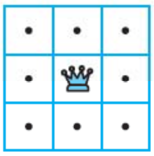
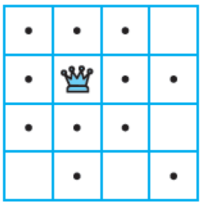
فهرست

درس ۲

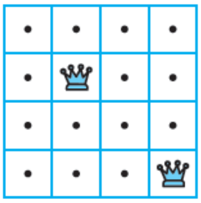
مدل‌سازی با گراف



یک صفحهٔ شطرنج سه‌درسه را در نظر بگیرید. اگر یک وزیر در وسط آن قرار دهیم، هر مهرهٔ دیگری، در هر قسمتی از صفحه که باشد، وزیر می‌تواند آن مهره را بزند.



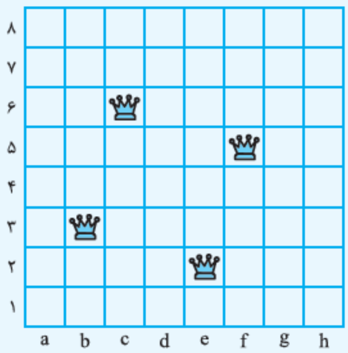
اما اگر صفحهٔ شطرنج ۴ × ۴ باشد، چه‌طور؟ آیا می‌توان با قراردادن یک وزیر، کاری کرد که هر مهره‌ای، در هر قسمتی از صفحه که باشد، توسط وزیر تهدید شود؟ همان‌طور که می‌بینید:



با قراردادن فقط یک وزیر، چنین امری امکان‌پذیر نیست و دست‌کم چهار نقطه، پوشش داده نمی‌شوند. برای انجام این کار، به دست‌کم ۲ وزیر نیاز داریم:

چنین مسئله‌هایی باعث شد که مفهومی در شاخهٔ گراف به وجود آید به نام احاطه‌گری.[۱]

تست **در صفحهٔ شطرنج روبه‌رو، وزیر پنجم در کدام مربع باشد تا همهٔ صفحهٔ شطرنج توسط وزیرها پوشیده شود؟**



۱) ۷g

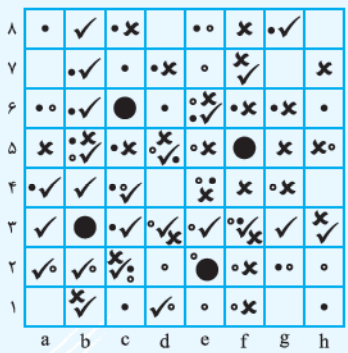
۲) ۷a

۳) ۴d

۴) با همین ۴ وزیر نیز همهٔ صفحه پوشیده شده.

پاسخ **گزینهٔ ۳** خب بررسی کنیم و ببینیم ۴ وزیر حاضر، چه خانه‌هایی از صفحه را پوشش می‌دهند.

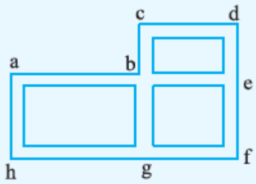
همان‌طور که دیده می‌شود، مربع‌های a_1، a_7، d_8، d_4، g_1، g_7 و h_4 و h_8 پوشش داده نشده‌اند که با قراردادن یک وزیر در ۴d، همهٔ این نقاط نیز پوشش داده می‌شوند.



۱- Dominating

مجموعه‌های احاطه‌گر

تست **فرض کنید که شکل زیر، نقشهٔ یک منطقه از شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های شهر، دستگاه خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که هر فرد، در هر تقاطعی که باشد یا در آن تقاطع، خودپرداز باشد یا حداکثر با رفتن به تقاطع مجاور، به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد. در کدام حالت این اتفاق نمی‌افتد؟**

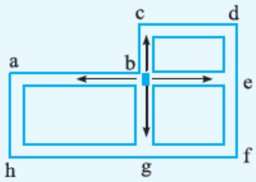


۱) خودپردازها در تقاطع‌های d، b و g باشند.

۲) خودپردازها در تقاطع‌های f، b و a باشند.

۳) خودپردازها در تقاطع‌های e، b و g باشند.

۴) خودپردازها در تقاطع‌های g، a ، e و c باشند.



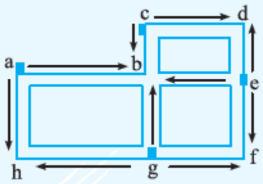
پاسخ **گزینهٔ ۲** با قراردادن یک خودپرداز در تقاطع b، همهٔ تقاطع‌های a، c، e و g پوشش داده می‌شوند و فقط سه تقاطع d ، f و h باقی می‌مانند؛

در ۱ اگر دو خودپرداز در d و g، قرار دهیم، خودپرداز g، تقاطع‌های f و h را نیز پوشش می‌دهد. (باقی تقاطع‌ها نیز توسط b، پوشش داده شده‌اند.)

در ۲ با قراردادن دو خودپرداز دیگر در a و f، هیچ خودپردازی تقاطع d را پوشش نمی‌دهد و بنابراین پاسخ همین ۲ است.

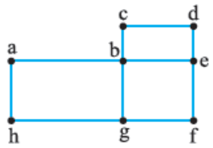
خوب است که ۳ و ۴ را هم بررسی کنیم:

در ۳ اگر به‌جز خودپرداز b، دو خودپرداز دیگر در e و g قرار دهیم، خودپرداز e، دو تقاطع d و f و خودپرداز g، تقاطع h را پوشش می‌دهند و بنابراین همهٔ تقاطع‌ها پوشش داده می‌شوند.



در ۴ در چهار نقطه، خودپرداز قرار داده‌ایم. خودپرداز a، تقاطع‌های b و h را پوشش می‌دهد. خودپرداز g نیز، تقاطع‌های f، h و b را پوشش می‌دهد. توسط خودپرداز e، تقاطع‌های d، f و b پوشش داده می‌شوند و با قراردادن یک خودپرداز دیگر در نقطهٔ c، این نقطه نیز پوشش داده می‌شود.

فـرض کنید که در مثال قبل، منطقهٔ موردنظر را توسـط گراف، مدل‌سـازی کنیـم. به این صورت که تقاطع‌ها را با رأس‌ها و خیابان‌ها را با یال‌ها نشان دهیم. گراف به وجود آمده به صورت روبه‌رو خواهد بود:

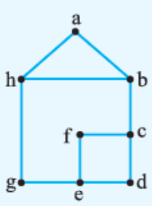


حالا مجموعهٔ داده‌شده در ۱، یعنی $\{b,d,g\}$ را در نظر بگیرید. هر رأسی از گراف را که در نظر بگیرید، یا خودش عضو این مجموعه است (مثل رأس d) یا دست‌کم به یکی از اعضای این مجموعه وصل است. به عنوان مثال، رأس f در مجموعه نیست، ولی به رأس g وصل است. به چنین مجموعه‌ای، یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف گفته می‌شود.

مجموعهٔ احاطه‌گر: زیرمجموعهٔ D از رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم، هرگاه هر رأسی از گراف که در D نباشد، دست‌کم به یکی از رأس‌های عضو D وصل باشد.

واضح است که هر گراف، مجموعه‌های احاطه‌گرِ مختلفی، می‌تواند داشته باشد. مثلاً در تست قبل، نه تنها هر سه مجموعهٔ $\{b,g,d\}$ ، $\{b,g,e\}$ و $\{a,c,e,g\}$ احاطه‌گرند، تازه احاطه‌گر بیشتری هم برای گراف داده‌شده، می‌توانیم بنویسیم.

تست **در گراف روبه‌رو، کدام مجموعه، احاطه‌گر است؟**



۱) $\{h,f\}$

۲) $\{h,d\}$

۳) $\{a,d,g\}$

۴) $\{b,e\}$

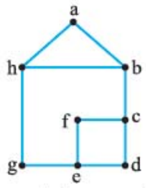
پاسخ **گزینهٔ ۴** در ۱ رأس d، نه خودش عضو مجموعه است و نه به هیچ‌کدام از دو رأس h و f وصل است.

در ۲ رأس f، نه خودش عضو مجموعه است و نه به هیچ‌کدام از دو رأس h و d وصل است.

