\le۴\}$$
$$=\{x\ge-۱ \mid x\le۳\}=[-۱,۳]$$

پس دامنهٔ تابع fof برابر $[-۱,۳]$ است و حداکثر $b-a$ برای این‌که تابع fof در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شود برابر است با $۳-(-۱)=۴$.

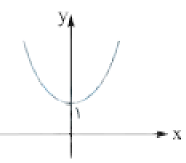
۳۸۹- گزینهٔ ۳ برای پیداکردن برد تابع fog باید ببینیم مقدارهای y در تابع f، وقتی که مقدارهای تابع g را در تابع f قرار می‌دهیم چه محدوده‌ای دارند:

$g(x)=\sqrt{x-۱} \Rightarrow$ برد g: $y\ge۰$

پس باید برد تابع $y=f(g(x))$ را به ازای $g(x)\ge۰$ پیدا کنیم که برابر است با برد تابع $f(x)=x^۲+۱$ وقتی که $x\ge۰$:

$$x\ge۰ \Rightarrow x^۲\ge۰ \Rightarrow x^۲+۱\ge۱ \Rightarrow f(x)\ge۱$$

پس برد تابع f برابر است با بازهٔ $[۱,+\infty)$.



برد سهمی به صورت $y=x^۲+۱$ به صورت $[۱,+\infty)$ است!

در این‌جا ورودی تابع، $g(x)=\sqrt{x-۱}$ است که تمام مقادیر صفر و بیشتر را تولید می‌کند پس برد تابع $(\sqrt{x-۱})^۲+۱$ نیز همان $[۱,+\infty)$ است.

۳۹۰- گزینهٔ ۴ مثل سؤال قبل اول برد g را پیدا می‌کنیم. در تابع $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ اولاً حاصل g همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر (یعنی $g(x)\ge۰$) و ثانیاً چون $x^۲$ یک عامل مثبت است، پس همواره

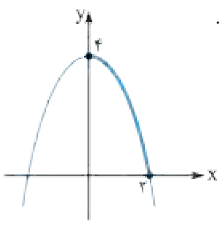
$۴-x^{۲}\le ۴$. بنابراین داریم:

$$۰\le ۴-x^{۲}\le ۴ \Rightarrow ۰\le \sqrt{۴-x^{۲}}\le ۲ \Rightarrow ۰\le g(x)\le ۲$$

حالا برای پیداکردن برد تابع $f(g(x))$ با شرط $۰\le g(x)\le ۲$ باید برد تابع $f(x)$ را به ازای $۰\le x\le ۲$ پیدا کنیم:

$$۰\le x\le ۲ \Rightarrow ۰\le x^{۲}\le ۴ \Rightarrow -۴\le -x^{۲}\le ۰$$
$$\Rightarrow ۰\le ۴-x^{۲}\le ۴ \Rightarrow ۰\le f(x)\le ۴$$

پس برد تابع $f(g(x))$ برابر است با بازهٔ $[۰,۴]$.



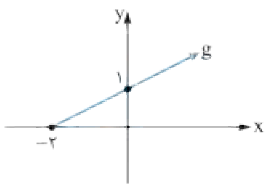
نکته: نمودار سهمی $y=۴-x^{۲}$ را ببینید: الان ورودی این تابع x نیست بلکه $g(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$ است که جوابش همیشه بین صفر و ۲ قرار دارد. پس ما فقط قسمت پررنگ سهمی را داریم.

۳۹۱- گزینهٔ ۲ تعریف دامنهٔ تابع fog عبارت است از:

$$D_{fog}=\begin{cases} x\in D_{g} \\ g(x)\in D_{f}\end{cases}$$

تکلیف شرط اول که مشخص است دامنهٔ g برابر است با بازهٔ $[-۲,+\infty)$ اما در مورد شرط دوم باید ضابطهٔ $g(x)$ را پیدا کنیم و چون دامنهٔ f، مقدارهای $x\ge ۳$ است، نامعادلهٔ $g(x)\ge ۳$ را حل کنیم. $g(x)$ یک تابع خطی است با شیب $\frac{۱}{۲}$ که عرض از مبدأ آن ۱ است، پس:

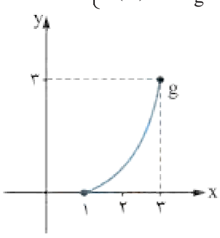
$$g(x)=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow g(x)\ge ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x+۱\ge ۳ \Rightarrow x\ge ۴$$

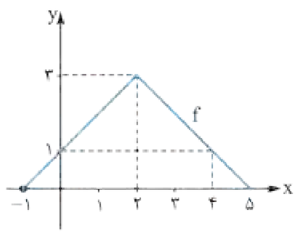


حالا اشتراک بازهٔ $[-۲,+\infty)$ و $x\ge ۴$ می‌شود $x\ge ۴$ پس دامنهٔ تابع fog برابر است با بازهٔ $[۴,+\infty)$.

۳۹۲- گزینهٔ ۴ می‌دانیم تعریف دامنهٔ تابع gof عبارت است از:

$$D_{gof}=\begin{cases} x\in D_{f} \\ f(x)\in D_{g}\end{cases}$$





دامنهٔ تابع f برابر است با $(-۱,۵]$ پس شرط اول یعنی $x\in D_{f}$ می‌شود $-۱<x\le ۵$. حالا می‌رویم سراغ شرط دوم، دامنهٔ تابع g برابر است با بازهٔ $(۱,۳]$. پس باید $۱<f(x)\le ۳$ باشد. حالا از روی نمودار f، xهایی از دامنهٔ f که به ازای آن‌ها، مقادیر تابع f بین ۱ و ۳ باشد عبارت‌اند از:

$\{۰<x<۴\}$

حالا اشتراک شرط اول و دوم یعنی $\{-۱<x\le ۵\}\bigcap\{۰<x<۴\}$ می‌شود $(۰,۴)$.

۳۹۳- گزینهٔ ۲ تابع f نزولی اکید است، پس داریم:

$$x_{۱}<x_{۲} \Rightarrow f(x_{۱})>f(x_{۲})$$

حالا سعی می‌کنیم $f(-x^{۳})$ را بسازیم:

$$x_{۱}<x_{۲} \Rightarrow x_{۱}^{۳}<x_{۲}^{۳} \Rightarrow -x_{۱}^{۳}>-x_{۲}^{۳} \Rightarrow f(-x_{۱}^{۳})<f(-x_{۲}^{۳})$$

بنابراین داریم:

$$x_{۱}<x_{۲} \Rightarrow f(-x_{۱}^{۳})<f(-x_{۲}^{۳})$$

و در نتیجه تابع $y=f(-x^{۳})$ صعودی اکید است.

۳۹۴- گزینهٔ ۱ اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}} \Rightarrow ۱-x^{۲}\ge ۰ \Rightarrow x^{۲}\le ۱ \Rightarrow D_{f}:-۱\le x\le ۱$$
$$g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow D_{g}:x\ge ۰$$

حالا چون دامنهٔ تابع $(f+g)of$ را می‌خواهیم باید دامنهٔ $f+g$ را هم پیدا کنیم. می‌دانیم دامنهٔ $f+g$ برابر است با $D_{f}\bigcap D_{g}$، پس:

$$D_{f+g}=(-۱\le x\le ۱)\bigcap(x\ge ۰)=۰\le x\le ۱$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ $(f+g)of$:

$$D_{(f+g)of}=\{x\in D_{f}\mid f(x)\in D_{f+g}\}$$
$$=\{-۱\le x\le ۱\mid ۰\le\sqrt{۱-x^{۲}}\le ۱\}=\{-۱\le x\le ۱\mid ۰\le ۱-x^{۲}\le ۱\}$$
$$=\{-۱\le x\le ۱\mid -۱\le -x^{۲}\le ۰\}=\{-۱\le x\le ۱\mid ۰\le x^{۲}\le ۱\}$$
$$=\{-۱\le x\le ۱\mid -۱\le x\le ۱\}=[-۱,۱]$$

۳۹۵- گزینهٔ ۲ اول اگر در $g(\frac{۱}{x})=x+\frac{۱}{x}$ به جای x بگذاریم $\frac{۱}{x}$، می‌شود $g(x)=\frac{۱}{x}+x$. حالا دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}} \Rightarrow ۲x-x^{۲}\ge ۰ \Rightarrow x(۲-x)\ge ۰ \Rightarrow ۰\le x\le ۲$$
$$g(x)=\frac{۱}{x}+x \Rightarrow D_{g}:x\ne ۰$$

حالا دامنهٔ تابع fog را پیدا می‌کنیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_{g}\mid g(x)\in D_{f}\}=\{x\ne ۰\mid ۰\le\frac{۱}{x}+x\le ۲\}$$

از طرف دیگر می‌دانیم برای هر عدد حقیقی x همواره داریم:

$$\begin{cases} x>۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{x}\ge ۲ \\ x<۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{x}\le -۲\end{cases}$$

پس نامساوی $۰\le\frac{۱}{x}+x\le ۲$ فقط می‌تواند در حالت $\frac{۱}{x}+x=۲$ جواب داشته باشد که در این صورت باید $x=۱$ باشد، پس:

$$D_{fog}=\{x\ne ۰\mid x=۱\}=\{۱\}$$

بنابراین تابع fog فقط به ازای یک مقدار صحیح $(x=۱)$ تعریف شده است.

۳۹۶- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تعریف f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}} \Rightarrow D_{f}:x\ne ۱,x\ne -۱$$
$$g(x)=\sqrt{x-x^{۲}} \Rightarrow x(۱-x)\ge ۰ \Rightarrow D_{g}:۰\le x\le ۱$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ تابع gof:

$$D_{gof}=\{x\in D_{f}\mid f(x)\in D_{g}\}=\{x\ne \pm ۱\mid ۰\le\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\le ۱\}$$

حالا باید نامعادلهٔ دوگانهٔ (یعنی دو طرف دارد) $۰ \le \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \le ۱$ را حل کنیم:

$$\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \ge ۰ \xrightarrow{۱+x^۲ \ge ۰} ۱-x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

$$\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \le ۱ \Rightarrow \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} - ۱ \le ۰ \Rightarrow \frac{۱+x^۲-۱+x^۲}{۱-x^۲} \le ۰$$

$$\frac{۲x^۲}{۱-x^۲} \le ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱-x^۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \\ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

حالا اشتراک $(-۱ < x < ۱)$ و $(x < -۱$ یا $x > ۱$ یا $x = ۰)$ می‌شود $x = ۰$، پس دامنهٔ gof می‌شود: $D_{gof} = \{x \ne \pm ۱ \mid x = ۰\} = \{۰\}$

۳۹۷- گزینهٔ ۳ اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم: (البته دامنهٔ g را که سؤال خودش داده)

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x} \Rightarrow \begin{cases} ۱-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱ \\ x \ne ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f : \{-۱ \le x \le ۱\} - \{۰\}$$

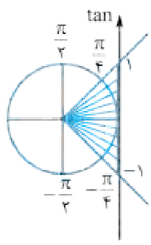
$$g(x) = \tan x, D_g : -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ fog:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \mid -۱ \le \tan x \le ۱, \tan x \ne ۰\}$$

برای پیداکردن جواب نامعادلهٔ $-۱ \le \tan x \le ۱$ می‌رویم سراغ دایرهٔ مثلثاتی:



همان‌طور که در شکل می‌بینیم وقتی $-۱ \le \tan x \le ۱$ است (در بازهٔ $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$) باید $-\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۴}$ باشد و چون باید $\tan x \ne ۰$ باشد پس $x \ne ۰$، یعنی دامنهٔ تابع fog برابر است با:

$$-\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۴}, x \ne ۰ \Rightarrow D_{fog} = [-\frac{\pi}{۴}, ۰) \cup (۰, \frac{\pi}{۴}]$$

۳۹۸- گزینهٔ ۳ اول از روی $f(\frac{x-۱}{x}) = \sqrt{۲x-۱}$، ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x-۱}{x} = t \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{x} = t \Rightarrow \frac{۱}{x} = ۱-t \Rightarrow x = \frac{۱}{۱-t}$$

$$f(\frac{x-۱}{x}) = \sqrt{۲x-۱} \Rightarrow f(t) = \sqrt{۲(\frac{۱}{۱-t}) - ۱}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{۲-۱+t}{۱-t}} \Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{t+۱}{۱-t}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{x+۱}{۱-x}}$$

حالا دامنهٔ $f(x)$ را به دست می‌آوریم: $\frac{x+۱}{۱-x} \ge ۰$

تعیین علامت ⟶

x		−۱		۱		+∞
	−	۰	+	ت‌ن	−	

$$\Rightarrow D_f : -۱ \le x < ۱$$

تساوی $f(\frac{x-۱}{x}) = \sqrt{۲x-۱}$ وقتی تعریف شده است که $x \ge \frac{۱}{۲}$ باشد. حالا اگر از $x \ge \frac{۱}{۲}$، حدود عبارت $\frac{x-۱}{x} = ۱ - \frac{۱}{x}$ را پیدا کنیم در اصل دامنهٔ $f(x)$ را به دست آورده‌ایم، پس:

$$x \ge \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{x} \le ۲ \xrightarrow{\text{چون } x>۰} ۰ < \frac{۱}{x} \le ۲$$

$$\Rightarrow -۲ \le -\frac{۱}{x} < ۰ \Rightarrow -۱ \le ۱ - \frac{۱}{x} < ۱$$

پس دامنهٔ تابع f برابر است با بازهٔ $[-۱, ۱)$.

۳۹۹- گزینهٔ ۲ صورت سؤال دامنهٔ تابع gog را خواسته است پس اول دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \log_۲ x - ۱ : x - ۱ > ۰ \Rightarrow D_f : x > ۱$$

$$g(x) = \sqrt{۳-x} \Rightarrow D_g : x \le ۳$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ gof:

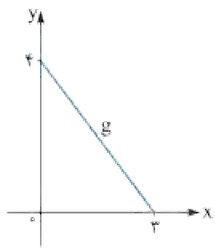
$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x > ۱ \mid \log_۲ x - ۱ \le ۳\}$$

$$= \{x > ۱ \mid x - ۱ \le ۲^۳\} = \{x > ۱ \mid x \le ۹\} = (۱, ۹]$$

در زنجیر $x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to y$ تابع لگاریتمی f مجبورمان می‌کند $x > ۱$ باشد. کافی است برای انتخاب بین گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴، $x = ۵$ و $x = ۱۷$ را کنترل کنیم. (عددها را جوری انتخاب کردیم که جواب $\log_۲(x-۱)$ رند شود.)