در ۳ نیز، رأس f، نه عضو مجموعهٔ $\{a,d,g\}$ است و نه به هیچ‌کدام از این سه رأس، وصل است.

اما مجموعهٔ $\{b,e\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، چرا که هر رأس گراف، یا عضو این مجموعه است یا به حداقل یکی از این دو رأس، وصل است.

بنابراین ۴ درست است.



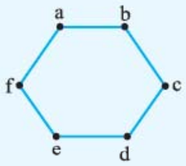
روشن است که گراف روبه‌رو، مجموعه‌های احاطه‌گر فراوانی دارد. بزرگ‌ترین آن، همان مجموعهٔ رأس‌های گراف، یعنی $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ است. $\{h,f,d\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر سه‌عضوی از این گراف است، اما در میان همهٔ مجموعه‌های احاطه‌گرِ این گراف، کدام مجموعه کم‌ترین تعداد عضو را دارد؟ همان‌طور که دیدید، مجموعهٔ $\{e,b\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی این گراف بود که بدیهی است کم‌ترین تعداد عضو را نیز دارد. به چنین مجموعه‌ای، **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** می‌گوییم.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌نامیم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گریِ گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

- به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک γ ـ مجموعه می‌گوییم.

برای مثال، عدد احاطه‌گری برای مثال قبل، برابر ۲ است و مجموعهٔ $\{b,e\}$، یک γ ـ مجموعه، برای گراف داده‌شده است.

تست دربارهٔ گراف روبه‌رو کدام گزینه درست نیست؟



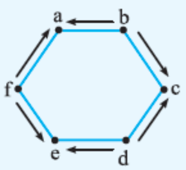
۱) $\{b,d,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

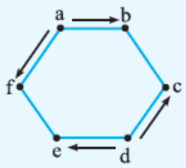
۲) $\gamma(G)$ در این گراف برابر ۲ است.

۳) هر مجموعهٔ سه‌عضوی دلخواه یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

۴) این گراف دارای سه γ ـ مجموعه است.

پاسخ **گزینهٔ ۳** $\{b,d,f\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؛ زیرا همهٔ رأس‌های گراف، یا عضوی از این مجموعه‌اند یا به یکی از رئوس این مجموعه وصل‌اند.



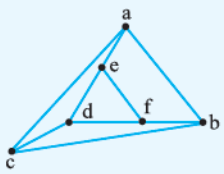


$\gamma(G)$ در این گراف برابر ۲ است، چون با یک رأس، کل رأس‌ها پوشش داده نمی‌شود و از طرفی هم $\{a,d\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است که دو عضو دارد.

اگر کمی دقت کنید، می‌فهمید که این گراف، دارای سه‌تا γ ـ مجموعه به صورت‌های $\{a,d\}$، $\{b,e\}$ و $\{c,f\}$ است، بنابراین ۴ هم درست است.

اما ۳ نادرست است، زیرا به عنوان مثال $\{a,b,c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست، زیرا رأس e، نه عضو این مجموعه است و نه به هیچ‌کدام از سه رأس a، b و c وصل است.

تست در گراف روبه‌رو $\gamma(G)$ کدام است؟



۱) ۲

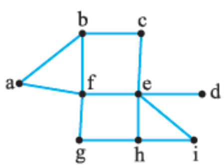
۲) ۳

۳) ۴

۴) ۱

پاسخ **گزینهٔ ۱** من می‌گویم $\gamma(G)=1$ نیست، چرا؟ چون اگر فقط یکی از رأس‌ها را در نظر بگیریم (مثلاً رأس a)، دو رأس وجود دارد که به آن وصل نیست (d و f)، اما می‌توانیم نتیجه بگیریم $\gamma(G)=2$. مثلاً کافی است یک رأس از مثلث داخلی و یک رأس از مثلث خارجی انتخاب کنیم، مثل $\{a,e\}$، تا همهٔ رأس‌های دیگر گراف، به حداقل یکی از این‌ها وصل باشد.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال



گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید. مجموعه‌های احاطه‌گر مختلفی، برای این گراف، می‌توانیم بنویسیم. به عنوان مثال $\{e,a,g\}$، $\{d,h,f,a,c\}$ و $\{f,e\}$، سه مجموعهٔ احاطه‌گر مختلف‌اند. هم‌چنین در این گراف، $\gamma(G)=2$ و مجموعهٔ $\{f,e\}$، یک γ ـ مجموعه است. خب این‌ها را قبلاً گفته‌ایم.

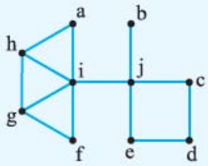
حالا مجموعهٔ $\{a,e,g\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، اما اگر هر کدام از اعضای آن را حذف کنیم، مجموعهٔ به وجود آمده، دیگر احاطه‌گر نیست. به بیان دیگر، هیچ‌کدام از سه مجموعهٔ $\{a,e\}$، $\{a,g\}$ و $\{g,e\}$ احاطه‌گر نیستند. به چنین مجموعه‌هایی، مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمال می‌گویند.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال: مجموعهٔ احاطه‌گری که با حذف هر یک از عضوهایش، دیگر احاطه‌گر نباشد را، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌گویند.

مثلاً مجموعهٔ $\{a,c,d,f,h\}$، احاطه‌گر مینیمال نیست، زیرا اگر a را حذف کنیم، مجموعهٔ $\{c,d,f,h\}$، باز یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از طرفی دیدیم $\{f,e\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و $\{a,e,g\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است. بنابراین:

یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌تواند مینیمم نباشد، اما برعکس، هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم قطعاً مینیمال است.

تست **در گراف روبه‌رو، کدام مجموعه، احاطه‌گر مینیمال نیست؟**



۱) $\{i, j, d\}$

۲) $\{i, d, b, g\}$

۳) $\{h, g, j, e\}$

۴) $\{a, f, d, b\}$

پاسخ **گزینهٔ ۲** کمی جستجو کنید! به نظر می‌رسد با دو رأس، نمی‌توانیم کل رأس‌های دیگر را پوشش دهیم. من می‌گویم بهتر است از قسمت چپ گراف، i را بگیریم و از راستی هم، j را بگیریم، اما هنوز رأس d به هیچ‌کدام وصل نیست. مجموعهٔ $\{i, j, d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است، پس $\gamma(G) = ۳$ می‌شود. با حذف هر کدام از سه عضو i یا j یا d، مجموعهٔ $\{i, j, d\}$، دیگر یک γ ـ مجموعه نیست، پس این مجموعه، احاطه‌گر مینیمال هم می‌شود. در بالا هم گفتیم که هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هم هست.

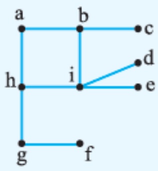
اما مجموعهٔ $\{i, d, b, g\}$ مینیمال نیست، زیرا اگر g را حذف کنیم، مجموعهٔ $\{i, d, b\}$ نیز باز احاطه‌گر است. بنابراین ۲، پاسخ سؤال است. مجموعه‌های $\{h, g, j, e\}$ و $\{a, f, d, b\}$، نیز دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال هستند، زیرا اگر هر کدام از اعضای آن حذف شوند، مجموعه‌های باقی‌مانده، دیگر احاطه‌گر نیستند. می‌بینم که هنوز دارید بدطور نگاه می‌کنید!

برای روشن‌شدن بیشتر این موضوع و درک بهتر مجموعه‌های مینیمال، بررسی می‌کنیم که چرا با حذف هر کدام از اعضای این مجموعه‌ها، مجموعهٔ جدید به وجود آمده دیگر مینیمال نیست.

مجموعهٔ $\{h, g, j, e\}$ را در نظر بگیرید:

- اگر e حذف شود، رأس d به هیچ‌کدام از j و g و h وصل نیست.
- اگر j حذف شود، رأس b به هیچ‌کدام از e و g و h وصل نیست.
- اگر h حذف شود، رأس a به هیچ‌کدام از e و j و g وصل نیست.
- و بالاخره اگر g حذف شود، رأس f به هیچ رأسی از h و j و e وصل نیست.
- اگر برای مجموعهٔ $\{a, f, d, b\}$ هم همین کارها را انجام دهید، می‌بینید که هیچ رأسی قابل حذف‌شدن نیست. *(همه رو من نباید بگم که!)*

تست **در گراف روبه‌رو، مجموعهٔ $\{i, b, h, g, f, c\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. حداکثر چند عضو این مجموعه را می‌توان حذف کرد، به طوری که مجموعه به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل شود؟**

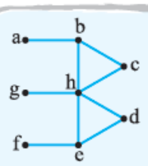


۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ ۳** هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هم هست. مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، کم‌ترین تعداد رأس را در بین همهٔ مجموعه‌های احاطه‌گر دارد، پس اگر بتوانیم با حذف رأس‌ها از مجموعهٔ داده‌شده، به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برسیم، با یک تیر، دو نشان زده‌ایم؛ هم مینیمال ساخته‌ایم و هم رأس‌های بیشتری را حذف کرده‌ایم. از بین i و d و e حداقل یکی را باید بگیریم، اما رأسی که درجهٔ بزرگ‌تری دارد و به رأس‌های بیشتری وصل است، رأس i است، پس بهتر است آن را انتخاب کنیم. اگر i را داخل مجموعه قرار دهیم، رأس‌های b، d، e و h را نیز احاطه می‌کند. از میان g و f نیز حتماً باید یک عضو در مجموعه باشد که همدیگر را احاطه کنند. هم‌چنین چون در مجموعهٔ $\{i, f\}$، a و c احاطه نشده‌اند، باید عضو دیگری به آن اضافه کرد که a و c نیز احاطه شوند. بنابراین برای داشتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، دست‌کم به سه عضو نیاز داریم. حالا مثلاً مجموعهٔ $\{i, b, f\}$، یک γ ـ مجموعه است. به همین خاطر می‌توانیم از مجموعهٔ $\{i, b, h, g, f, c\}$، حداکثر سه عضو c، g و h را حذف کنیم تا به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برسیم. پس ۳ درست است.

تست **در گراف روبه‌رو، $\gamma(G)$ برابر .... و اگر A یک مجموعهٔ مینیمال باشد، حداکثر .... عضو دارد.**



۱) ۲ ـ ۴ ۲) ۲ ـ ۵

۳) ۳ ـ ۴ ۴) ۳ ـ ۵

پاسخ **گزینهٔ ۴** از بین b و a حداقل یکی را باید بگیریم که بهتر است b باشد. شبیه همین، بهتر است e را بگیریم. اما با دو رأس $\{b, e\}$، کل رأس‌های دیگر احاطه نمی‌شود، بنابراین γ ـ مجموعه، دست‌کم باید سه عضو داشته باشد. مثلاً $\{b, h, e\}$، یک γ ـ مجموعه است و در نتیجه $\gamma(G) = ۳$ خواهد بود. اما اگر به جای b، a را می‌گرفتیم و به جای e، f و هم‌چنین h را در مجموعهٔ احاطه‌گر قرار ندهیم، مجموعهٔ $\{a, g, f, d, c\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، زیرا اگر هر کدام از این عضوها را حذف کنیم، خود آن رأس، احاطه نمی‌شود. بنابراین در این گراف می‌توانیم مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۵عضوی، داشته باشیم.

جزءصحیح و سقف:

جزءصحیح: به $[x]$، جزءصحیح x می‌گوییم. اگر x عددی صحیح باشد، $[x]$ با خود x برابر است، اما اگر x صحیح نباشد، $[x]$ عدد صحیح قبلی آن است. مثلاً $۲ = [۲]$ و $۴ = [۴/۳]$.

سقف: به $\lceil x \rceil$، سقف عدد x می‌گوییم. اگر x عددی صحیح باشد، $\lceil x \rceil$ همان x است، اما اگر x صحیح نباشد، $\lceil x \rceil$ عدد صحیح بعدی آن است.
مثلاً $۲ = \lceil ۲ \rceil$ و $۵ = \lceil ۴/۳ \rceil$.
یک‌جور دیگر هم می‌توانیم بگوییم:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیحِ بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad , \quad [x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عددِ صحیحِ کوچک‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست **۳۴ توریست را می‌خواهیم با تاکسی‌هایی که هر کدام، حداکثر ظرفیت ۴ مسافر را دارند، از فرودگاه به هتل ببریم و در اتاق‌هایی که در هر کدام از آن‌ها، حداکثر ۳ نفر را می‌توان جا داد، اسکان دهیم. به ترتیب به چند تاکسی و چند اتاق نیازمندیم؟**

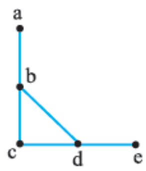
۱) ۸ − ۱۱　　۲) ۸ − ۱۲　　۳) ۹ − ۱۱　　۴) ۹ − ۱۲

پاسخ گزینهٔ ۴ در هر دو حالت باید از مفهوم سقف استفاده کنیم: $\left\lceil \frac{۳۴}{۴} \right\rceil = ۹$

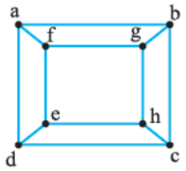
در واقع دارد می‌گوید که اگر ۸ تاکسی بگیریم، حداکثر ۳۲ مسافر را می‌توان جابه‌جا کرد و ۲ مسافر باقی می‌مانند، بنابراین به ۹ تاکسی نیازمندیم.

از طرفی $۱۲ = \left\lceil \frac{۳۴}{۳} \right\rceil$، پس اگر ۱۱ اتاق برای جادادن توریست‌ها در نظر بگیریم، چون ظرفیت هر اتاق، ۳ نفر است، در ۱۱ اتاق، حداکثر ۳۳ توریست را می‌توانیم جا بدهیم، بنابراین احتیاج به ۱۲ اتاق داریم؛ پس ④ درست است.

کران پایین $\gamma(G)$: گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید.

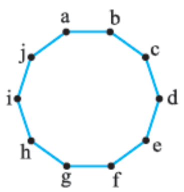


Δ یا درجهٔ بزرگ‌ترین رأس در این گراف، برابر ۳ است و رأس‌های b و d از درجهٔ ۳ هستند. می‌دانیم در هر گراف، هر رأس، خودش و تمام همسایه‌هایش را احاطه می‌کند. مثلاً رأس b که بزرگ‌ترین درجه را دارد، رأس‌های $\{a,b,c,d\}$ را احاطه می‌کند. از طرف دیگر، این گراف ۵ رأس دارد. بنابراین **با فقط یک رأس**، نمی‌توان کل رأس‌های گراف را احاطه کرد. (چون گراف ۵ رأس دارد و رأسی که بزرگ‌ترین درجه را دارد، حداکثر می‌تواند ۴ رأس را احاطه کند. (با خودش حساب کردیم ۴ رأس!))



حالا گراف روبه‌رو که تعداد رأس‌های بیشتری دارد، در نظر بگیرید. در این گراف $p = ۸$ و $\Delta = ۳$ است. اگر بخواهیم که یک مجموعهٔ احاطه‌گر داشته باشیم، باید هر ۸ رأس احاطه شوند، اما با توجه به این‌که $\Delta = ۳$ است، هر رأس در نهایت چهار رأس را احاطه می‌کند، خودش و سه رأس همسایه‌اش. (مثلاً رأس g، رأس‌های g، b، h و f را احاطه می‌کند). بنابراین برای احاطه‌کردن ۸ رأس، به دست‌کم $۲ = \frac{۸}{۴}$ رأس نیاز داریم. برای مثال در این گراف، $\{g,d\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

به یک مثال دیگر توجه کنید:



در گراف روبه‌رو $p = ۱۰$ و $\Delta = ۲$ است، یعنی هر رأس می‌تواند حداکثر ۳ رأس را احاطه کند، خودش و دو رأس همسایه‌اش. (مثلاً رأس a فقط رأس‌های $\{a,b,j\}$ را احاطه می‌کند.) حالا با توجه به این‌که تعداد رأس‌های گراف، ۱۰تا است، برای آن‌که هر ۱۰ رأس احاطه شود و از آن‌جایی که هر رأس، حداکثر می‌تواند سه رأس را احاطه کند، برای داشتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر، به دست‌کم $۴ = \left\lceil \frac{۱۰}{۳} \right\rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس نیازمندیم. (برای مثال $\{a,d,g,i\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.)