۴۰۰- گزینهٔ ۳ تعریف دامنهٔ تابع gog عبارت است از:

$$D_{gog} : \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_g \end{cases}$$



شرط اول که همان دامنهٔ g است یعنی $۰ \le x \le ۳$ و برای شرط دوم باید ضابطهٔ $g(x)$ را پیدا و نامعادلهٔ $۰ \le g(x) \le ۳$ را حل کنیم. $g(x)$ یک تابع خطی است با شیب $-\frac{۴}{۳}$ و عرض از مبدأ ۴، پس $g(x) = -\frac{۴}{۳}x + ۴$، بنابراین داریم:

$$۰ \le -\frac{۴}{۳}x + ۴ \le ۳ \Rightarrow -۴ \le -\frac{۴}{۳}x \le ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۴} \le x \le ۳$$

پس دامنهٔ تابع gog برابر است با بازهٔ $[\frac{۳}{۴}, ۳]$.

$g(۰)$ می‌شود ۴ و $g(g(۰))$ نداریم، پس صفر در D_{gog} نیست و گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست‌اند. $g(۲)$ می‌شود $\frac{۸}{۳}$ که در gog اشکالی ایجاد نمی‌کند پس ۲ نادرست است. (۲ را ندارد).

۴۰۱- گزینهٔ ۳ تابع $(fog)(x)$ وقتی قابل تعریف است که $f(x) \in D_f$ باشد. پس اول دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲ - ۱ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \ge ۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \ge ۱ \Rightarrow \begin{cases} x \ge ۱ \\ x \le -۱ \end{cases}$$

پس از بین گزینه‌ها باید آن را انتخاب کنیم که مقادیر g (یعنی برد g) در نامساوی $g \ge ۱$ یا $g \le -۱$ صدق کنند که می‌شود ۳.

۴۰۲- گزینهٔ ۲

f یک تابع نزولی است پس داریم $x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$، حالا می‌رویم سراغ تابع‌های g و h: $g(x) = x - f(x)$

$$\underbrace{x_۱ \le x_۲}_{(۱)} \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲) \Rightarrow \underbrace{-f(x_۱) \le -f(x_۲)}_{(۲)}$$

(۱) و (۲) را جمع می‌کنیم $\Rightarrow x_۱ - f(x_۱) \le x_۲ - f(x_۲)$

$\Rightarrow g(x_۱) \le g(x_۲)$

پس g یک تابع صعودی است:

$$x_۱ \le x_۲ \Rightarrow -x_۱ \ge -x_۲ \Rightarrow f(-x_۱) \le f(-x_۲)$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \frac{۱}{f(-x_۱)} \ge \frac{۱}{f(-x_۲)} \Rightarrow h(x_۱) \ge h(x_۲)$$

پس h یک تابع نزولی است.

با این حساب g صعودی و h نزولی است یعنی ۴ .

۴۰۳- گزینهٔ ۴ دامنهٔ f به صورت $[-۱,۰]$ است:

x		-۱		۰	
$-x-x^۲$	−	ج	+ ج	ج	−

حالا باید $g(x) \in D_f$ باشد؛ یعنی مقادیر برد g در بازهٔ $[-۱,۰]$ قرار گیرند.

در ۱ برد g به صورت $[\frac{۳}{۴},+\infty)$ است (به رأس سهمی در $S(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$ دقت کنید) پس هرگز $g(x) \in D_f$ نیست.

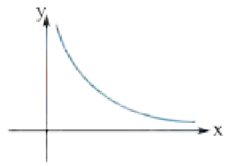
در ۲ مقادیر g همواره مثبت‌اند (برد g به صورت $(۰,+\infty)$ است) پس برد g با دامنهٔ f اشتراک ندارد.

در ۳ نیز مقادیر $۳+\sin x$ همیشه بین ۲ و ۴ هستند (چون $-۱ \le \sin x \le ۱$) پس نمی‌توان آن‌ها را به f داد. (وارد f کرد.)

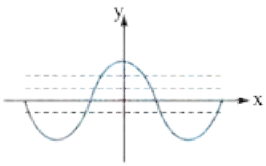
در ۴ مقادیر $g(x) = \sqrt{x-۱}$ همواره بیشتر یا مساوی صفر هستند. فقط به ازای $x = ۱$، مقدار g می‌شود صفر و f روی آن اثر می‌کند. پس داریم:

$f(g(x)) = \{(۱,۰)\}$

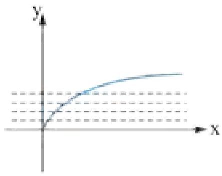
۴۰۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم تابعی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها نمودارش را حداکثر در یک نقطه قطع کند. با این حساب:



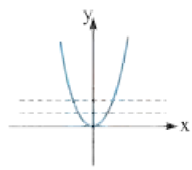
یک‌به‌یک است.



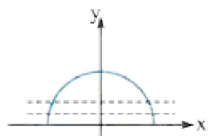
یک‌به‌یک نیست.



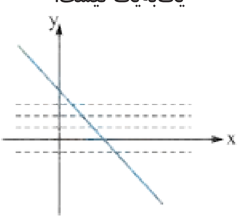
یک‌به‌یک است.



یک‌به‌یک نیست.



یک‌به‌یک نیست.



یک‌به‌یک است.

پس سه تابع از توابعی که نمودارشان داده شده یک‌به‌یک هستند.

۴۰۵- گزینهٔ ۲ در نمودار دو نقطه با عرض یکسان داریم. پس هر کدام از این دو نقطه را که حذف کنیم تابع یک‌به‌یک می‌شود یعنی این کار را می‌توانیم به دو طریق انجام دهیم.

۴۰۶- گزینهٔ ۴

اولاً $f = \{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ باید تابع باشد پس چون $(۳,۲)$ و $(۳,a^۲-a)$ داریم، پس باید $a^۲-a=۲$ باشد:

$$a^۲-a-۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a=-۱ \\ a=۲ \end{cases}$$

مقدار $a=۲$ و $a=-۱$ را قرار می‌دهیم و f را بررسی می‌کنیم:

$a=-۱ \Rightarrow f = \{(۳,۲),(-۱,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$

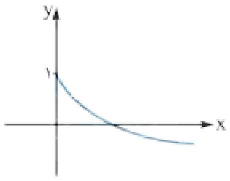
چون $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ داریم پس f تابع نیست.

$a=۲ \Rightarrow f = \{(۳,۲),(۲,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$

f تابع است و ثانیاً برای یک‌به‌یک بودنش چون $(۳,۲)$ و $(b,۲)$ داریم پس باید $b=۳$ باشد، پس دوتایی مرتب (a,b) می‌شود $(۲,۳)$.

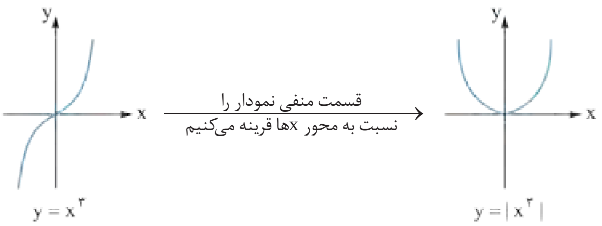
۴۰۷- گزینهٔ ۲ کافی است نمودار تابع را رسم کنیم:

$f(x) = ۱-\sqrt{x} \Rightarrow$



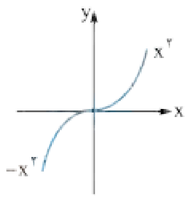
با توجه به نمودار، تابع یک‌به‌یک و نزولی است.

۴۰۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x) = |x^۳|$ را رسم می‌کنیم:



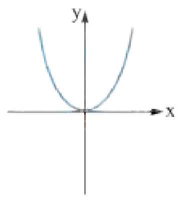
پس تابع $y = |x^۳|$ وارون‌ناپذیر است.

۴۰۹- گزینهٔ ۲ نمودار هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



$y = x|x|$

یک‌به‌یک هست.

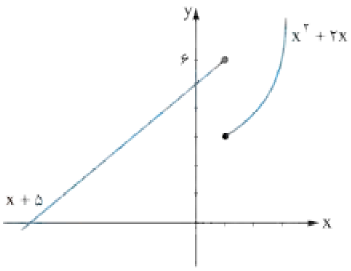


$y = x^۲$

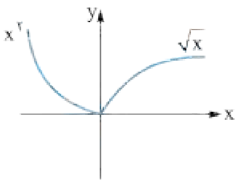
یک‌به‌یک نیست

$$y = \begin{cases} x^۲+۲x & x \ge ۱ \\ x+۵ & x < ۱ \end{cases}$$

یک‌به‌یک نیست

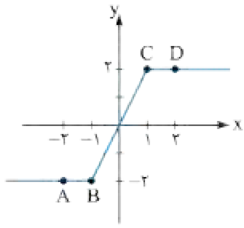


$$y=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ \sqrt{x} & x\ge ۰\end{cases}$$



یک‌به‌یک نیست.

۴۱۰- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=|x+۱|-|x-۱|$ را رسم می‌کنیم:



$f(x)=|x+۱|-|x-۱|$

$A(-۲,-۲)\quad B(-۱,-۲)$

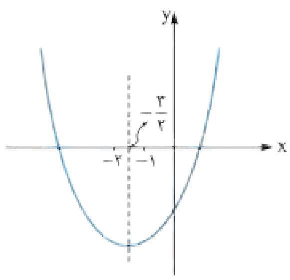
$C(۱,۲)\quad D(۲,۲)$

همان‌طور که در شکل می‌بینیم نمودار تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ یک‌به‌یک است پس حداکثر $b-a$ برای آن‌که تابع در بازهٔ $[b,a]$ یک‌به‌یک باشد برابر است با $۱-(-۱)=۲$.

۴۱۱- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=x^۲-۳x+۵$ یک سهمی است که طول رأسش برابر $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$ است و چون نمودار تابع نسبت به خط $x=\frac{۳}{۲}$ متقارن است پس تابع در بازه‌ای که شامل دو طرف $x=\frac{۳}{۲}$ نباشد (یا $x=\frac{۳}{۲}$ نقطهٔ درونی بازه نباشد) یک‌به‌یک است که با توجه به گزینه‌ها می‌شود بازهٔ $[-۷,۱]$.

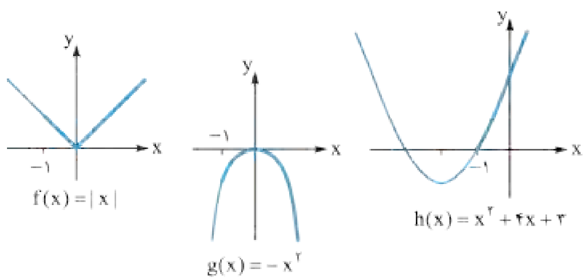
۴۱۲- گزینهٔ ۴ اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(x-۱)(x+۳)+x=x^۲+۲x-۳+x \Rightarrow f(x)=x^۲+۳x-۳$$



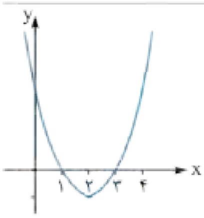
حالا طول رأس تابع $f(x)=x^۲+۳x-۳$ برابر است با: $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۳}{۲}$ و چون تابع در بازهٔ $[a,+\infty)$ یک‌به‌یک است پس حداقل مقدار a برابر می‌شود با $x=-\frac{۳}{۲}$.

۴۱۳- گزینهٔ ۲ نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:



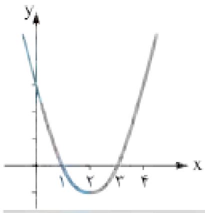
با توجه به نمودارهای رسم‌شده فقط تابع $h(x)$ در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است پس جواب می‌شود یک تابع.

۴۱۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=x^۲-۴x+۳$ را (که یک سهمی است) رسم می‌کنیم:



$S(۲,-۱)\,,\,A(۰,۳)$

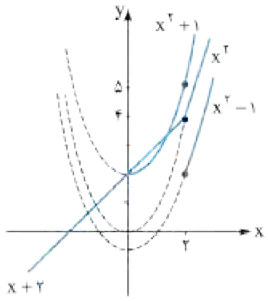
با توجه به نمودار تابع گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ حتماً جواب نیستند چون تابع در این گزینه‌ها یک‌به‌یک نیست. پس جواب می‌شود ۲، چون تابع f در مجموعهٔ داده‌شده یک‌به‌یک است.



در مورد گزینه‌های ۱ و ۴ چون رأس سهمی یعنی $x=۲$ درون این بازه‌ها قرار دارد سهمی یک‌به‌یک نمی‌شود. برای ۳ هم شکل را ببینید.

۴۱۵- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=(a-۱)x^۲-۲x+a+۴$ بر روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است پس نباید درجه‌دوم باشد. (چون نمودار تابع درجه‌دوم یک سهمی است که روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست) یعنی $a=۱$ و در نتیجه $f(x)=-۲x+۵$. بنابراین: $af(۲)=۱\times(-۲(۲)+۵)=۱$

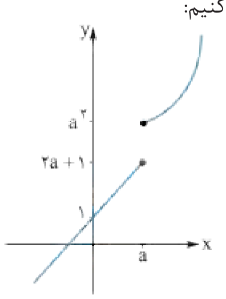
۴۱۶- گزینهٔ ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم: (a را با مقادیر مختلف در نظر می‌گیریم)



$$f(x)=\begin{cases}x^۲+a & x>۲\\ x+۲ & x\le ۲\end{cases}$$

حالا با توجه به شکل به ازای $a<۰$ (که شاخهٔ $x^۲+a$ در سمت راست $x+۲$ پایین‌تر از نقطهٔ $(۲,۴)$ قرار می‌گیرد) تابع یک‌به‌یک نیست پس محدودهٔ a برابر است با $(-\infty,۰)$.

۴۱۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge a\\ ۲x+۱ & x<a\end{cases}$$

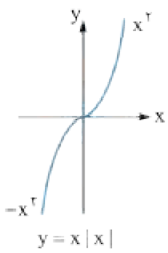
حالا با توجه به نمودار می‌بینیم که f به شرطی یک‌به‌یک است که $a^۲\ge ۲a+۱$ باشد:

$$a^۲\ge ۲a+۱ \Rightarrow a^۲-۲a\ge ۱$$

لازم نیست نامعادلهٔ به دست آمده را حل کنیم، کافی است گزینه‌ها را امتحان کنیم. در بین گزینه‌ها نامساوی $a^۲-۲a\ge ۱$ فقط به ازای $a=\frac{۵}{۲}$ برقرار است پس جواب می‌شود ۴.

۴۱۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم تابعی، تابع وارون دارد که یک‌به‌یک باشد. با این حساب جواب می‌شود ۲. چون هر خط موازی محور xها نمودار تابع داده‌شده در ۲ را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، اما بقیهٔ گزینه‌ها: در ۱ چون نقاط $(۱,۲)$ و $(۰,۲)$ را داریم f یک‌به‌یک نیست. در ۳ چون خط‌های موازی محور xها $(y=a\,,a>۰)$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند یک‌به‌یک نیست و ۴ هم که یک سهمی است و یک‌به‌یک نیست.