همان‌طور که در این سه مثال دیدیم، اگر بزرگ‌ترین درجه Δ باشد، آن رأس یا رأس‌هایی که درجهٔ Δ دارند، می‌توانند $\Delta + ۱$ رأس را احاطه کنند و اگر گراف دارای n رأس باشد، برای احاطهٔ همهٔ رئوس، به حداقل $\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ رأس نیازمندیم و در واقع $\gamma(G)$ باید بزرگ‌تر یا مساوی این عدد باشد.

اگر G، یک گراف nرأسی با ماکسیمم درجهٔ Δ و D، یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، آن‌گاه $|D| \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ یا به بیان دیگر $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$

(به اصطلاح گفته می‌شود که عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$، یک کران پایین برای $\gamma(G)$ است.)

تست **در گرافی از مرتبهٔ ۱۵ می‌دانیم که درجهٔ بزرگ‌ترین رأس، برابر ۳ است. حداکثر تعداد رأس‌هایی که یک رأس در این گراف احاطه می‌کند، برابر .... و با کم‌تر از .... رأس، نمی‌توان همهٔ رئوس را احاطه کرد.**

۱) ۳ − ۴　　۲) ۳ − ۵　　۳) ۴ − ۴　　۴) ۴ − ۵

پاسخ گزینهٔ ۳ چون در این گراف، درجهٔ بزرگ‌ترین رأس، برابر ۳ است، بنابراین یک رأس از درجهٔ Δ، تعداد $(\Delta + ۱)$ رأس را احاطه می‌کند.
(خودش و رأس‌های همسایه‌اش).

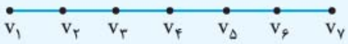
از طرفی با توجه به این‌که $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$، داریم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۵}{۴} \right\rceil = ۴$

پس دست‌کم به ۴ رأس، برای احاطه‌کردن همهٔ رئوس گراف نیازمندیم. بنابراین پاسخ درست، ③ است؛ زیرا با کم‌تر از ۴ رأس، نمی‌توانیم همهٔ رئوس را احاطه کنیم.

تست **عدد احاطه‌گری P_7 کدام است؟**

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ ۲** گراف P_7 به صورت مقابل است:



با توجه به رابطهٔ $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ و با توجه به این‌که در P_7، $\Delta = 2$ است، داریم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$

اما آیا می‌توانیم با سه رأس، یک مجموعهٔ احاطه‌گر داشته باشیم؟ بله، برای مثال $\{V_2, V_5, V_7\}$، یک γ ـ مجموعه است.

تست **$\gamma(G)$ در کدام‌یک از گراف‌های زیر با بقیه متفاوت است؟**

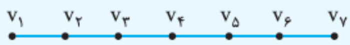
۱) P_7 ۲) C_8 ۳) P_9 ۴) C_{10}

پاسخ **گزینهٔ ۴** گفتیم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ و از طرفی در همهٔ گراف‌های P_7، C_8، P_9 و C_{10}، درجهٔ بزرگ‌ترین رأس برابر ۲ است. بنابراین:

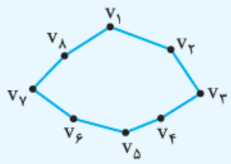
در $C_8 \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$ در $P_7 \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$

در $C_{10} \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 4$ در $P_9 \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{9}{3} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$

در هر سه گراف P_7، C_8 و P_9، عدد احاطه‌گری برابر ۳ است. برای مثال:

$P_7 :$


$\Rightarrow \{V_2, V_5, V_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

$C_7 :$


$\Rightarrow \{V_2, V_5, V_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

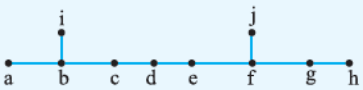
$P_9 :$


$\Rightarrow \{V_2, V_5, V_8\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

اما عدد احاطه‌گری C_{10}، حداقل برابر ۴ است. اگر شبیه بالا عمل کنیم، مجموعهٔ احاطه‌گر ۴عضوی، برای C_{10} هم پیدا می‌شود، پس $\gamma(C_{10}) = 4$ شده و با بقیه متفاوت است.

در گراف‌های C_n و P_n، عدد احاطه‌گری برابر است با: $\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$

تست **در گراف روبه‌رو، $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر .... و عدد احاطه‌گری، برابر .... است.**



۱) ۲ − ۳   ۲) ۲ − ۴

۳) ۳ − ۳   ۴) ۳ − ۴

پاسخ **گزینهٔ ۴** با توجه به این‌که این گراف ۱۰ رأس دارد و Δ در آن برابر ۳ است، حاصل $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر، $\left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3$ می‌باشد. از بین a و b و i، حداقل یکی باید انتخاب شود، که بهتر است b باشد. از بین f و J هم حداقل یکی باید انتخاب شود، که بهتر است f باشد. برای این‌که همهٔ رأس‌های دیگر احاطه شود، باید حداقل دو رأس d و g (یا h) را نیز اضافه کنیم، پس $\gamma(G) = 4$ می‌شود.

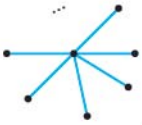
تست **در گرافی از مرتبهٔ ۷ می‌دانیم که $\gamma(G) = 1$ است. این گراف دست‌کم چند یال دارد؟**

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

پاسخ **گزینهٔ ۲** وقتی $\gamma(G) = 1$ است، یعنی دست‌کم یک رأس وجود دارد که همهٔ رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند و به بیان دیگر، به همهٔ رأس‌های دیگر وصل است:

چنین گرافی دست‌کم دارای ۶ یال خواهد بود، بنابراین (۲) درست است.

اگر در گرافی n رأسی، $\gamma(G) = ۱$ باشد، گراف دست‌کم $(n-۱)$ یال دارد و به صورت روبه‌رو (یک درخت ستاره‌ای) است.

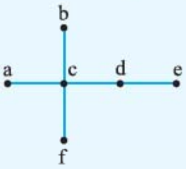


اگر $\gamma(G) = ۱$ باشد، حداکثر تعداد یال‌ها وقتی به دست می‌آید که گراف کامل باشد، پس حداکثر یال‌ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ می‌شود.

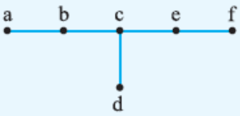
تست در کدام‌یک از گراف‌های زیر، فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۲ وجود دارد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

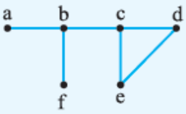
پاسخ گزینهٔ ۳ گفته فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم داشته باشیم، یعنی مجموعهٔ احاطه‌گر، یکتا باشد. در گراف داده‌شده در (۱) مجموعه‌های $\{c,d\}$ و $\{c,e\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم هستند.



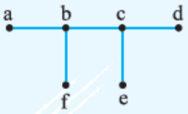
در گراف داده‌شده در (۲) مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، دست‌کم سه عضو دارد (مثلاً $\{b,e,c\}$).



در گراف داده‌شده در (۴) نیز، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۲، یکتا نیست. برای مثال؛ مجموعه‌های $\{b,c\}$، $\{b,d\}$ و $\{b,e\}$، γ ـ مجموعه‌اند:



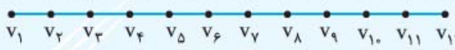
اما در گراف داده‌شده در (۳)، فقط مجموعهٔ $\{b,c\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۲ است.



تست در گراف $P_{۱۲}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ در این گراف، مجموعهٔ $\{V_۲, V_۵, V_۸, V_{۱۱}\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم *(سه‌تا سه‌تا میریم)* است، اما اگر بخواهیم مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، تعداد عضوهای بیشتری داشته باشد، برای مثال؛ مجموعهٔ $\{V_۱, V_۳, V_۵, V_۷, V_۹, V_{۱۱}\}$، یک مجموعهٔ مینیمال ۶عضوی است که حداکثر عضو را دارد؛ (یکی در میون میریم جلو)، پس (۴) درست است.



به گراف همبندی که دور نداشته باشد، درخت می‌گویند.

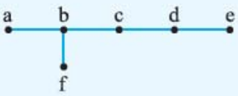
در هر درخت رابطهٔ $q = p - ۱$ برقرار است. مثلاً گراف مقابل یک درخت است:

تست در کدام‌یک از درخت‌های زیر، $\gamma(G)$ با بقیه فرق دارد؟

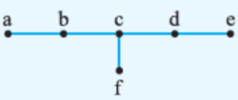
۱)
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ گزینهٔ ۳ در درخت داده‌شده در (۱) مجموعهٔ $\{b,e\}$، یک γ ـ مجموعه است، پس $\gamma(G) = ۲$.

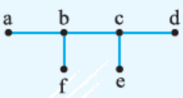
در درخت داده‌شده در (۲) مجموعهٔ $\{b,e\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است؛ یعنی $\gamma(G) = ۲$.



در درخت داده‌شده در (۳) مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، دست‌کم سه عضو دارد؛ از طرفی $\{b,c,d\}$ احاطه‌گر بوده، پس: $\gamma(G) = ۳$

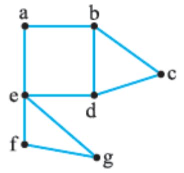


در درخت داده‌شده در (۴) نیز، مجموعهٔ $\{b,c\}$، یک γ ـ مجموعه است، یعنی $\gamma(G) = ۲$؛ بنابراین پاسخ (۳) است.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۱۰۶- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برای گراف روبه‌رو، احاطه‌گر نیست؟



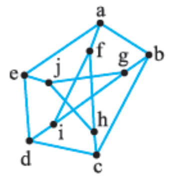
۱) $\{e,d\}$

۲) $\{b,f\}$

۳) $\{g,d\}$

۴) $\{c,e\}$

۱۱۰۷- کدام مجموعه برای گراف مقابل، احاطه‌گر نیست؟



۱) $\{a,b,c,d,e\}$

۲) $\{a,i,h\}$

۳) $\{f,g,h,e\}$

۴) $\{b,c,j,d\}$

۱۱۰۸- در گرافی از مرتبه‌ی ۱۳ می‌دانیم که درجهٔ رأس a برابر ۵ است. چند رأس این گراف توسط a، احاطه نمی‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) نمی‌توان گفت.

۱۱۰۹- یک وزیر را در یک صفحهٔ شطرنج قرار می‌دهیم. حداکثر چند مربع از ۶۳ مربع باقی‌مانده، توسط این وزیر، پوشش داده می‌شود؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

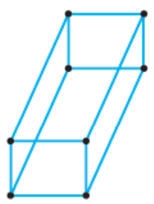
۱۱۱۰- اگر $[2a]=3$ و $\lceil 3a\rceil=5$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\frac{4}{3}<a\le 2$ ۲) $\frac{3}{2}<a\le\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}\le a\le 2$ ۴) $\frac{3}{2}\le a\le\frac{5}{3}$

۱۱۱۱- تعدادی از کارکنان یک شرکت قرار است که با تعدادی تاکسی به محلی بروند. هر ۴ نفر به یک تاکسی نیاز دارند و هزینهٔ هر تاکسی، ۳۵ هزار تومان است. اگر کل پول پرداخت‌شده توسط شرکت برای تاکسی‌ها، ۴۵۵ هزار تومان باشد، تعداد کارکنانی که سوار تاکسی شده‌اند، دست‌کم چند نفر بوده است؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۵۱ ۴) ۵۲

۱۱۱۲- فرض کنید که گراف روبه‌رو، نشان‌دهندهٔ یک شبکهٔ متشکل از ۸ کامپیوتر است و یال بین هر دو رأس، نشان‌دهندهٔ آن است که کامپیوترهای نظیر آن دو رأس، با هم در ارتباط هستند. با انتخاب دست‌کم چند کامپیوتر، می‌توان به همهٔ کامپیوترهای این شبکه وصل شد؟



۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

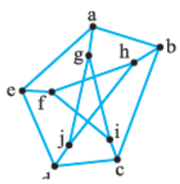
۱۱۱۳- برای احاطه‌کردن همهٔ رأس‌های یک گراف ۳ ـ منتظم از مرتبهٔ ۲۲، کدام عدد، یک کران پایین برای $\gamma(G)$ است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۱۱۴- به ازای کدام مقدار m و n، گزارهٔ: «تعداد کم‌تر از mرأس، نمی‌توانند تمام nرأس یک گراف که در آن $\Delta=4$ است را احاطه کند.» درست است؟

۱) $m=6$ و $n=24$ ۲) $m=9$ و $n=34$ ۳) $m=10$ و $n=44$ ۴) $m=11$ و $n=54$

۱۱۱۵- مجموعهٔ $\{f,g\}$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، تشکیل یک γ ـ مجموعه برای گراف روبه‌رو می‌دهند؟



۱) $\{b,d\}$

۲) $\{b,c\}$

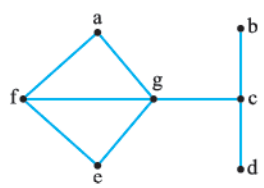
۳) $\{c,f\}$

۴) $\{d,f\}$

۱۱۱۶- در گراف G از مرتبهٔ ۱۰، $\delta=6$ است. کدام گزینه در مورد عددِ احاطه‌گریِ گرافِ مکملِ G، درست است؟ (بهترین کران پایین موردنظر است.)

۱) $\gamma(\overline{G})\ge 1$ ۲) $\gamma(\overline{G})\ge 2$ ۳) $\gamma(\overline{G})\ge 3$ ۴) $\gamma(\overline{G})\ge 4$

۱۱۱۷- برای گراف روبه‌رو، کدام گزینه یک γ ـ مجموعه است؟



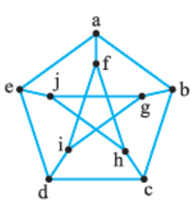
۱) $\{a,b,d,e\}$

۲) $\{a,e,c\}$

۳) $\{c,g\}$

۴) $\{f,g,d\}$

۱۱۱۸- از مجموعهٔ احاطه‌گر $\{b,c,d,e,f,g,h\}$ برای گراف زیر، حداکثر چند عضو می‌توان حذف کرد که مجموعهٔ باقی‌مانده، هنوز احاطه‌گر باشد؟



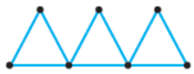
۱) ۱

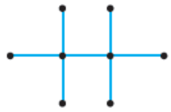
۲) ۲

۳) ۳

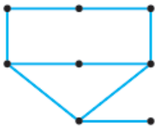
۴) ۴

۱۱۱۹- در کدام‌یک از گراف‌های زیر، $\gamma(G)$ برابر ۳ است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

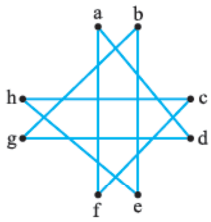
۱۱۲۰- در یک گراف ۳ ـ منتظم از مرتبهٔ n، می‌دانیم که $\gamma(G) =$ ۷ است. n برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۴

۱۱۲۱- در گراف G از مرتبهٔ ۱۲ داریم ۶ = Δ. کدام گزینه درست است؟

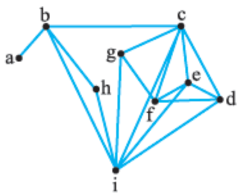
۱) ۲ $\le \gamma(G) \le$ ۶
۲) ۲ $\le \gamma(G) \le$ ۵
۳) ۳ $\le \gamma(G) \le$ ۶
۴) ۳ $\le \gamma(G) \le$ ۵

۱۱۲۲- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



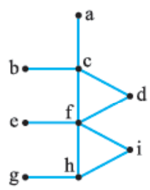
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۲۳- در گراف روبه‌رو، $\gamma(G)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۲۴- کدام‌یک از یال‌های زیر به گراف روبه‌رو اضافه شود تا ۲ = $\gamma(G)$ بشود؟

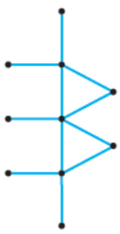


۱) eg
۲) eh
۳) id
۴) ie

۱۱۲۵- در گراف روبه‌رو، چند γ ـ مجموعه وجود دارد؟

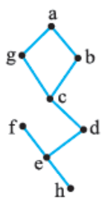
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) ۸