۴۱۹- گزینهٔ ۳ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم که ببینیم کدام یک‌به‌یک است. $y=x+|x|$ یک‌به‌یک نیست چون به ازای تمام اعداد منفی مقدار تابع صفر می‌شود. $y=x[x]$ یک‌به‌یک نیست چون به ازای $x\in[۰,۱)$ مقدارش برابر صفر است. $y=x-[x]$ یک‌به‌یک نیست چون به ازای تمام اعداد صحیح مقدار y برابر صفر می‌شود ولی $y=x|x|$ یک‌به‌یک است. برای این‌که مطمئن شویم کافی است نمودارش را رسم کنیم.



۴۲۰- گزینهٔ ۳ در گزینه‌های (۱) و (۲) تابع‌های نمایی و لگاریتمی تابع وارون دارند.

در (۴) تابع $x+[x]$ اکیداً صعودی است و وارون دارد. اما در (۳) با کمی دقت داریم: $\frac{2x+4}{x+2} \overset{x\neq -2}{=\!=} 2$

که تابعی ثابت و غیر یک‌به‌یک است و تابع وارون ندارد.

۴۲۱- گزینهٔ ۴ باید ببینیم کدام‌یک از تابع‌ها یک‌به‌یک هستند. در (۱) یعنی $y=x^4-2x^2$ به ازای $x=1$ و $x=-1$ مقدار $y=-1$ یکسان دارد پس یک‌به‌یک نیست.

(۲) یعنی $y=[x]$ هم که به ازای $k \le x \le k+1$ برابر k است پس یک‌به‌یک نیست.

در (۳) یعنی $y=x^3-3x^2$ مقدار y به ازای $x=0$ و $x=3$ برابر صفر می‌شود پس این هم یک‌به‌یک نیست.

بنابراین جواب می‌شود (۴) یعنی $y=x^3+x+1$ برای دلیلش هم می‌توانیم بگوییم:

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x^3 \text{ صعودی اکید} \\ g(x)=x+1 \text{ صعودی اکید} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=(f+g)(x) \text{ صعودی اکید}$$

$$\Rightarrow y=x^3+x+1 \text{ صعودی اکید}$$

و چون تابع صعودی اکید است پس یکنوای اکید و در نتیجه یک‌به‌یک است.

۴۲۲- گزینهٔ ۴ گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) را که در درس‌نامه داشتیم اما در مورد (۴) همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم اگر f تابعی غیر یک‌به‌یک باشد، f^{-1} (یعنی وارون آن) تابع نیست. پس اگر f تابع باشد f^{-1} به شرطی تابع است که f یک‌به‌یک باشد.

۴۲۳- گزینهٔ ۴ داریم: $f=\{(1,2),(-3,-1),(3,4),(4,-3)\}$

پس $f(3)=4$ و $f^{-1}(-3)=4$ و در نتیجه:

$$2f^{-1}(-3)+f(3)=2(4)+4=12$$

۴۲۴- گزینهٔ ۲ اول f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f=\{(-1,0),(1,2),(0,1),(2,-1)\}$$

$$f^{-1}=\{(0,-1),(2,1),(1,0),(-1,2)\}$$

حالا $f+f^{-1}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f+f^{-1}=\{(-1,2),(1,2),(0,0),(2,0)\}$$

و از بین گزینه‌ها فقط $(-1,1)$ در $f+f^{-1}$ نیست.

۴۲۵- گزینهٔ ۱ تابع $f=\{(2,a+1),(\sqrt{b},3)\}$ دو زوج‌مرتب و تابع $f^{-1}=\{(a-1,c+1),(d,b-2)\}$ هم دو زوج‌مرتب دارند پس هر کدام از زوج‌مرتب‌های f^{-1} باید وارون یکی از زوج‌مرتب‌های f^{-1} باشند (یعنی در زوج‌مرتب f^{-1} جای x و y زوج‌مرتب f عوض شود)، پس:

$$\text{(الف)}\ (2,a+1) \xleftrightarrow{\text{وارون}} (a-1,c+1) \Rightarrow \begin{cases} 2=c+1 \\ a+1=a-1 \end{cases} \Rightarrow \text{غیرممکن}$$

$$\text{(ب)}\ (2,a+1) \xleftrightarrow{\text{وارون}} (d,b-2) \Rightarrow \begin{cases} 2=b-2 \\ a+1=d \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=4 \\ d=5 \end{matrix}$$

$$(\sqrt{b},3) \xleftrightarrow{\text{وارون}} (a-1,c+1) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b}=c+1 \\ 3=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c=1 \\ a=4 \end{matrix}$$

پس $a+b+c+d$ برابر است با: $4+4+1+5=14$

۴۲۶- گزینهٔ ۳ (۳) گزینه‌ها را در رابطهٔ $f(a)=4$ امتحان کنیم.

اگر فرض کنیم $f^{-1}(4)=a$ داریم $f(a)=4$ پس در تابع $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$f(a)=4 \Rightarrow -a+\sqrt{-2a}=4 \Rightarrow \sqrt{-2a}=a+4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a=a^2+8a+16 \Rightarrow a^2+10a+16=0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ a=-2 \end{cases}$$

جواب $a=-8$ قابل‌قبول نیست چون در معادلهٔ $\sqrt{-2a}=a+4$ صدق نمی‌کند پس $a=-2$ یعنی $f^{-1}(4)=-2$.

۴۲۷- گزینهٔ ۳ در تابع $f(x)=\begin{cases} 4x+3 & x\ge 3 \\ x+1 & x<3 \end{cases}$ فرض می‌کنیم $f^{-1}(-5)=a$ باشد در این صورت باید $f(a)=-5$ باشد. پس هر کدام از ضابطه‌ها را برابر -5 قرار می‌دهیم. مقدار به دست آمده برای a در صورتی قابل قبول است که در محدودهٔ تعریف ضابطه باشد:

$$x\ge 3 \Rightarrow 4a+3=-5 \Rightarrow a=-2 \quad \text{غ‌قق}$$

$$x<3 \Rightarrow a+1=-5 \Rightarrow a=-6 \quad \text{قق}$$

پس $f^{-1}(5)=a=-6$.

۴۲۸- گزینهٔ ۱ همان طور که می‌دانیم $f^{-1}(6)=1$ و $f^{-1}(21)=4$؛ پس $f(1)=6$ و $f(4)=21$، یعنی خط $y=ax+b$ از دو نقطهٔ $(1,6)$ و $(4,21)$ می‌گذرد:

$$(1,6),(4,21) \Rightarrow \text{شیب } m=\frac{21-6}{4-1}=5 \Rightarrow y=5x+1$$

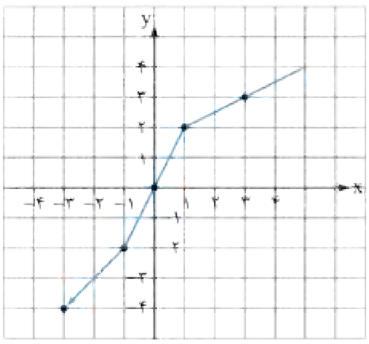
پس $f(x)=ax+b$ باید به شکل $f(x)=5x+1$ باشد و در نتیجه $a=5$ و $b=1$.

۴۲۹- گزینهٔ ۳ کافی است طول و عرض گزینه‌ها را جابه‌جا کنیم و ببینیم آیا نقطهٔ به دست آمده روی نمودار تابع هست یا نه:

(۱) $(2,1) \Rightarrow (1,2)$ ✓

(۲) $(3,3) \Rightarrow (3,3)$ ✓

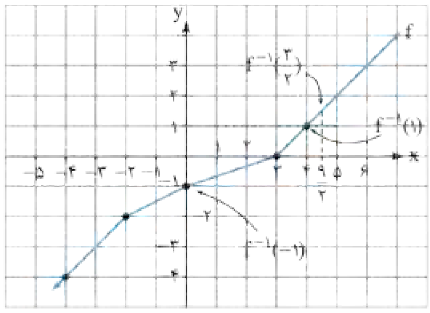
(۳) $(2,2/5) \Rightarrow (2/5,2)$ ✗



$y=f(x)$

پس جواب می‌شود (۳).

۴۳۰- گزینهٔ ۳ حاصل هر کدام از عامل‌های عبارت $\frac{f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)}{f^{-1}(\frac{3}{2})}$ را با استفاده از نمودار f پیدا می‌کنیم:



$y=f(x)$

$f^{-1}(۱)=a \Rightarrow f(a)=۱ \Rightarrow a=۴$

$f^{-1}(-۱)=b \Rightarrow f(b)=-۱ \Rightarrow b=۰$

$f^{-1}(\frac{۳}{۲})=c \Rightarrow f(c)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow c=\frac{۹}{۲}$

پس:

$$\frac{f^{-1}(۱)+f^{-1}(-۱)}{f^{-1}(\frac{۳}{۲})}=\frac{۴+۰}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۸}{۹}$$

۴۳۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر نمودار f از نقطهٔ (a,b) بگذرد نمودار f^{-1} از نقطهٔ (b,a) می‌گذرد. پس کافی است جابه‌جا شدهٔ مختصات گزینه‌ها را در ضابطهٔ f امتحان کنیم: $f(x)=۲x^۳+x-۱$

۱) $(۱,۲) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (۲,۱) \Rightarrow ۱=۲(۲)^۳+۲-۱$ ✗

۲) $(۰,-۱) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (-۱,۰) \Rightarrow ۰=۲(-۱)^۳+(-۱)-۱$ ✗

۳) $(۰,۱) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (۱,۰) \Rightarrow ۰=۲(۱)^۳+۱-۱$ ✗

۴) $(۲,۱) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (۱,۲) \Rightarrow ۲=۲(۱)^۳+۱-۱$ ✓

پس نمودار f^{-1} از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد.

۴۳۲- گزینهٔ ۲ سؤال گفته نمودار f^{-1} محور عرض‌ها را در نقطهٔ $(۰,-۱)$ قطع می‌کند، پس نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax+۲a$ محور طول‌ها را در نقطهٔ $(-۱,۰)$ قطع می‌کند. بنابراین: $۰=-۱-a+۲a \Rightarrow a=۱$

۴۳۳- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(a+۲,a)$ می‌گذرد. پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(a,a+۲)$ می‌گذرد، در نتیجه:

$$y=\frac{x-۴}{۲x-۱} \xrightarrow{(a,a+۲)} a+۲=\frac{a-۴}{۲a-۱}$$

$$\Rightarrow (a+۲)(۲a-۱)=a-۴ \Rightarrow ۲a^۲-a+۴a-۲=a-۴$$

$$\Rightarrow ۲a^۲+۲a+۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} a^۲+a+۱=۰$$

$\Rightarrow \Delta=(۱)^۲-۴(۱)(۱)<۰ \Rightarrow$ جواب ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار a، نمودار f از نقطهٔ $(a,a+۲)$ نمی‌گذرد.

۴۳۴- گزینهٔ ۲

داریم $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $f^{-1}(g(۲a))=۶$، پس $f(۶)=g(۲a)$. در نتیجه $g(۲a)=۳$. از طرف دیگر چون $g(x)=\frac{x}{x-۱}$، پس:

$$g(۲a)=\frac{۲a}{۲a-۱}=۳ \Rightarrow ۲a=۶a-۳ \Rightarrow -۴a=-۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۴۳۵- گزینهٔ ۱ اگر $x=f^{-1}(۳)$ قرار دهیم داریم:

$$f(f^{-1}(۳))=f^{-1}(۳)+۲f^{-1}(۳)-۱$$

$$\Rightarrow ۳=۳f^{-1}(۳)-۱ \Rightarrow f^{-1}(۳)=\frac{۴}{۳}$$

پس $f(x)=\frac{۴}{۳}+۲x-۱$ و مقدار $f(۳)$ می‌شود، $\frac{۴}{۳}+۵=\frac{۱۹}{۳}$

۴۳۶- گزینهٔ ۱ چون تابع f و تابع وارونش یعنی f^{-1} در نقطهٔ $(۱,۲)$ یکدیگر را قطع می‌کنند پس نقطهٔ $(۱,۲)$ در ضابطهٔ هر دو تابع صدق می‌کند، یعنی $f(۱)=۲$ و $f^{-1}(۱)=۲$ و در نتیجه $f^{-1}(۲)=۱$ و $f(۲)=۱$.

۴۳۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f و تابع وارونش یعنی f^{-1} در نقطهٔ $(۱,۲)$ متقاطع‌اند، پس $(۱,۲)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1}. در نتیجه نقطهٔ $(۲,۱)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1}، بنابراین:

$$f(x)=\sqrt{ax+b}$$

$$\begin{cases}(۱,۲) \Rightarrow ۲=\sqrt{a+b} \Rightarrow \\ (۲,۱) \Rightarrow ۱=\sqrt{۲a+b} \Rightarrow\end{cases} \begin{cases}a+b=۴\\ ۲a+b=۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} -a=۳ \Rightarrow a=-۳ \Rightarrow b=۷$$

بنابراین: $a+b=۴$.

از همان نقطهٔ $(۱,۲)$ هم به این نتیجه رسیدیم که $a+b=۴$ و لازم نبود مقدار a و b را جداگانه حساب کنیم.

۴۳۸- گزینهٔ ۴

قرار است $g(x)=f^{-1}(x)$ باشد، پس $f(x)=ax+\sqrt{x^۲+۱}$ و $f^{-1}(x)=\frac{x^۲+b}{۲x}$.