۱۱۲۶- برای گراف مقابل، $\gamma(G)$ برابر با کدام است؟



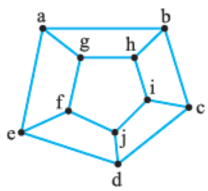
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۲۷- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



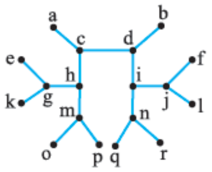
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۲۸- برای گراف روبه‌رو، $\gamma(G)$ برابر کدام است؟



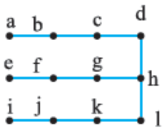
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۲۹- $\gamma(G)$ برای گراف روبه‌رو کدام است؟



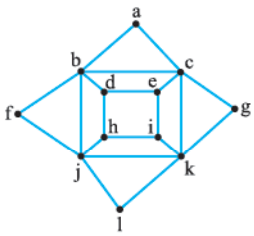
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۱۳۰- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



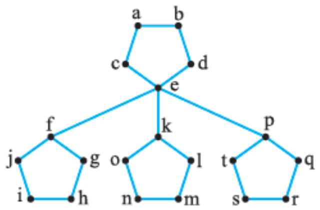
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۳۱- مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف روبه‌رو چند عضو دارد؟



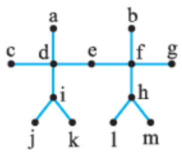
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۳۲- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو کدام است؟



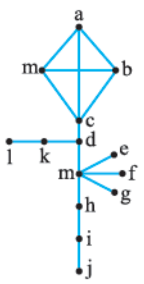
۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۱۱۳۳- در گراف روبه‌رو، $\gamma(G)$ کدام است؟



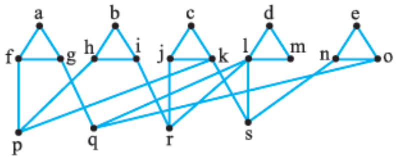
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۱۳۴- عدد احاطه‌گر گراف مقابل کدام است؟



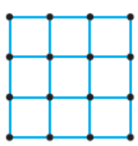
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۳۵- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو، کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۱۱۳۶- عدد احاطه‌گر گراف روبه‌رو کدام است؟

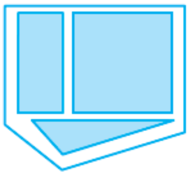


۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۱۳۷- در گراف همبند فاقد دور nرأسی، اگر $\Delta = n - 2$ باشد:

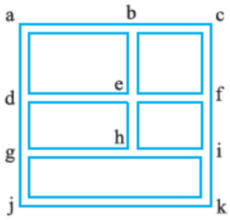
۱) $\gamma(G) = 1$ است.
۲) $\gamma(G) = 2$ است.
۳) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر $n-1$ رأس دارد.
۴) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر $[\frac{n}{3}]$ رأس دارد.

۱۱۳۸- اگر شکل روبه‌رو، نقشهٔ قسمتی از یک شهر باشد، دست‌کم چند خودپرداز در برخی از تقاطع‌ها نصب کنیم که هر فرد، در هر تقاطعی که باشد، یا به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور، به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند؟



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۳۹- فرض کنید که شکل روبه‌رو نقشهٔ قسمتی از یک شهر باشد. می‌خواهیم تعدادی خودپرداز در برخی از تقاطع‌های این خیابان‌ها نصب کنیم که هر فرد در هر تقاطعی که باشد یا به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور، به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند. اگر یکی از خودپردازها را در چهارراه e نصب کنیم، دست‌کم چند خودپرداز دیگر نیاز داریم؟



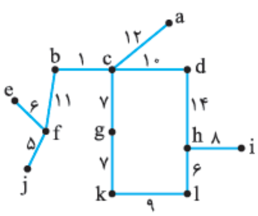
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۴۰- فرض کنید A، B، C، D، E و F شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها در جدول روبه‌رو آمده باشد. می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان بنا کنیم، به طوری که تمام شهرهای استان، تحت پوشش قرار گیرد. اگر هر ایستگاه تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل به چند ایستگاه رادیویی نیاز داریم؟

	A	B	C	D	E	F
A	۰	۴۰	۷۰	۱۰۰	۹۰	۴۵
B	۴۰	۰	۳۰	۱۲۰	۱۱۰	۸۰
C	۷۰	۳۰	۰	۷۰	۷۵	۹۰
D	۱۰۰	۱۲۰	۷۰	۰	۲۵	۶۰
E	۱۹۰	۱۱۰	۷۵	۲۵	۰	۲۰
F	۴۵	۸۰	۹۰	۶۰	۲۰	۰

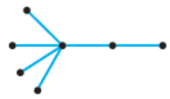
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱۴۱- نقشهٔ روبه‌رو، نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا است و مسافت جاده‌های بین آن‌ها، مشخص شده است. می‌خواهیم چند درمانگاه در برخی از این روستاها احداث کنیم، به گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین درمانگاه، بیشتر از ۲۰ کیلومتر نباشد و از طرفی، کم‌ترین درمانگاه را ایجاد کنیم. با توجه به نقشهٔ فوق، به دست‌کم چند درمانگاه نیازمندیم؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۴۲- در کدام‌یک از گراف‌های زیر، γ ـ مجموعه، یکتا است؟

۱)  ۲)  ۳) ۴) 

۱۱۴۳- در گراف G می‌دانیم، $\gamma(G)$ برابر ۲ و A یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳عضوی و B یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴عضوی مینیمال است. در این صورت:

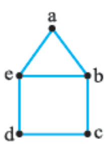
۱) با برداشتن هر عضو A و B، هیچ‌کدام از این مجموعه‌های باقی‌مانده، دیگر احاطه‌گر نیستند.

۲) با برداشتن هر عضو A، مجموعهٔ باقی‌مانده احاطه‌گر نیست، اما می‌توان یک عضو از B حذف کرد و مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد.

۳) ممکن است از A یک عضو حذف کنیم و مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد، ولی اگر هر عضوی از B برداریم، مجموعهٔ باقی‌مانده، دیگر احاطه‌گر نیست.

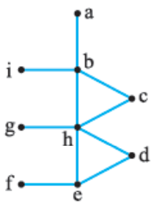
۴) ممکن است از هر کدام از مجموعه‌های A و B بتوانیم یک عضو برداریم و مجموعه‌های باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد.

۱۱۴۴- در گراف روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، حداکثر چند عضو دارد؟



۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۴۵- یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، برای گراف روبه‌رو، حداکثر چند عضو دارد؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۱۴۶- کدام گزینه درست است؟

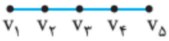
۱) هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه را با حذف برخی از رئوسش می‌توان به یک γ ـ مجموعه تبدیل کرد.

۲) هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه را با حذف برخی از رئوسش می‌توان به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.

۳) هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال را با حذف برخی از رئوسش می‌توان به یک γ ـ مجموعه تبدیل کرد.

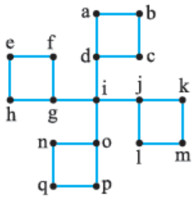
۴) اگر A یک γ ـ مجموعه و B یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال باشد، $A-B$ برابر تهی است.

۱۱۴۷- در گراف زیر، اگر A یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و $V_3 \in A$، در این صورت A دارای .... عضو است و .... یک γ ـ مجموعه باشد.



۱) ۲ ـ می‌تواند
۲) ۲ ـ نمی‌تواند
۳) ۳ ـ می‌تواند
۴) ۳ ـ نمی‌تواند

۱۱۴۸- اگر A یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف روبه‌رو باشد، به طوری که $i \notin A$، در این صورت A :



۱) ۸عضوی است.
۲) ۸ یا ۹عضوی است.
۳) ۹عضوی است.
۴) ۵عضوی است.