حالا با توجه به $x>۰$ دو مقدار برای x در نظر می‌گیریم:

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)=a+\sqrt{۲} \Rightarrow f^{-1}(a+\sqrt{۲})=۱$$

$$\Rightarrow ۱=\frac{(a+\sqrt{۲})^۲+b}{۲(a+\sqrt{۲})}$$

$$x=\sqrt{۳} \Rightarrow f(\sqrt{۳})=a\sqrt{۳}+۲ \Rightarrow f^{-1}(a\sqrt{۳}+۲)=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{(a\sqrt{۳}+۲)^۲+b}{۲(a\sqrt{۳}+۲)}$$

در $f(x)$ با قرارداد $x=۰$ داریم: $f(۰)=۱$ پس باید در g داشته باشیم $g(۱)=۰$ بنابراین $b=-۱$. حالا در g با قرارداد $x=۲$ داریم:

$g(۲)=\frac{۲^۲-۱}{۲(۲)}=\frac{۳}{۴}$ پس $f(\frac{۳}{۴})$ باید ۲ باشد.

$$f(\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۴}a+\sqrt{\underbrace{(\frac{۳}{۴})^۲+۱}_{\frac{۲۵}{۱۶}}}=\frac{۳}{۴}a+\frac{۵}{۴}=۲ \Rightarrow a=۱$$

و در نتیجه: $a+b=۰$

توابع $g(x)=\frac{x^۲+b}{۲x}$ و $f(x)=ax+\sqrt{x^۲+۱}$ وارون یکدیگرند. وارون تابع g را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{x^۲+b}{۲x} \Rightarrow ۲xy=x^۲+b \Rightarrow x^۲-۲xy+b=۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-۲y) \pm \sqrt{(-۲y)^۲ - ۴(۱)(b)}}{۲(۱)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲y \pm \sqrt{۴(y^۲ - b)}}{۲} = \frac{۲(y \pm \sqrt{y^۲ - b})}{۲}$$

$$\Rightarrow x = y \pm \sqrt{y^۲ - b} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x \pm \sqrt{x^۲ - b}$$

حالا با توجه به این‌که وارون تابع $g(x)$ تابع $f(x) = ax + \sqrt{x^۲ + ۱}$ است پس اولاً $y = x + \sqrt{x^۲ - b}$ قابل‌قبول است و ثانیاً با مقایسهٔ ضابطه داریم:

$$\begin{cases} f(x) = ax + \sqrt{x^۲ + ۱} \\ g(x) = x + \sqrt{x^۲ - b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \end{cases}$$

پس $a + b = ۱ + (-۱) = ۰$.

۴۳۹- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد وارون تابع و محور xها در تابع وارون $y = ۰$ باشد پس در خود تابع $y = x^۳ + ۲x - ۳$ داریم $x = ۰$ و چون $x = ۰ \Rightarrow y = -۳$ پس وارون تابع محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۴۴۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم برد $f^{-۱}$ برابر دامنهٔ f است. دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ برابر است با: $x - ۲ \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۲ \Rightarrow [۲, +\infty)$

پس برد تابع $f^{-۱}$ هم برابر است با بازهٔ $[۲, +\infty)$.

۴۴۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر برد f است. پس برای پیداکردن دامنهٔ تابع معکوس تابع $f(x) = ۳ - \sqrt{x + ۱}$ باید برد تابع f را پیدا کنیم.

می‌دانیم حاصل یک رادیکال همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

$$\sqrt{x + ۱} \ge ۰ \Rightarrow -\sqrt{x + ۱} \le ۰ \Rightarrow ۳ - \sqrt{x + ۱} \le ۳ \Rightarrow f(x) \le ۳$$

پس برد f برابر بازهٔ $(-\infty, ۳]$ و در نتیجه دامنهٔ $f^{-۱}$ هم برابر بازهٔ $(-\infty, ۳]$ است.

۴۴۲- گزینهٔ ۲ باید دامنه و برد $g^{-۱}$ را پیدا کنیم و چون $D_{g^{-۱}} = R_f$ و $R_{g^{-۱}} = D_f$ پس باید دامنه و برد $g(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲}$ را پیدا کنیم:

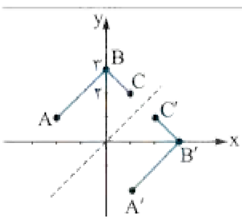
$$g(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه}: x \ge ۲ \Rightarrow D_f : [۲, +\infty) \\ \text{برد}: \sqrt{x - ۲} \ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x - ۲} + ۱ \ge ۱ \\ \text{برد}: y \ge ۱ \Rightarrow R_f = [۱, +\infty) \end{cases}$$

پس $D_{f^{-۱}} = [۱, +\infty)$ و $R_{f^{-۱}} = [۲, +\infty)$ و در دامنه و برد $f^{-۱}$ فقط یک عضو صحیح غیرمشترک هست.

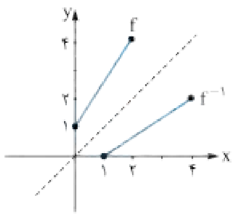
۴۴۳- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع $f(x) = [-x]x + [x]$ برابر بازهٔ $(۲, ۳)$ است و چون $۲ < x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲$ و $[-x] = -۳$ می‌توانیم بنویسیم $f(x) = -۳x + ۲$. پس داریم:

$$f^{-۱}(-۵) = a \Rightarrow f(a) = -۵ \Rightarrow -۳a + ۲ = -۵ \Rightarrow a = \frac{۷}{۳}$$

۴۴۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم برای رسم نمودار وارون یک تابع باید قرینهٔ آن را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) رسم کنیم:



۴۴۵- گزینهٔ ۱ طبق شکل روبه‌رو نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقاط $(۱, ۰)$ و $(۴, ۲)$ می‌گذرد. پس ضابطه‌اش برابر است با:



$(۱, ۰) , (۴, ۲)$

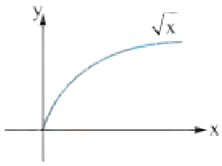
$$\Rightarrow (\text{شیب})\, m = \frac{۲ - ۰}{۴ - ۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۲}{۳}$$

اول ضابطهٔ خود تابع را پیدا می‌کنیم. تابع f پاره‌خطی است که از نقاط $(۰, ۱)$ و $(۲, ۴)$ می‌گذرد، پس:

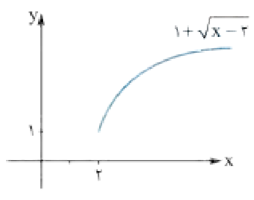
$$(۰, ۱) , (۲, ۴) \Rightarrow (\text{شیب})\, m = \frac{۴ - ۱}{۲ - ۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + ۱$$

حالا ضابطهٔ $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم: $y = \frac{۳}{۲}x + ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x = y - ۱ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}y - \frac{۲}{۳} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۲}{۳}$

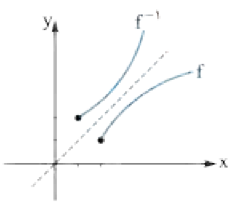
۴۴۶- گزینهٔ ۱ اول نمودار تابع $f(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲}$ را با انتقال نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ رسم می‌کنیم و بعد قرینه‌اش را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم، تا نمودار $f^{-۱}$ به دست آید:



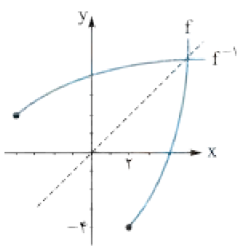
انتقال (+۲) واحد در راستای محور xها و انتقال (+۱) واحد در راستای محور yها $\longrightarrow$



$\Rightarrow$



۴۴۷- گزینهٔ ۲ اول نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۴x$ را با دامنهٔ $[۲, +\infty)$ رسم می‌کنیم. $y = x^۲ - ۴x$ یک سهمی است که طول رأسش برابر $x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲(۱)} = ۲$ است و:



$$y = ۲^۲ - ۴(۲) = ۴ - ۸ = -۴$$

$$\Rightarrow S(۲, -۴)$$

$y = ۰$ (برخورد با محورطول‌ها)

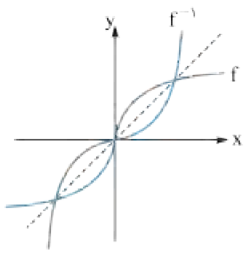
$$\Rightarrow x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases} \Rightarrow (۴, ۰)$$

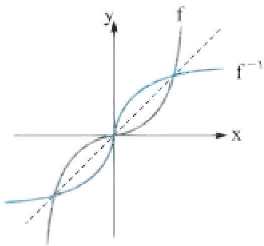
حالا نمودار $f^{-۱}$ را با رسم قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل رسم‌شده نمودار تابع $f^{-۱}$ از ناحیه‌های اول و دوم می‌گذرد.

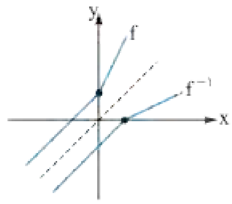
۴۴۸- گزینهٔ ۳ اول نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \ge ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم. نمودار تابع معکوس f، قرینهٔ نمودار آن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است:



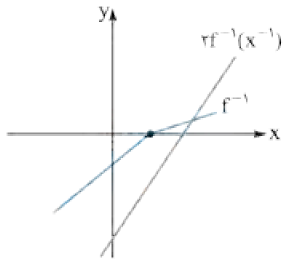
۴۴۹- گزینهٔ ۳ اول نمودار تابع $f(x)=x|x|$ که برابر است با $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\ge ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$ را رسم می‌کنیم. نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $y=x$ است:



۴۵۰- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار $f^{-۱}$ کافی است وارون نمودار f را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم کنیم:

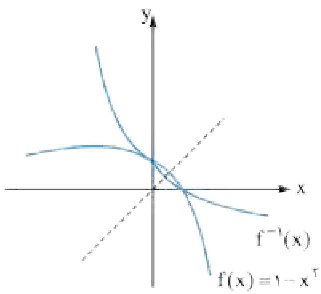


حالا دقت کنید که ما $۲f^{-۱}(x-۱)$ را می‌خواهیم پس باید $f^{-۱}$ را یک واحد به راست برده و عرض‌ها را ۲ برابر کنیم:

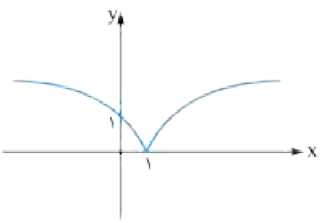


که از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

۴۵۱- گزینهٔ ۴ اول نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+۱$ را رسم می‌کنیم و سپس قرینهٔ نمودار رسم‌شده نسبت به خط $y=x$ را می‌کشیم:



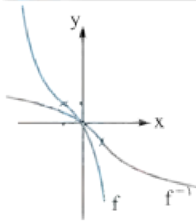
حالا نمودار $y=|f^{-۱}(x)|$ را رسم می‌کنیم؛ یعنی قسمت‌های با y منفی را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



پس جواب ۱ است.

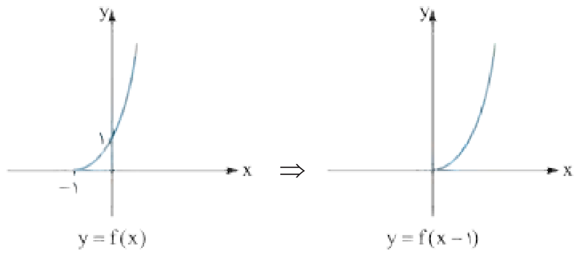
۴۵۲- گزینهٔ ۴ هر سه جمله را در درس‌نامه داشتیم. هر سه درست‌اند.

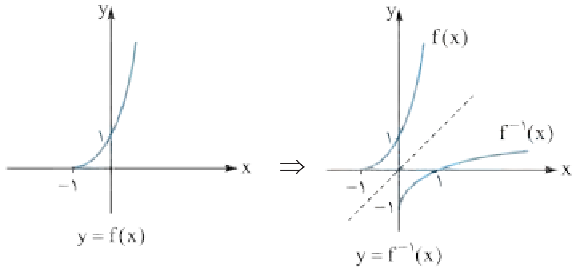
۴۵۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=-(x+۱)^{۳}+۱$ و نمودار تابع معکوس را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

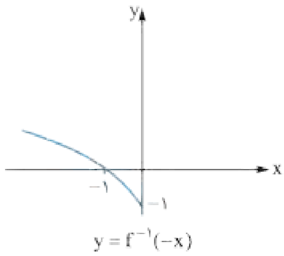


همان‌طور که می‌بینیم منحنی تابع و وارونش یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

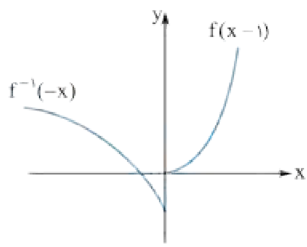
۴۵۴- گزینهٔ ۴ داریم $f(x)=(x+۱)^{۲}$ پس $f(x-۱)=x^{۲}$ و از طرف دیگر برای رسم $f^{-۱}(-x)$ اول نمودار $f(x)$ و سپس نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ یعنی قرینهٔ نمودار f نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را رسم می‌کنیم و بعد نمودار $f^{-۱}(-x)$ یعنی قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را نسبت به محور yها می‌کشیم: (در تمام این‌ها حواسمان هست که دامنهٔ تابع $x>-۱$ است.)





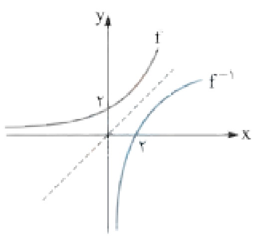


حالا نمودار $f(x-۱)$ و $f^{-۱}(-x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

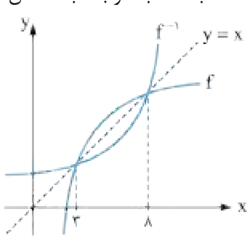


دو نمودار یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند.

۴۵۵- گزینهٔ ۴ نمودار تابع $f(x)$ را داریم. نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است. حالا دامنهٔ تابع $\sqrt{f^{-۱}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $f^{-۱}(x)\ge ۰$ باشد که می‌شود $x\ge ۲$.



۴۵۶- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $x-f^{-۱}(x)\ge ۰$، یعنی $x\ge f^{-۱}(x)$ باشد. با توجه به شکل، خط $y=x$ در بازهٔ $[۳,۸]$ بالای منحنی تابع قرار می‌گیرد، پس دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ برابر است با بازهٔ $[۳,۸]$.



۴۵۷- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که داریم $f(x)=۳-۲^{x}$ و $y=\sqrt{xf^{-۱}(x)}$، اول ضابطهٔ تابع وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$y=۳-۲^{x}\Rightarrow ۲^{x}=۳-y\Rightarrow x=\log_{۲}(۳-y)$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\log_{۲}(۳-x)$$

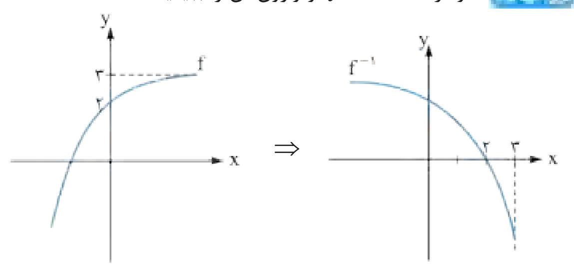
حالا عبارت $xf^{-1}(x)=x\log_۲(۳-x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

دامنهٔ عامل $\log_۲(۳-x)$ برابر $x<۳$ است و $\log_۲(۳-x)$ در $x=۲$ برابر صفر می‌شود (چون $\log_۲(۳-x)=۰ \Rightarrow ۳-x=۱ \Rightarrow x=۲$). پس:

x	$-\infty$		۰		۲		۳	
$\log_۲(۳-x)$		+		+	۰	−		
x		−	۰	+		+		+
$x\log_۲(۳-x)$		−	۰	+	۰	−		

بنابراین عبارت $x\log_۲(۳-x)$ در بازهٔ $[۰,۲]$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $[۰,۲]$ است.

روش دوم نمودار $y=۳-۲^x$ و وارون آن را ببینید:



پس برای $۰\le x\le ۲$ تابع f^{-1} مقادیر مثبت دارد و $xf^{-1}(x)$ هم مثبت است.

۴۵۸- گزینهٔ ۳ برای پیداکردن تابع معکوس تابع $f(x)=۲x+۴$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ اولاً در مورد ضابطه مثل همان چیزی که قبلاً گفتیم، داریم:

$$y=۲x+۴ \Rightarrow ۲x=y-۴ \Rightarrow x=\frac{y-۴}{۲}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-۴}{۲} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-۴}{۲}$$

و ثانیاً در مورد دامنهٔ f^{-1} هم می‌دانیم که دامنهٔ f^{-1} همان برد f است پس باید برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲x+۴$ و دامنهٔ $[-۱,۳]$ را پیدا کنیم:

$$-۱\le x\le ۳ \Rightarrow -۲\le ۲x\le ۶$$

$$\Rightarrow ۲\le ۲x+۴\le ۱۰ \Rightarrow ۲\le f(x)\le ۱۰$$

پس برد f برابر بازهٔ $[۲,۱۰]$ و در نتیجه دامنهٔ f^{-1} هم برابر بازهٔ $[۲,۱۰]$ است پس تابع معکوس f می‌شود:

$$f^{-1}(x)=\frac{x-۴}{۲}\ ,\ ۲\le x\le ۱۰$$

۴۵۹- گزینهٔ ۴ برای پیداکردن وارون یک تابع دوضابطه‌ای f در هر کدام از ضابطه‌ها: الف) ضابطهٔ وارون را پیدا می‌کنیم (x را برحسب y پیدا و جای x و y را عوض می‌کنیم) و ب) برای هر کدام از ضابطه‌ها برد تابع f را پیدا می‌کنیم که برابر می‌شود با دامنهٔ f^{-1}، ببینیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ ۴x+۱ & x\ge ۰\end{cases}$$

ضابطهٔ بالا: (الف) $y=۲x-۱ \Rightarrow ۲x=y+۱ \Rightarrow x=\frac{y}{۲}+\frac{۱}{۲}$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}$

(ب) $x<۰ \Rightarrow ۲x<۰ \Rightarrow ۲x-۱<-۱ \Rightarrow y<-۱$

$\xrightarrow{\text{در تابع وارون}} x<-۱$

ضابطهٔ پایین: (الف) $y=۴x+۱ \Rightarrow ۴x=y-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}y-\frac{۱}{۴}$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴}$

(ب) $x\ge ۰ \Rightarrow ۴x\ge ۰ \Rightarrow ۴x+۱\ge ۱ \Rightarrow y\ge ۱$

$\xrightarrow{\text{در تابع وارون}} x\ge ۱$

پس ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ برابر است با: $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴} & x\ge ۱\end{cases}$

۴۶۰- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل داده‌شده در کادر بالای f^{-1} باید ضابطهٔ f^{-1} را برحسب y قرار دهیم، می‌دانیم برای پیداکردن ضابطهٔ f^{-1} باید x را برحسب y پیدا کنیم. چون $f(x)=۲x+۱$ پس:

$$y=۲x+۱ \Rightarrow ۲x=y-۱ \Rightarrow x=\frac{y-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y-۱}{۲}$$

۴۶۱- گزینهٔ ۱ روش اول معادلهٔ قرینهٔ خط $d_۱: ۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$ پیدا می‌کنیم (جای x و y را عوض می‌کنیم):

$d: ۳x-۲y=۴ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}\ x=۰ \Rightarrow -۲y=۴$

$\Rightarrow y=-۲$

روش دوم اگر فرض کنیم خط $۳y-۲x=۴$ ضابطهٔ یک تابع مانند f است خط d، قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$، ضابطهٔ تابع وارون آن یعنی f^{-1} است، پس عرض از مبدأ خط d برابر طول از مبدأ خط $۳y-۲x=۴$ است، بنابراین داریم:

$۳y-۲x=۴ \Rightarrow \text{طول از مبدأ}\ y=۰ \Rightarrow -۲x=۴ \Rightarrow x=-۲$

۴۶۲- گزینهٔ ۲ روش اول می‌دانیم اگر f یک تابع خطی باشد f و وارون f در دو صورت بر هم منطبق‌اند:

الف) $f(x)=x$ باشد.

ب) $f(x)=-x+b$ باشد (چون خط $y=-x+b$ بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم عمود است و قرینه‌اش نسبت به نیمساز می‌شود خودش). پس حالا که داریم $f(x)=ax+۱$ باید $a=-۱$ باشد.

روش دوم وارون تابع f را پیدا می‌کنیم: $y=ax+۱$

$\Rightarrow ax=y-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{a}y-\frac{۱}{a} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{۱}{a}x-\frac{۱}{a}$

حالا دو خط $y=ax+۱$ و $y=\frac{۱}{a}x-\frac{۱}{a}$ باید بر هم منطبق باشند، پس باید a برابر ۱- باشد.

۴۶۳- گزینهٔ ۲ دو خط $d_۱: ax+by=۸$ و $d_۲: ۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند پس قرینهٔ $d_۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم پیدا می‌کنیم: $۲x-۳y=b \xrightarrow{x\leftrightarrow y} ۲y-۳x=b$

حالا دو خط $۲y-۳x=b$ و $ax+by=۸$ باید بر هم منطبق باشند: (می‌دانیم دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ وقتی بر هم منطبق‌اند که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد)

$$\begin{cases}-۳x+۲y=b\\ ax+by=۸\end{cases} \xrightarrow{\text{منطبق بر هم}} -\frac{۳}{a}=\frac{۲}{b}=\frac{b}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{b}=\frac{b}{۸} \Rightarrow b^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۴ \Rightarrow -\frac{۳}{a}=\frac{۲}{۴}=\frac{۴}{۸} \Rightarrow a=-۶ \\ b=-۴ \Rightarrow -\frac{۳}{a}=\frac{۲}{-۴}=\frac{-۴}{۸} \Rightarrow a=۶ \end{cases}$$

پس یا $a=-۶$ و $b=۴$ که $a+b$ می‌شود $-۶+۴=-۲$ و یا $a=۶$ و $b=-۴$ که $a+b$ می‌شود $۶+(-۴)=۲$.

۴۶۴- گزینهٔ ۴ مثل همیشه برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow xy-y=۱ \Rightarrow xy=y+۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{y+۱}{y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{x}$$

و چون $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{x}+\frac{۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}$ پس $f^{-۱}(x)=۱+\frac{۱}{x}$.

نکته وارون تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

۴۶۵- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ تابع وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x+۴}{x-۲} \Rightarrow yx-۲y=x+۴ \Rightarrow yx-x=۲y+۴$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴ \Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

حالا ضابطهٔ تابع و تابع وارون را با هم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=\frac{x+۴}{x-۲} \\ y=\frac{۲x+۴}{x-۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

$$\Rightarrow (x+۴)(x-۱)=(۲x+۴)(x-۲)$$

$$\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲-۴x+۴x-۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=۴ \end{cases}$$

۴۶۶- گزینهٔ ۲ اگر این نکته را حفظ باشیم که تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به شرطی وارون خودش است که $a=-d$، در تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x+b}$ باید $b=-۲$ باشد پس $f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۲}$ است و در نتیجه $f(۰)=-\frac{۳}{۲}$.

۴۶۷- گزینهٔ ۴ **روش اول** باز هم x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x}-۱ \Rightarrow \sqrt{x}=y+۱$$

$$\Rightarrow x=(y+۱)^۲ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=(x+۱)^۲$$

روش دوم یک نقطه متعلق به تابع $f(x)=\sqrt{x}-۱$ را پیدا می‌کنیم و مختصات جابه‌جاشده‌اش را در گزینه‌ها صدق می‌دهیم. در f اگر $x=۴$ باشد y می‌شود ۱. پس نقطهٔ $(۴,۱)$ روی تابع f است و در نتیجه نقطهٔ $(۱,۴)$ باید روی $f^{-۱}$ باشد که از بین گزینه‌ها فقط در ۴ صدق می‌کند.

۴۶۸- گزینهٔ ۲ **روش اول** x را برحسب y پیدا می‌کنیم (فقط حواسمان هست که $x\le -۱$ است):

$$y=x^۲ \Rightarrow \sqrt{y}=|x| \xrightarrow{x\le -۱} \sqrt{y}=-x$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-\sqrt{x} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{x}$$

روش دوم اگر $x=-۲$ را در دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲$ در نظر بگیریم:

$$f(x)=x^۲ \xrightarrow{x=-۲} y=۴ \Rightarrow (-۲,۴)\in f$$

$$\Rightarrow (۴,-۲)\in f^{-۱}$$

و مختصات $(۴,-۲)$ فقط در ۲ یعنی $f(x)=-\sqrt{x}$ صدق می‌کند.

۴۶۹- گزینهٔ ۲ مثل سؤال قبل حل می‌کنیم:

$f^{-۱}$ ضابطهٔ: $y=\sqrt{x+۳} \Rightarrow y^۲=x+۳$

$$\Rightarrow x=y^۲-۳ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^۲-۳$$

$f^{-۱}$ دامنهٔ: $\sqrt{x+۳}\ge ۰ \Rightarrow y\ge ۰$

$\Rightarrow$ f برد: $y\ge ۰ \Rightarrow$ $f^{-۱}$ دامنهٔ: $x\ge ۰$

برد $\sqrt{x+۳}$ شامل اعداد بیشتر یا مساوی صفر است (پس دامنه $f^{-۱}$ باید $x\ge ۰$ باشد). به ازای $x=۱$ داریم $y=۲$. پس در وارون آن نقطه $(۲,۱)$ صدق می‌کند و جواب می‌شود ۲.

۴۷۰- گزینهٔ ۱ با توجه به گزینه‌ها هم باید ضابطهٔ تابع وارون و هم دامنهٔ آن را پیدا کنیم. برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون داریم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱=(۲-y)^۲ \Rightarrow x=۴-۴y+y^۲+۱$$

$$\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^۲-۴x+۵$$

و برای پیداکردن دامنهٔ $f^{-۱}$ می‌گوییم دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر برد f است و چون در f داریم $y=۲-\sqrt{x-۱}$، می‌نویسیم:

$$\sqrt{x-۱}\ge ۰ \Rightarrow -\sqrt{x-۱}\le ۰ \Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱}\le ۲ \Rightarrow f(x)\le ۲$$

پس برد f برابر است با $y\le ۲$ و در نتیجه دامنهٔ $f^{-۱}$ هم می‌شود $x\le ۲$؛

یعنی تابع وارون برابر است با: $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵ , x\le ۲$

در تابع f داریم: $f(۵)=۰$ پس در وارون آن $f^{-۱}(۰)=۵$ که فقط به ۱ می‌خورد.

۴۷۱- گزینهٔ ۱ **روش اول** x را برحسب y پیدا می‌کنیم (با توجه به شرط $x\ge ۱$):

$$y=x^۲-۲x \xrightarrow{+۱} y+۱=x^۲-۲x+۱$$

$$\Rightarrow y+۱=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y+۱}=|x-۱|$$

$$\xrightarrow{x\ge ۱} \sqrt{y+۱}=x-۱ \Rightarrow x=۱+\sqrt{y+۱}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=۱+\sqrt{x+۱} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x+۱}$$

روش دوم نقطهٔ $x=۲$ را در دامنهٔ f در نظر می‌گیریم:

$$y=x^۲-۲x \xrightarrow{x=۲} y=۰ \Rightarrow (۲,۰)\in f$$

$$\Rightarrow (۰,۲)\in f^{-۱}$$

و مختصات $(۰,۲)$ نقطهٔ در ۱ یعنی $f(x)=۱+\sqrt{x+۱}$ صدق می‌کند.

۴۷۲- گزینهٔ ۱ برای پیداکردن ضابطهٔ f^{-1} با شرط $x \ge 2$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و برای پیداکردن دامنهٔ f^{-1}، برد خود تابع را پیدا می‌کنیم:

f^{-1} ضابطهٔ: $y=x^2-4x+5 \Rightarrow y-1=(x-2)^2$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y-1}=|x-2| \xrightarrow{x\ge 2}$$

$$x-2=\sqrt{y-1} \Rightarrow x=2+\sqrt{y-1} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=2+\sqrt{x-1}$$

f^{-1} دامنهٔ: $y=(x-2)^2+1 \Rightarrow y\ge 1$

$\Rightarrow$ f برد: $y \ge 1 \Rightarrow$ f^{-1} دامنهٔ: $x\ge 1$

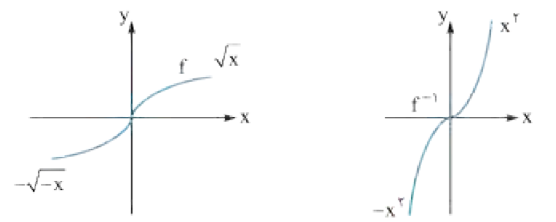
f از (۲,۱) می‌گذرد پس باید (۱,۲) در وارونش هم صدق کند که فقط به ۱ می‌خورد.

۴۷۳- گزینهٔ ۳ قرار شد برای محاسبهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم. در تابع‌های دوضابطه‌ای (یا چندضابطه‌ای) این کار را برای هر کدام از ضابطه‌ها انجام می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0 \Rightarrow y=\sqrt{x} \\ & \Rightarrow x=y^2 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2 \\ -\sqrt{-x} & x<0 \Rightarrow y=-\sqrt{-x} \\ & \Rightarrow y^2=-x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-x^2\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ که می‌تواند به صورت $f(x)=x|x|$ نوشته شود.

نمودار تابع و وارونش را ببینید:



زوج‌های مرتب (۱,۱) و (۱-,۱-) در f هستند و عکس آن‌ها باید در f^{-1} باشد که فقط به ۳ می‌خورد.

۴۷۴- گزینهٔ ۱ اول تابع را به یک تابع دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=x+|x+2| \Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x+2 & x\ge -2\\ -2 & x<-2\end{cases}$$

از بین دو ضابطهٔ تابع، ضابطهٔ $y=2x+2$ در بازهٔ $x\ge -2$ وارون‌پذیر است (چون ضابطهٔ دیگر $y=-2$ یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیست).

ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$x\le -2 : y=2x+2 \Rightarrow x=\frac{y-2}{2} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-2}{2}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با $y=\frac{x-2}{2}, x\ge -2$

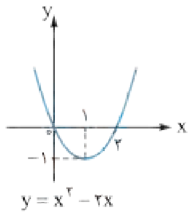
در تابع f به ازای $x=-2$ داریم $y=-2$. پس وارون آن باید در شرایط $f^{-1}(-2)=-2$ صدق کند که فقط به ۱ می‌خورد.

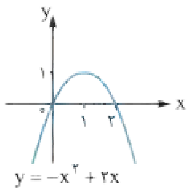
۴۷۵- گزینهٔ ۳

در تابع f نقطهٔ (۲,۰) می‌خورد پس باید (۰,۲) در وارونش صدق کند که فقط در ۳ این‌طور است!

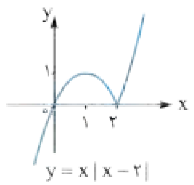
اول نمودار تابع $y=x|x-2|$ را رسم می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه نزولی است:

$$y=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & x\ge 2\\ -x^2+2x & x<2\end{cases}$$





$\Rightarrow$



با توجه به شکل رسم شده تابع در بازهٔ [۱,۲] نزولی است ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$1<x<2 \Rightarrow y=-x^2+2x \Rightarrow y-1=-(x-1)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=1-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x-1|=\sqrt{1-y}$$

$$\xrightarrow{1<x<2} x-1=\sqrt{1-y} \Rightarrow x=\sqrt{1-y}+1$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt{1-x}+1$$

پس ضابطهٔ تابع وارون در این بازه برابر است با:

$$f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}\ , 0<x<1$$

۴۷۶- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع $f(x)=|2x-6|-|x+1|$ را ساده می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه صعودی است:

$x<-1 \Rightarrow y=-2x+6+x+1 \Rightarrow y=-x+7$ نزولی

$-1\le x<3 \Rightarrow y=-2x+6-x-1 \Rightarrow y=-3x+5$ نزولی

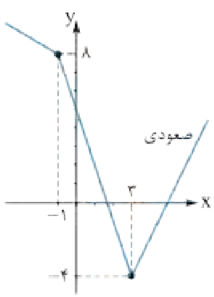
$3\le x \Rightarrow y=2x-6-x-1 \Rightarrow y=x-7$ صعودی

پس باید ضابطهٔ تابع وارون را برای $x\ge 3$ و $y=x-7$ پیدا کنیم:

$$y=x-7 \Rightarrow \begin{cases}\text{ضابطهٔ وارون } y=x-7 \Rightarrow x=y+7\\ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x+7\\ \text{دامنهٔ وارون } x\ge 3 \Rightarrow x-7\ge -4\\ \Rightarrow y\ge -4 \xrightarrow[\text{وارون}]{\text{در تابع}} x\ge -4\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با: $f^{-1}(x)=x+7$ و $x\ge -4$

نمودار f را می‌کشیم. ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها $x=3$ و $x=-1$ هستند. نقاط شکستگی $A(3,-4)$ و $B(-1,8)$ هستند و شیب نمودار برای xهای بزرگ $2-1=1$ و برای xهای خیلی منفی، $-2-(-1)=-1$ است. ببینید:



تابع با دامنهٔ $(3,+\infty)$ و برد $(-4,+\infty)$ صعودی است. پس دامنه وارونش $x>-4$ است و وارون آن از نقطهٔ $(-4,3)$ می‌گذرد.

۴۷۷- گزینهٔ ۲ اول ضابطهٔ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی به دست می‌آوریم: $y=۳x-|x|$

$$x\ge ۰ \Rightarrow y=۳x-x \Rightarrow y=۲x \Rightarrow x=\frac{y}{۲} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۲}$$

$$x<۰ \Rightarrow y=۳x+x \Rightarrow y=۴x \Rightarrow x=\frac{y}{۴} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۴}$$

پس تابع وارون برابر است با: $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲} & x\ge ۰\\ \frac{x}{۴} & x<۰\end{cases}$

حالا اگر گزینه‌ها را به ازای $x\ge ۰$ و $x<۰$ ساده کنیم ۲ برابر f^{-1} است:

$$y=\frac{۳x+|x|}{۸}=\begin{cases}\frac{x}{۲} & x\ge ۰\\ \frac{x}{۴} & x<۰\end{cases}$$

در خود تابع نقطهٔ $(-۱,-۴)$ را داریم پس در وارونش باید $(-۴,-۱)$ را داشته باشیم.

۴۷۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به ازای $x>۰$ و $x<۰$ جدا می‌کنیم و در هر حالت ضابطهٔ تابع وارون (به همراه دامنهٔ تابع وارون) را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

$$x>۰ \Rightarrow y=\sqrt{x} \Rightarrow y^۲=x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^۲\,,x>۰$$

$$x<۰ \Rightarrow y=-\sqrt{-x} \Rightarrow y^۲=-x \xrightarrow{x\leftrightarrow y}$$

$$y=-x^۲\,,x<۰$$

پس تابع وارون برابر است با $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ و از بین گزینه‌ها ۴ برابر f^{-1} است.

تابع از نقاط $(۰,۰)$ و $(۴,۲)$ عبور می‌کند پس $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ باید در وارونش صدق کنند که فقط به ۴ می‌خورد.

۴۷۹- گزینهٔ ۱ **راه اول** نقطهٔ $(۰,۰)$ روی منحنی تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ قرار دارد پس $(۰,۰)$ باید در f^{-1} هم صدق کند که با بررسی گزینه‌ها جواب می‌شود ۱.

راه دوم ضابطهٔ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی جدا می‌کنیم و در هر کدام، تابع وارون را پیدا می‌کنیم: $y=\frac{x}{۱+|x|} \Rightarrow$

الف) $x>۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱+x} \Rightarrow y+yx=x \Rightarrow x(۱-y)=y$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{۱-y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۱-x}$$

ب) $x<۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow y-yx=x \Rightarrow x(۱+y)=y$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{۱+y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۱+x}$$

از طرفی با توجه به محدودهٔ x در خود تابع در مورد تابع وارون داریم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۱-x} & ۰<x<۱\\ \frac{x}{۱+x} & ۰>x>-۱\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{۱-|x|}\,,|x|<۱$$

۴۸۰- گزینهٔ ۳ x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=x^۳+۳x^۲+۳x+۲ \Rightarrow y=x^۳+۳x^۲+۳x+۱+۱$

$$\Rightarrow y=(x+۱)^۳+۱ \Rightarrow (x+۱)^۳=y-۱$$

$$\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{y-۱} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۱}-۱ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[۳]{x-۱}-۱$$

در خود تابع نقطهٔ $(۱,۹)$ را داریم پس در گزینهٔ درست باید $(۹,۱)$ بخورد.

۴۸۱- گزینهٔ ۲ **راه اول** در تابع $y=x^۴-۲x^۲+۱$، x را برحسب y، با توجه به $-۱<x<۰$ پیدا می‌کنیم:

$$y=(x^۲-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=|x^۲-۱| \xrightarrow{-۱<x<۰}$$

$$\sqrt{y}=-x^۲+۱ \Rightarrow x^۲=۱-\sqrt{y} \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{۱-\sqrt{y}}$$

$$\xrightarrow{-۱<x<۰} -x=\sqrt{۱-\sqrt{y}} \Rightarrow x=-\sqrt{۱-\sqrt{y}}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-\sqrt{۱-\sqrt{x}}$$

پس تابع وارون $y=-\sqrt{۱-\sqrt{x}}$.

راه دوم در تابع فرض می‌کنیم $x=-\frac{۱}{۲}$:

$$x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=\frac{۱}{۱۶}-۲(\frac{۱}{۴})+۱=\frac{۹}{۱۶}$$

پس در تابع وارون باید داشته باشیم $x=\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}$ که فقط در ۲ صدق می‌کند.

۴۸۲- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $a=b^c \Leftrightarrow \log_b a=c$ با توجه به این تساوی در تابع $y=۱۰^{x+۱}-۲$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=۱۰^{x+۱}-۲ \Rightarrow ۱۰^{x+۱}=y+۲$$

$$\Rightarrow x+۱=\log_{۱۰}(y+۲) \Rightarrow x=\log_{۱۰}(y+۲)-۱$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\log_{۱۰}(x+۲)-۱$$

و چون معمولاً مبنای ۱۰ را در لگاریتم نمی‌نویسیم پس $f^{-1}(x)=\log(x+۲)-۱$.

چون $f(۰)=۸$، گزینه‌ای جواب است که $f^{-1}(۸)=۰$ و فقط به ۴ می‌خورد.

۴۸۳- گزینهٔ ۲ چون سؤال گفته نقطهٔ تلاقی تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ با نمودار معکوس آن روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرار دارد پس تابع را با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=\sqrt{x+۲}\\ y=x\end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{x+۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲=x+۲$$

$$\Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}x=-۱ \xrightarrow{\text{چون } x\ge ۰} \text{غ‌ق‌ق}\\ x=۲ \quad \text{ق‌ق}\end{cases}$$

۴۸۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم تابع‌های چندجمله‌ای درجهٔ زوج (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) هرگز یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیستند. بنابراین برای این‌که تابع $f(x)=(a+۱)x^۴+(a+۲)x^۳+(a+۴)x^۲+۳x$ وارون‌پذیر باشد باید جملهٔ $x^۴$ حذف شود یعنی $a=-۱$.

پس ضابطهٔ تابع f برابر است با $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$، حالا باید تعداد

نقاط برخورد منحنی تابع f را با خط $x=y$ حساب کنیم:

$$\begin{cases} y=x^3+3x^2+3x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^3+3x^2+3x=x$$

$$\Rightarrow x(x^2+3x+2)=0 \Rightarrow x(x+1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

پس منحنی تابع، خط $y=x$ را در سه نقطه قطع می‌کند.

۴۸۵- گزینهٔ ۱ گفتیم $(fof^{-1})(x)=x$، پس تابع fof^{-1} از زوج مرتب‌هایی تشکیل شده است که x و y شان برابر است و فقط باید دامنهٔ fof^{-1} را پیدا کنیم: $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$

و چون $f=\{(1,2),(2,3)\}$، پس $R_f=\{2,3\}$

و در نتیجه: $fof^{-1}=\{(2,2),(3,3)\}$

۴۸۶- گزینهٔ ۲ چون $(fog)(x)=x$، پس $g=f^{-1}$ و در نتیجه:

$$f=\{(1,4),(2,3),(3,5)\} \Rightarrow f^{-1}=g=\{(4,1),(3,2),(5,3)\}$$

نکته البته g می‌تواند زوج‌های مرتب دیگری به شکل (a,b) داشته باشد. فقط b نباید ۱ و ۲ و ۳ باشد. به همین دلیل این جواب، تنها انتخاب نیست مثلاً $g=\{(4,1),(3,2),(5,3),(7,8)\}$ هم قابل قبول است.

۴۸۷- گزینهٔ ۳ با توجه به ماشین $x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x$ داریم $(gof)(x)=x$ پس $g=f^{-1}$، بنابراین: $f(x)=2x-1 \Rightarrow g(x)=\frac{x+1}{2}$

$$g(0)=f^{-1}(0) \Rightarrow 0=2x-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

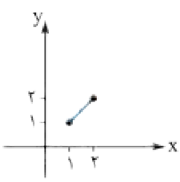
۴۸۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $D_{f^{-1}of}=D_f$ پس با توجه به این‌که $D_f=[-1,2)$ داریم $D_{f^{-1}of}=[-1,2)$ که شامل اعداد صحیح ۱-، ۰ و ۱ است یعنی ۳ عدد صحیح.

۴۸۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم همواره $(fof^{-1})(x)=x$ است و برای رسم نمودار تابع $(fof^{-1})(x)$ فقط باید دامنهٔ fof^{-1} را پیدا کنیم. طبق آن‌چه در درس‌نامه گفتیم: $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$

و چون $f(x)=\sqrt{x-1}$، برد تابع f با شرط $2\le x\le 5$ برابر است با:

$$2\le x\le 5 \Rightarrow 1\le x-1\le 4 \Rightarrow 1\le \sqrt{x-1}\le 2$$

پس نمودار تابع fof^{-1} برابر است با نمودار تابع $y=x$ با شرط $1\le x\le 2$:



۴۹۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $(f^{-1}of)(x)=x$

پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1+(f^{-1}of)(x)}$ برابر است با دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1+x}$ به شرط آن‌که $f^{-1}of$ تعریف‌شده باشد؛ یعنی $x\in D_{f^{-1}of}$ و چون $D_{f^{-1}of}=D_f$. پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1+(f^{-1}of)(x)}$ برابر می‌شود با:

دامنه $=\{1+x\ge 0 \mid x\in D_f\}$

از طرف دیگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ برابر است با $x\le 1$، پس:

دامنه $=\{x\ge -1 \mid x\le 1\}=[-1,1]$

۴۹۱- گزینهٔ ۴ داریم: $f=\{(1,2),(2,5),(0,3),(4,-1)\}$

$g=\{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}$

برای پیداکردن gof^{-1} اول باید f^{-1} را پیدا کنیم:

$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(3,0),(-1,4)\}$

حالا gof^{-1} را پیدا می‌کنیم: $gof^{-1}=\{(5,3),(-1,1)\}$

۴۹۲- گزینهٔ ۴ در درس‌نامه داشتیم $g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$، پس بهتر است اول fog و بعد وارونش را پیدا کنیم:

$$f=\{(0,-1),(2,\tfrac{1}{2}),(-3,\sqrt{2}),(1,5)\}$$

$$g=\{(-1,-3),(5,2),(\tfrac{1}{2},0),(4,6)\}$$

$$fog=\{(-1,\sqrt{2}),(5,\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},-1)\}$$

$$\Rightarrow (fog)^{-1}=\{(\sqrt{2},-1),(\tfrac{1}{2},5),(-1,\tfrac{1}{2})\}$$

پس جواب می‌شود ④.

۴۹۳- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $(f^{-1}og^{-1})(1)=(gof)^{-1}(1)$ و چون قرار است هم $(gof)^{-1}(1)$ و هم $(fog)^{-1}(5)$ را پیدا کنیم پس ضابطه‌های fog و gof را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{8}x-3 \\ g(x)=x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (fog)(x)=\frac{1}{8}x^3-3 \\ (gof)(x)=(\frac{1}{8}x-3)^3 \end{array}$$

حالا می‌رویم سراغ $(gof)^{-1}(1)$ و $(fog)^{-1}(5)$:

$$(gof)^{-1}(1)=a \Rightarrow (gof)(a)=1$$

$$\Rightarrow (\tfrac{1}{8}a-3)^3=1 \Rightarrow \tfrac{1}{8}a-3=1$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{8}a=4 \Rightarrow a=32 \Rightarrow (gof)^{-1}(1)=32$$

$$(fog)^{-1}(5)=b \Rightarrow (fog)(b)=5$$

$$\Rightarrow 5=\tfrac{1}{8}b^3-3 \Rightarrow \tfrac{1}{8}b^3=8$$

$$\Rightarrow b^3=64 \Rightarrow b=4 \Rightarrow (fog)^{-1}(5)=4$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$(gof)^{-1}(1)+(fog)^{-1}(5)=32+4=36$$

۴۹۴- گزینهٔ ۱

داریم $f=\{(2,a+1),(3,7)\}$ و $g=\{(2a-1,-1),(6,2)\}$ و چون $(-1,2)\in(gof)^{-1}$ پس $(2,-1)\in gof$ یعنی $(gof)(2)=-1$.