۱۱۴۹- یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف روبه‌رو، حداکثر چندعضوی است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۱۱۵۰- در گراف همبند فاقد دور از مرتبهٔ ۷ می‌دانیم $\Delta = 5$ است. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۵۱- در گراف ۲ ـ منتظم همبند از مرتبهٔ ۲۳، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۱۵۲- اگر عدد احاطه‌گری گراف C_n برابر ۷ باشد، عدد احاطه‌گری گراف P_n :

۱) قطعاً برابر ۷ است. ۲) برابر ۷ یا ۸ است. ۳) برابر ۶ یا ۷ است. ۴) قطعاً برابر ۸ است.

۱۱۵۳- در گراف ۲ ـ منتظم اندازهٔ ۸، چند مقدار مختلف برای عدد احاطه‌گری ممکن است وجود داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

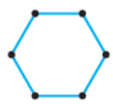
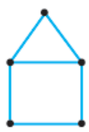
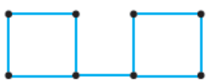
۱۱۵۴- عدد احاطه‌گری گراف k ـ منتظم از مرتبهٔ ۸ و اندازهٔ ۲۴ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱ یا ۲ ۴) اطلاعات کافی نیست.

۱۱۵۵- در گراف C_n، عدد احاطه‌گری برابر ۱۱ و در گراف P_{n+2} نیز، عدد احاطه‌گری برابر ۱۱ است. n کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۰ یا ۳۱ ۴) ۳۱ یا ۳۲

۱۱۵۶- در کدام گراف، عدد احاطه‌گری با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر نیست؟

۱) 
۲)
۳) 
۴) 

۱۱۵۷- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۱۵۸- یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف P_{17}، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۱۵۹- در گراف G از مرتبهٔ ۸ می‌دانیم $\gamma(G) = 1$ است. اختلاف حداقل و حداکثر تعداد یال‌های گراف G کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

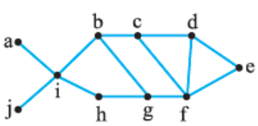
۱۱۶۰- گراف G از مرتبهٔ ۹ و $\gamma(G) = 2$ است. حداکثر اندازهٔ گراف کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

۱۱۶۱- در گراف G از مرتبهٔ ۹ می‌دانیم $\gamma(G) = 1$ و گراف ۱۰ یال دارد. اگر گراف، ۲ دور داشته باشد. تعداد رأس‌های درجهٔ ۱ در آن چندتا است؟

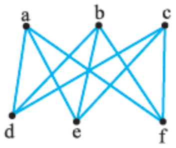
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) نمی‌توان گفت.

۱۱۶۲- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو، برابر .... و این گراف .... γ ـ مجموعه دارد.



۱) ۲ ـ ۱
۲) ۲ ـ ۲
۳) ۳ ـ ۱
۴) ۳ ـ ۲

۱۱۶۳- در گراف روبه‌رو چند γ ـ مجموعه وجود دارد؟



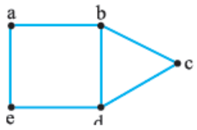
۱) ۴

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

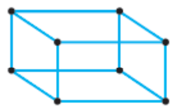
۱۱۶۴- گراف روبه‌رو چند γ ـ مجموعهٔ متمایز دارد؟



۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

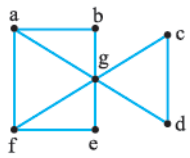
۱۱۶۵- گراف مقابل چند γ ـ مجموعه دارد؟



۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۱۱۶۶- گراف روبه‌رو چند مجموعهٔ احاطه‌گر ۲عضوی دارد؟



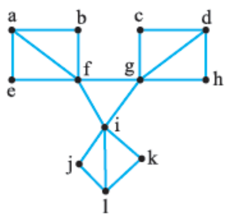
۱) ۶

۲) ۷

۳) ۵

۴) ۹

۱۱۶۷- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو برابر .... و این گراف دارای .... γ ـ مجموعه است.



۱) ۱ − ۳

۲) ۸ − ۳

۳) ۶ − ۳

۴) ۳ − ۴

۱۱۶۸- گراف P_5 چند γ ـ مجموعهٔ متمایز دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۶۹- در گراف P_6 چند مجموعهٔ احاطه‌گر ۴عضوی وجود دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۱۷۰- در گراف C_6 چند مجموعهٔ سه‌عضوی وجود دارد که احاطه‌گر نیستند؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۵

۱۱۷۱- گراف C_{15} چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم ۵عضوی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۱۷۲- کدام گراف، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد؟

۱) C_{12} ۲) P_{12} ۳) C_{13} ۴) P_{13}

۱۱۷۳- کدام گراف همبند با شرایط زیر وجود ندارد؟

۱) مرتبهٔ ۹ که $\gamma = 2$ باشد. ۲) مرتبهٔ ۹ که $\gamma = 3$ باشد. ۳) مرتبهٔ ۹ که $\gamma = 4$ باشد. ۴) هر سه گزینه وجود دارد.

۱۱۰۶- گزینهٔ ۳ رأس a، نه به g وصل است و نه به d! پس (۳)، کل رأس‌ها را احاطه نمی‌کند. در بقیهٔ مجموعه‌ها، مجموعهٔ همسایه‌های هر رأس و خود رأس‌ها، کل گراف را پوشش می‌دهد، پس همگی احاطه‌گر هستند.

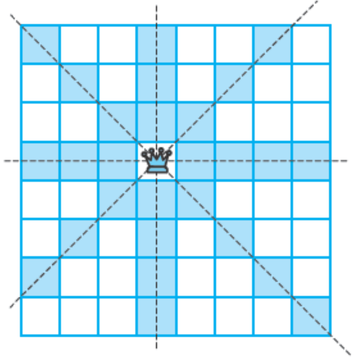
مثلاً: $N_G[d]=\{b,c,e\}$ و $N_G[e]=\{f,g,a,d\}$

می‌بینید که اجتماع این دو مجموعه به همراه e و d، کل رأس‌ها را پوشش می‌دهد.

۱۱۰۷- گزینهٔ ۴ رأس f، به هیچ‌کدام از رأس‌های (۴) وصل نیست، پس رأس‌های (۴)، کل رأس‌های گراف را احاطه نمی‌کند.

۱۱۰۸- گزینهٔ ۲ خب a، ۵ رأس را احاطه می‌کند *(با یال بهش وصل‌ان)* و خود آن هم یکی، پس $۱۳-(۵+۱)=۷$، رأس را احاطه نمی‌کند.

۱۱۰۹- گزینهٔ ۳ هرچه وزیر در مربع‌های میانی قرار بگیرد، خانه‌های بیشتری را پوشش (تهدید) می‌دهد. با توجه به شکل، حداکثر ۲۷ خانه می‌تواند پوشش داده شود.



۱۱۱۰- گزینهٔ ۴ $[x]$ همان کف x (جزء صحیح) و $\lceil x \rceil$ همان سقف x است، یعنی اگر x غیرصحیح باشد، $[x]$ به پایین گرد می‌شود، ولی $\lceil x \rceil$ به بالا!

حالا:
$$[۲a]=۳ \Rightarrow ۳\le ۲a<۴ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۳}{۲}\le a<۲$$
$$\lceil ۳a\rceil=۵ \Rightarrow ۴<۳a\le ۵ \xrightarrow{\div ۳} \frac{۴}{۳}<a\le\frac{۵}{۳}$$

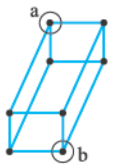
اشتراک بین این دوتا $\frac{۳}{۲}\le a\le \frac{۵}{۳}$ می‌شود.

۱۱۱۱- گزینهٔ ۲ با تقسیم ۴۵۵ بر ۳۵ می‌فهمیم که ۱۳ تاکسی اجاره شده است. گفته حداقل چند نفر! ببینید $۴۸=۴\times۱۲$ نفر که ۱۲ تاکسی را پر کرده‌اند، ولی در آخرین تاکسی ممکن است از یک تا ۴ نفر، سوار تاکسی شده باشند. چون حداقل افراد را می‌خواهیم، فرض می‌کنیم که فقط یک نفر سوار تاکسی آخر شده باشد. به عبارت دیگر، حداقل ۴۹ نفر سوار تاکسی شده‌اند. حالا چه ربطی به این‌جا داشت؟ ببینید در واقع اگر تعداد افراد را n بگیریم:

$$\left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil=۱۳ \Rightarrow ۱۲<\frac{n}{۴}\le ۱۳ \xrightarrow{\times۴} ۴۸<n\le ۵۲$$

پس حداقل n برابر ۴۹ بوده است.