حالا $(gof)(2)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(gof)(2)=g(f(2))=g(a+1)=-1$$

چون $g(2a-1)=-1$ است، پس: $a+1=2a-1 \Rightarrow a=2$

۴۹۵- گزینهٔ ۱ می‌دانیم: $(fog^{-1})(۴)=f(g^{-1}(۴))$

پس اول باید حاصل $g^{-1}(۴)$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=\frac{۵x+۲}{۲x-۱} \Rightarrow ۴=\frac{۵x+۲}{۲x-۱} \Rightarrow ۸x-۴=۵x+۲$$

$$\Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow g^{-1}(۴)=۲$$

$$f(x)=x^۲+x \Rightarrow f(g^{-1}(۴))=f(۲)=۴+۲=۶$$

۴۹۶- گزینهٔ ۲ چون داریم: $(g^{-1}of^{-1})(a)=۸$

پس $(fog)^{-1}(a)=۸$ و در نتیجه $(fog)(۸)=a$، بنابراین برای پیداکردن مقدار a باید $(fog)(۸)$ را پیدا کنیم:

$$f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$$

$$g(x)=\sqrt{۵x+۹}$$

$$a=(fog)(۸)=f(g(۸))=f(\sqrt{۴۰+۹})=f(۷)=۳$$

۴۹۷- گزینهٔ ۳ داریم:

$$f=\{(۲,۳),(-۱,۲),(-۴,۱),(۳,۰)\}$$

$$g=\{(۰,۲),(۲,-۴),(۳,۲),(-۴,-۲)\}$$

حالا مقدار $(fogof^{-1})(۳)$ را به ترتیب پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}(۳)=۲ \Rightarrow g(f^{-1}(۳))=g(۲)=-۴$$

$$\Rightarrow f(g(f^{-1}(۳)))=f(-۴)=۱$$

۴۹۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $f^{-1}og^{-1}=(gof)^{-1}$، پس ضابطهٔ gof و سپس وارون آن را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=x+۴ \\ g(x)=۲x-۵ \end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=۲(x+۴)-۵ \Rightarrow (gof)(x)=۲x+۳$$

وارون $gof \Rightarrow y=۲x+۳ \Rightarrow x=\frac{y-۳}{۲} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-۳}{۲}$

پس ضابطهٔ $(gof)^{-1}$ برابر است با $y=\frac{x-۳}{۲}$.

۴۹۹- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$، پس اول ضابطهٔ fog و بعد ضابطهٔ وارونش را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=۱+\sqrt{x} \\ g(x)=x^۲ \end{cases} \Rightarrow (fog)(x)=۱+\sqrt{x^۲} \xrightarrow{x>۰} =۱+x \Rightarrow y=۱+x$$

وارون $(fog) \Rightarrow y=۱+x \Rightarrow x=y-۱ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x-۱$

پس ضابطهٔ $(fog)^{-1}$ برابر است با $(fog)^{-1}(x)=x-۱$

دامنهٔ آن شامل $x>۱$ است. (چرا؟)

۵۰۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$، پس اگر اول $(g^{-1}of^{-1})(x)$ را پیدا کنیم (که همان $(fog)^{-1}$ است) و بعد وارونش را پیدا کنیم ضابطهٔ fog را حساب کرده‌ایم، بنابراین: $f^{-1}(x)=۱+\sqrt{x}$

$$g^{-1}(x)=x^۲ \Rightarrow (g^{-1}of^{-1})(x)=(۱+\sqrt{x})^۲$$

پس داریم: $(fog)^{-1}(x)=(۱+\sqrt{x})^۲$. حالا fog را پیدا می‌کنیم:

$$y=(۱+\sqrt{x})^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=۱+\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}-۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=۱-۲\sqrt{y}+y$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=۱-۲\sqrt{x}+x$$

پس ضابطهٔ fog برابر است با: $(fog)(x)=x+۱-۲\sqrt{x}=(\sqrt{x}-۱)^۲$

۵۰۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم: $(fog^{-1})^{-1}=gof^{-1}$

پس برای پیداکردن مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(fog^{-1})^{-1}(x)=۰$ باید اول معادلهٔ $(gof^{-1})(x)=۰$ را تشکیل دهیم:

$$f(x)=x+۲ \Rightarrow y=x+۲ \Rightarrow x=y-۲$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x-۲ \Rightarrow f^{-1}(x)=x-۲$$

$$g(x)=۲x^۲-۸x+۱$$

معادلهٔ $(gof^{-1})(x)=۰$ را تشکیل می‌دهیم:

$$۲(x-۲)^۲-۸(x-۲)+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۸x+۸-۸x+۱۶+۱=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۱۶x+۲۵=۰$$

و چون مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم برابر $-\frac{b}{a}$ است، پس مجموع ریشه‌های معادلهٔ بالا برابر است با $S=-\frac{-۱۶}{۲}=۸$.

دقت کنید که $\Delta=(-۱۶)^۲-۸(۲۳)>۰$ و دو ریشهٔ حقیقی وجود دارند.

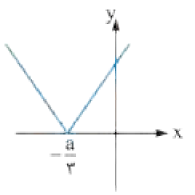
۵۰۲- گزینهٔ ۴ داریم $g(x)=f(۲x+۱)+۱$، $f^{-1}(۵)=۳$ و $g^{-1}(a)=۱$. از $g^{-1}(a)=۱$ نتیجه می‌گیریم $g(۱)=a$، پس:

$$g(x)=f(۲x+۱)+۱ \Rightarrow g(۱)=a \Rightarrow f(۳)+۱=a$$

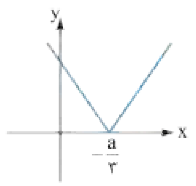
از طرف دیگر چون $f^{-1}(۵)=۳$، پس $f(۳)=۵$، بنابراین:

$$f(۳)+۱=a \Rightarrow ۵+۱=a \Rightarrow a=۶$$

۵۰۳- گزینهٔ ۲ می‌دانیم نمودار تابع $f(x)=|۳x+a|$ به صورت روبه‌رو است:



$a>۰$



$a<۰$

پس تابع زمانی در بازهٔ $(-۱,۱)$ یک‌به‌یک نیست که $\frac{-a}{۳}$ داخل این بازه قرار گیرد:

$$-۱<-\frac{a}{۳}<۱ \Rightarrow -۳<-a<۳ \Rightarrow -۳<a<۳$$

و تعداد اعداد صحیح در بازهٔ $(-۳,۳)$ برابرند با ۵تا یعنی $۲,۱,۰,-۱,-۲$.

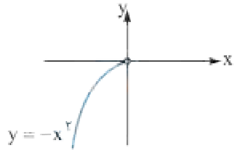
۵۰۴- گزینهٔ ۱ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم، در ۱ یعنی $f(x)=x+\sqrt{x}$ دامنهٔ تابع $x\ge۰$ است و داریم:

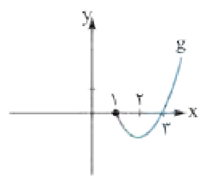
$$x\ge۰ \Rightarrow \begin{cases} y_۱=x & \text{صعودی اکید} \\ y_۲=\sqrt{x} & \text{صعودی اکید} \end{cases}$$

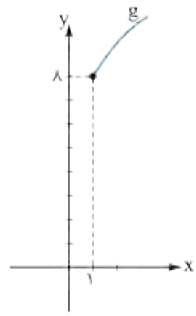
$$\Rightarrow y=x+\sqrt{x} \quad \text{صعودی اکید}$$

پس تابع صعودی اکید و در نتیجه یکنوای اکید و یک‌به‌یک است. برای نشان‌دادن یک‌به‌یک نبودن سایر گزینه‌ها خودتان مثال نقض بیاورید.

۵۰۵- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ پایین یعنی $-x^{۲}$، با دامنهٔ $x<۰$، تمام yهای منفی را تولید می‌کند. پس باید $g(x)$ اصلاً yهای منفی ندهد و خودش یک‌به‌یک باشد. در بین گزینه‌ها، ۴ مناسب است. نمودارها را ببینید:

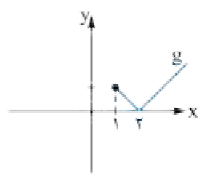


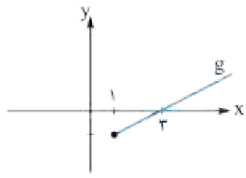




۳ هم یک‌به‌یک نیست هم برد تکراری دارد.

۴ این خوب است.





۱ g یک‌به‌یک نیست.

۲ g هم yهای منفی دارد.

۵۰۶- گزینهٔ ۴ گفتیم باید $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$ باشند، پس داریم:

$$gof(x)=g(f(x))\xrightarrow[\text{باید } f(x) \text{ قرار دهیم}]{\text{به جای } x \text{ در } g}$$

$$=k\left(x+\sqrt{x^{۲}+۱}-\frac{۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}\right)=k\,\frac{(x+\sqrt{x^{۲}+۱})^{۲}-۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

$$=k\,\frac{x^{۲}+x^{۲}+۱+۲x\sqrt{x^{۲}+۱}-۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}=k\,\frac{۲x^{۲}+۲x\sqrt{x^{۲}+۱}}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}=$$

$$k\,\frac{۲x(x+\sqrt{x^{۲}+۱})}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}=k(۲x)=x\ \Rightarrow\ k=\frac{۱}{۲}$$

در تابع f داریم: $f(۱)=۱+\sqrt{۲}$

پس در g باید $g(۱+\sqrt{۲})=۱$ باشد:

$$g(۱+\sqrt{۲})=k\left(۱+\sqrt{۲}-\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}\right)=k\left(۱+\sqrt{۲}-\underbrace{\frac{\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}}_{\text{مخرج را گویا کردیم}}\right)$$

$$=k(۱+\sqrt{۲}-(\sqrt{۲}-۱))=۲k=۱\ \Rightarrow\ k=\frac{۱}{۲}$$

۵۰۷- گزینهٔ ۳ سعی می‌کنیم x را تنها کنیم:

$$y=۲f(۳x-۱)+۱\ \Rightarrow\ \frac{y-۱}{۲}=f(۳x-۱)$$

حالا برای رسیدن به x باید f را از بین ببریم، کافی است در دو طرف $f^{-۱}$ بگذاریم و f و $f^{-۱}$ همدیگر را نابود می‌کنند؟

$$f^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)=f^{-۱}(f(۳x-۱))=۳x-۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{f^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)+۱}{۳}=\frac{۱}{۳}f^{-۱}\left(\frac{y-۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}f^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۳}$$

تابع g از ترکیب تابع‌های زیر ساخته شده:

$$x\ \Rightarrow\ \underbrace{\boxed{۳x-۱}}_{h(x)}\ \Rightarrow\ \boxed{f(x)}\ \Rightarrow\ \underbrace{\boxed{۲x+۱}}_{k(x)}\ \Rightarrow\ y$$

پس وارون آن به صورت $h^{-۱}(f^{-۱}(k^{-۱}(x)))$ است.

$$k^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}\qquad h^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=h^{-۱}\left(f^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)\right)=\frac{f^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)+۱}{۳}=\frac{۱}{۳}f^{-۱}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۳}$$

۵۰۸- گزینهٔ ۳ از $(fog)^{-۱}(۲x-۴)=\frac{x}{۲}$ نتیجه می‌گیریم $(fog)\left(\frac{x}{۲}\right)=۲x-۴$ پس داریم:

$$(fog)\left(\frac{x}{۲}\right)=۲x-۴\ \xrightarrow{x\to ۲x}\ (fog)(x)=۴x-۴$$

و حالا که $(fog)(x)=۴x-۴$ و $g(x)=۲x^{۳}+۱$، پس:

$$f(۲x^{۳}+۱)=۴x-۴$$

نقطهٔ برخورد نمودار وارون تابع $f(x)$ با محور yها یعنی نقطه‌ای روی $f^{-۱}$ که $x=۰$ باشد، پس باید نقطه‌ای روی f پیدا کنیم که $y=۰$ شود یعنی $f(x)=۰$. حالا اگر برویم سراغ تساوی $f(۲x^{۳}+۱)=۴x-۴$ می‌بینیم که به ازای $x=۱$ داریم $f(۳)=۰$، پس نمودار تابع وارون f محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند.

می‌دانیم $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$ پس داریم:

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۲x-۴))=\frac{x}{۲}$$

سؤال از ما $f^{-۱}(۰)$ را خواسته (عرض برخورد با محور y) بنابراین $x=۲$ می‌گذاریم تا جلوی $f^{-۱}$ بشود صفر.

$$\xrightarrow{x=۲}\ g^{-۱}(f^{-۱}(۰))=\frac{۲}{۲}=۱$$

حالا اگر $f^{-۱}(۰)=b$ باشد داریم: $g^{-۱}(b)=۱$ و این یعنی $b=g(۱)$ که می‌شود:

$$b=۲\times ۱^{۳}+۱=۳$$

۵۰۹- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ $g(x)=f(۲x+۵)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$g(x)=f(۲x+۵)\ \Rightarrow\ x=g^{-۱}(f(۲x+۵))$$

حالا $f^{-۱}(g^{-۱}(f(-۱)))$ را می خواهیم. سپس در تساوی $x=g^{-۱}(f(۲x+۵))$ به جای x باید عددی بگذاریم که $۲x+۵=-۱$ شود، یعنی $x=-۳$:

$$x=-۳\ \Rightarrow\ -۳=g^{-۱}(f(-۱))$$

حالا مقدار $f^{-۱}(g^{-۱}(f^{-۱})))$ به راحتی به دست می‌آید:

$$f^{-۱}(g^{-۱}(f(-۱)))=f^{-۱}(-۳)=\frac{(-۳)^{۳}}{۹}+\sqrt[۳]{۹\times(-۳)}$$

$$=-\frac{۲۷}{۹}-۳=-۶$$

روش دوم در رابطهٔ $g(x)=f(2x+5)$ کاری می‌کنیم که $f(1)$ ساخته شود!

چه‌کار؟ به جای x می‌گذاریم ۳−. پس: $\xrightarrow{x=-3} g(-3)=f(-1)$

حالا در صورت سؤال به جای $f(-1)$ می‌گذاریم $g(-3)$ و داریم:

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))=f^{-1}(g^{-1}(g(-3)))\xrightarrow{g^{-1}(g(x))=x}=f^{-1}(-3)$$

پس در ضابطهٔ f^{-1} باید ۳− قرار دهیم:

$$f^{-1}(-1)=\frac{(-3)^3}{9}+\sqrt[3]{(-3)\times 9}=-6$$

۵۱۰- گزینهٔ ۱ می‌خواهیم ضابطهٔ تابع معکوس تابع $f(x)$ را پیدا کنیم پس به جای $f(x)$ می‌گذاریم y و بعد x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=3+4g(\frac{x}{2})\Rightarrow g(\frac{x}{2})=\frac{y-3}{4}$$

از طرف دیگر می‌دانیم اگر g وارون‌پذیر باشد از $g(a)=b$ نتیجه می‌گیریم $g^{-1}(b)=a$، پس:

$$g(\frac{x}{2})=\frac{y-3}{4}\Rightarrow \frac{x}{2}=g^{-1}(\frac{y-3}{4})$$

$$\Rightarrow x=2g^{-1}(\frac{y-3}{4})\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=2g^{-1}(\frac{x-3}{4})$$

۵۱۱- گزینهٔ ۴

روش اول ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+4\sqrt{x}+8$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=x+4\sqrt{x}+8\Rightarrow y=(\sqrt{x}+2)^2+4$$

$$\Rightarrow y-4=(\sqrt{x}+2)^2\Rightarrow \sqrt{x}+2=\sqrt{y-4}\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y-4}-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x=y-4-4\sqrt{y-4}+4$$

$$\Rightarrow x=y-4\sqrt{y-4}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x-4\sqrt{x-4}$$

حالا با مقایسهٔ $f^{-1}(x)=x-4\sqrt{x-4}$ و $f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}$ نتیجه می‌گیریم $a=4$ و $b=4$. از طرفی دیگر در شرط $x\ge c$ (یعنی دامنهٔ f^{-1}) برای پیداکردن مقدار c باید برد f را پیدا کنیم:

$$f(x)=(\sqrt{x}+2)^2+4$$

داریم:

$$x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow (\sqrt{x}+2)^2\ge 4$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+2)^2+4\ge 8\Rightarrow \text{برد } f: y\ge 8$$

بنابراین باید $c=8$ باشد و در نتیجه: $a+b+c=4+4+8=16$

روش دوم دو تابع را ترکیب کنیم و مساوی x بگذاریم:

$$f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}$$

$$f(x)=(\sqrt{x}+2)^2+4$$

ترکیب کنیم:

$$(\sqrt{x}+2)^2+4-a\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2+4-b}=x$$

$$\Rightarrow x+4\sqrt{x}+8-a\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}=x$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x}+8=a\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}$$

$$\xrightarrow[\div 4]{a=4} \sqrt{x}+2=\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}$$

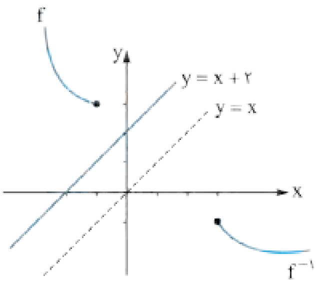
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+4\sqrt{x}+4=x+4\sqrt{x}+8-b\Rightarrow b=4$$

c شروع برد f است که چون f همواره صعودی است، داریم:

$$f(x)=x+4\sqrt{x}+8\qquad D_f=[0,+\infty)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی } f} R_f=[f(0),f(+\infty))\Rightarrow c=f(0)=8$$

۵۱۲- گزینهٔ ۴ اول نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+4$ را در بازهٔ $x\le -1$ رسم کنیم. بعد نمودار f^{-1} را (یعنی قرینهٔ نمودار f نسبت به خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) رسم می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که این نمودار خط $y=x+2$ را در چند نقطه قطع می‌کند، چون می‌توانیم معادلهٔ $f^{-1}(x)-x=2$ را به صورت $f^{-1}(x)=x+2$ بنویسیم که جواب‌هایش برابر طول نقاط برخورد نمودار تابع $f^{-1}(x)$ و خط $y=x+2$ است.



$$y=x^2+2x+4\Rightarrow S\Big|_{3}^{-1}$$

همان‌طور که در شکل می‌بینیم نمودار f^{-1} و خط $y=x+2$ هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند.

۵۱۳- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}$ یک تابع اکیداً صعودی است چون تابع‌های $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ و $y=2\sqrt{x}$ هر دو اکیداً صعودی‌اند، پس نقطهٔ برخورد تابع f و تابع وارونش روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقاطع‌اند:

$$\begin{cases}y=\frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}\\ y=x\end{cases}\Rightarrow \frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}=x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}=x-\frac{x-3}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x}=\frac{x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x}=x+3\xrightarrow{\text{توان ۲}} 16x=x^2+6x+9$$

$$\Rightarrow x^2-10x+9=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\frac{c}{a}=9\end{cases}$$

پس دو نمودار در نقاط $A(1,1)$ و $B(9,9)$ متقاطع‌اند که فاصلهٔ آن‌ها می‌شود:

$$AB=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$$

۵۱۴- گزینهٔ ۱ داریم $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، پس اگر تابع g وارون تابع f باشد و $g(\frac{1}{\sqrt{3}})=m$ باشد باید داشته باشیم $f(m)=\frac{1}{\sqrt{3}}$، بنابراین:

$$f(m)=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sqrt{3}m=\sqrt{m^2+1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3m^2=m^2+1\Rightarrow 2m^2=1\Rightarrow m^2=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{m>0} m=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

حالا با توجه به تساوی $f(a)=g(\frac{1}{\sqrt{3}})$ می‌نویسیم:

$$f(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \sqrt{2}a=\sqrt{a^2+1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2=a^2+1\Rightarrow a^2=1\xrightarrow{a>0} a=1$$

۵۱۵- گزینهٔ ۲ داریم $f(x)=x+\sqrt{x^۲+۳}$، پس برای پیداکردن $f(۱+۲f^{-۱}(۳))$ اول باید $f^{-۱}(۳)$ را پیدا کنیم. اگر فرض کنیم $f^{-۱}(۳)=a$، داریم $f(a)=۳$، بنابراین:

$$۳=a+\sqrt{a^۲+۳} \Rightarrow ۳-a=\sqrt{a^۲+۳}$$

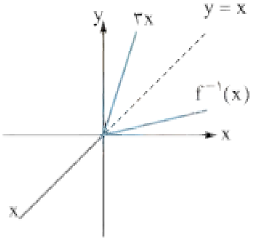
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲-۶a+۹=a^۲+۳ \Rightarrow -۶a=-۶ \Rightarrow a=۱$$

پس $f^{-۱}(۳)=۱$ و در نتیجه:

$$f(۱+۲f^{-۱}(۳))=f(۱+۲)=f(۳)=۳+\sqrt{۹+۳}$$

$$=۳+\sqrt{۱۲}=۳+۲\sqrt{۳}$$

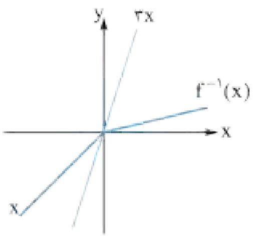
۵۱۶- گزینهٔ ۲ اول نمودار تابع $f(x)=۲x+|x|$ و از روی آن نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=۲x+|x|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۳x & x\ge ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$

حالا برای پیداکردن تعداد جواب‌های معادلهٔ $f^{-۱}(x)=۳x$ نمودار $y=f^{-۱}(x)$ و $y=۳x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



دو نمودار یک نقطه تقاطع دارند $(x=۰)$، پس معادلهٔ $f^{-۱}(x)=۳x$ فقط یک جواب دارد.

۵۱۷- گزینهٔ ۴ اول باید ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را با استفاده از $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})$ حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴}) \Rightarrow ۲y=x+\sqrt{x^۲+۴}$$

$$\Rightarrow ۲y-x=\sqrt{x^۲+۴}\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴y^۲-۴xy+x^۲=x^۲+۴$$

$$\Rightarrow ۴xy=۴y^۲-۴ \Rightarrow x=\frac{۴(y^۲-۱)}{۴y}$$

$$\Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{y}\Rightarrow x=y-\frac{۱}{y}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x-\frac{۱}{x}$$

پس $f^{-۱}(x)=x-\frac{۱}{x}$، حالا حاصل عبارت $f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})$ را پیدا می‌کنیم: $f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})-(\frac{۱}{x}+x)=۰$

داریم $f(۰)=۱$، پس $f^{-۱}(۱)=۰$ است. حالا به جای x در $f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})$ می‌گذاریم ۱ و داریم:

$$f^{-۱}(۱)+f^{-۱}(\frac{۱}{۱})=۰+۰=۰$$

یعنی گزینه‌ای درست است که به ازای $x=۱$ بشود صفر که فقط ۴ است.

۵۱۸- گزینهٔ ۱ روش اول داریم $y=\frac{۲^x-۱}{۲^x+۱}$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{۲^x-۱}{۲^x+۱}\Rightarrow y(۲^x)+y=۲^x-۱\Rightarrow ۲^x-y(۲^x)=y+۱$$

$$\Rightarrow ۲^x(۱-y)=y+۱\Rightarrow ۲^x=\frac{y+۱}{۱-y}\xrightarrow{\text{طبق تعریف لگاریتم}}$$

$$x=\log_۲\frac{y+۱}{۱-y}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\log_۲\frac{x+۱}{۱-x}$$

پس تابع وارون $y=\log_۲\frac{x+۱}{۱-x}$ است.

روش دوم در تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{۲^x+۱}$ داریم $f(۱)=\frac{۱}{۳}$ پس در تابع وارون باید $f(\frac{۱}{۳})=۱$ باشد که فقط در ۱ یعنی $y=\log_۲\frac{۱+x}{۱-x}$ صدق می‌کند.

روش سوم f از ترکیب دو تابع $g(x)=۲^x$ و $h(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ ساخته شده که وارون آن‌ها $g^{-۱}(x)=\log_۲ x$ و $h^{-۱}(x)=\frac{-x-۱}{x-۱}$ است. پس داریم:

$$f^{-۱}=(hog)^{-۱}=g^{-۱}oh^{-۱}=\log_۲\frac{-x-۱}{x-۱}=\log_۲\frac{۱+x}{۱-x}$$

۵۱۹- گزینهٔ ۳ روش اول از رابطهٔ $y=۵^{\log_x ۵}$ مقدار x را برحسب y پیدا می‌کنیم. برای این کار از طرفین (در مبنای ۵) لگاریتم می‌گیریم:

$$y=۵^{\log_x ۵}\Rightarrow \log_۵ y=\log_۵ ۵^{\log_x ۵}$$

$$\Rightarrow \log_۵ y=\log_x ۵\log_۵ ۵\Rightarrow \log_x ۵=\log_۵ y$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} =x^{\log_۵ y}=۵$$

$$\Rightarrow (x^{\log_۵ y})^{\log_y ۵}=۵^{\log_y ۵}\Rightarrow x=۵^{\log_y ۵}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=۵^{\log_x ۵}$$

روش دوم در $f(x)=۵^{\log_x ۵}$ به ازای $x=۲۵$ داریم $y=۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}$ پس در تابع وارون باید به ازای $x=\sqrt{۵}$ داشته باشیم $y=۲۵$ که فقط در ۳ یعنی $y=۵^{\log_x ۵}$ صدق می‌کند.

۵۲۰- گزینهٔ ۴ اول ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\Rightarrow y^۲=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$$

$$\Rightarrow y^۲x^۲+y^۲=x^۲\Rightarrow x^۲(۱-y^۲)=y^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=\frac{y^۲}{۱-y^۲}\xrightarrow{\text{هم‌علامت‌اند } y,x} x=\frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

پس $f^{-۱}(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$، حالا حاصل $f^{-۱}(\sin x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\sin^۲ x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^۲ x}}=\frac{\sin x}{|\cos x|}$$

۵۲۱- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $(fof^{-1})(x)=x$، پس در تابع $f(x)=x+[x]$ به ازای xهای عضو برد f، داریم: $(fof^{-1})(۴/۵)=۴/۵$

نکته: در این تابع $f(۲/۵)$ می‌شود ۴/۵؛ پس عدد ۴/۵ در برد f (و دامنهٔ f^{-1}) بود اما مثلاً اگر همین سؤال $fof^{-1}(۵/۵)$ را بخواهد جواب گزینهٔ ۳ است یعنی موجود نیست. چون عدد ۵/۵ در برد تابع $y=x+[x]$ قرار ندارد. راستش را بخواهید برد تابع $y=x+[x]$ از بازه‌های $[۲k,۲k+۱)$ ساخته شده است. $(k\in\mathbb{Z})$

۵۲۲- گزینهٔ ۴ برای حل سؤال کافی است از این ویژگی استفاده کنیم که: $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

داریم $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ و مقدار $g^{-1}(۱۶)$ را می‌خواهیم. فرض می‌کنیم $g^{-1}(۱۶)=a$، پس:

$$\begin{cases} g(a)=۱۶ \\ g(a)=f(۳a-۴) \end{cases} \Rightarrow f(۳a-۴)=۱۶$$

$$\Rightarrow ۳a-۴=f^{-1}(۱۶) \Rightarrow ۳a-۴=۱۶+\sqrt{۱۶}$$

$$\Rightarrow ۳a-۴=۲۰ \Rightarrow ۳a=۲۴ \Rightarrow a=۸$$

۵۲۳- گزینهٔ ۲ مثل سؤال قبل، داریم $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$ و مقدار $g^{-1}(۶)$ را می‌خواهیم:

$$\begin{cases} g^{-1}(۶)=a \Rightarrow g(a)=۶ \\ g(a)=f(a)+\sqrt{f(a)} \end{cases} \Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=۶$$

تساوی $f(a)+\sqrt{f(a)}=۶$ یک معادله است و اگر فرض کنیم $\sqrt{f(a)}=t$، داریم:

$$t^۲+t-۶=۰\Rightarrow(t-۲)(t+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases} t=۲ \\ t=-۳ \end{cases}$$

و چون $t=\sqrt{f(a)}$، پس فقط مقدار $t=۲$ قابل‌قبول است؛ یعنی:

$$\sqrt{f(a)}=۲\Rightarrow f(a)=۴\Rightarrow a=f^{-1}(۴)\Rightarrow a=\sqrt[۳]{۲(۴)}=\sqrt[۳]{۸}=۲$$