۱۱۱۲- گزینهٔ ۱ باید مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را پیدا کنیم. می‌دانیم $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{۸}{۳+۱}\right\rceil=۲$ است. از طرفی مجموعهٔ $\{a,b\}$، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G)=۲$ می‌شود.



۱۱۱۳- گزینهٔ ۲ قضیه می‌گوید که در گراف n رأسی، $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ است. حالا همهٔ رأس‌ها از درجه ۳ هستند، پس $\Delta=۳$ می‌شود.

$$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۲۲}{۴}\right\rceil=\lceil ۵/\ldots\rceil=۶$$

۱۱۱۴- گزینهٔ ۴ قضیه‌ای داریم که کران پایین، برای عدد احاطه‌گری ارائه می‌کند. این قضیه می‌گوید $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ که n مرتبهٔ گراف است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{۴+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{۵}\right\rceil$ می‌شود. خب حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۲۴}{۵}\right\rceil=۵$، پس با کم‌تر از $m=۶$ رأس، ممکن است احاطه شود، یعنی مثلاً $\gamma(G)=۵$ بوده باشد.

(۲) $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۳۴}{۵}\right\rceil=۷$، پس با کم‌تر از $m=۹$ رأس، ممکن است احاطه شود. (مثلاً با ۷ یا ۸تا!)

(۳) $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۴۴}{۵}\right\rceil=۹$، پس با کم‌تر از $m=۱۰$ رأس، یعنی مثلاً ۹ رأس، ممکن است احاطه شود.

(۴) $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۵۴}{۵}\right\rceil=۱۱$ می‌شود، یعنی با کم‌تر از $m=۱۱$ رأس، قطعاً نمی‌تواند همهٔ رأس‌ها احاطه شود، پس همین گزینه می‌شود پاسخ!

۱۱۱۵- گزینهٔ ۳ گراف از مرتبهٔ $n=۱۰$ بوده و $\Delta=۳$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{۱۰}{۴}\right\rceil=۳$ و از طرفی مثلاً $\{a,j,i\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G)=۳$ می‌شود. اجتماع مجموعهٔ $\{f,g\}$ با گزینهٔ درست، باید ۳ عضو پیدا کند (تا γ ـ مجموعه شود). این یعنی با گزینهٔ درست، در یک رأس اشتراک داشته باشد، یعنی (۱) و (۲) غلط هستند.

اما (۳) $\{f,g\}\cup\{c,f\}=\{f,g,c\}$

این مجموعهٔ احاطه‌گر، ۳رأسی است، پس همین گزینه جواب است.

بد نیست توجه کنید که $\{f,d,g\}$، رأس b را احاطه نمی‌کند، پس (۴) هم نادرست است.

۱۱۱۶- گزینهٔ ۳ مجموع درجهٔ یک رأس در خود گراف و گراف مکمل، برابر $p-1$ می‌شود. فرض کنیم $\deg_G(a)=\delta=۶$ باشد، پس:

$$\underbrace{\deg_G(a)}_{۶}+\deg_{\bar G}(a)=p-1=۹ \Rightarrow \deg_{\bar G}(a)=۳$$

رأس a در خود گراف، دارای کم‌ترین درجه است، پس در گراف مکمل، بیشترین درجه را دارد، این یعنی Δ در گراف مکمل، برابر ۳ می‌شود. حالا در گراف $\bar{G}$ داریم: $\gamma(\bar{G}) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil = ۳$

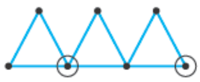
۱۱۱۷- گزینهٔ ۳ γ ـ مجموعه اصلاً یعنی چه؟ یعنی مجموعه‌ای که کل رأس‌های گراف را احاطه کند و دارای کم‌ترین تعداد عضو باشد. خب طبق قضیه داریم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۷}{۴+۱} \right\rceil = ۲$

از طرفی $\{c,g\}$، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G) = ۲$ می‌شود. بنابراین (۳) می‌تواند یک γ ـ مجموعه باشد.

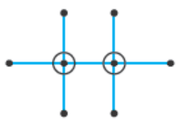
۱۱۱۸- گزینهٔ ۴ گراف داده‌شده (معروف به گراف پترسن)، ۳ ـ منتظم از مرتبهٔ ۱۰ است، پس: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil = ۳$

از طرفی مجموعهٔ $\{e,h,g\}$، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G) = ۳$ می‌شود، پس می‌توانیم رأس‌های b,c,d,f را با خیال راحت حذف کنیم، اما هم‌چنان مجموعهٔ $\{e,h,g\}$، یک γ ـ مجموعه باشد.

۱۱۱۹- گزینهٔ ۴ یکی‌یکی گزینه‌ها را برویم جلو:



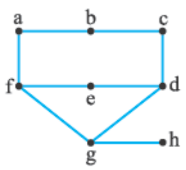
(۱) با دو رأس روبه‌رو، کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = ۲$ است.



(۲) این هم تابلو با دو رأس احاطه می‌شود، پس عدد احاطه‌گری، قطعاً ۳ نیست.

(۳) این هم مثل بالایی‌ها!

پس لابد (۴) درست است.



با کمی جستجو می‌توان دریافت که با دو رأس، نمی‌توانیم کل رأس‌های دیگر را احاطه کنیم، ولی مثلاً $\{b,e,g\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند.

۱۱۲۰- گزینهٔ ۴ برای احاطه‌شدن کل رأس‌ها، ۷ رأس نیاز است، پس گراف حداقل ۷ رأس داشته و (۱) غلط می‌شود.

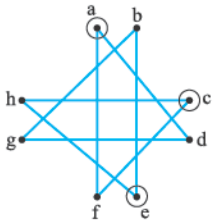
از طرفی گراف فردمنتظم مرتبهٔ فرد نداریم، پس $n = ۱۱$ هم نمی‌تواند باشد. $n = ۸$ هم نمی‌تواند باشد! چرا؟ ببینید یک رأس درجهٔ ۳، خودش و ۳ رأس دیگر را احاطه می‌کند، یعنی با انتخاب یک رأس، چهار رأس احاطه می‌شود. حالا اگر در بدترین حالت، تک‌تک هر ۴ رأس باقی‌ماندهٔ دیگر $(۸ - ۴ = ۴)$ را هم بگیریم، $\gamma(G) = ۵$ می‌شود. نه ۷! در حالت کلی، یک کران بالا برای $\gamma(G)$ به صورت $\gamma(G) \leq n - \Delta$ است. مثلاً اگر $n = ۸$ باشد، $\gamma(G) \leq ۸ - ۳ = ۵$ می‌شود، پس قطعاً $\gamma(G)$ برابر ۷ نمی‌شود. بنابراین (۴) می‌تواند درست باشد.

۱۱۲۱- گزینهٔ ۱ از یک طرف، کران پایین γ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۲}{۶+۱} \right\rceil = ۲$$

اما کران بالا برای γ؛ ببینید رأس Δ، ۶ رأس دیگر را احاطه می‌کند و یکی هم خودش، پس با انتخاب رأس Δ، دقیقاً ۷ رأس احاطه می‌شود. ۵ رأس دیگر باقی مانده است. همهٔ آن‌ها به همراه Δ (یعنی ۷ رأس)، قطعاً کل رأس‌ها را احاطه می‌کنند، یعنی در بدترین شرایط، این گراف با ۶ رأس احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) \leq ۶$. خوب است بدانید همواره $\gamma(G) \leq n - \Delta$.

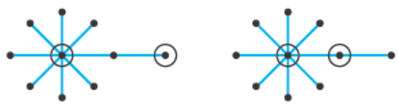
۱۱۲۲- گزینهٔ ۲ گراف از مرتبهٔ $n = ۸$ بوده و $\Delta = ۲$ است، پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۸}{۳} \right\rceil = ۳$. می‌شود. از طرفی مجموعهٔ $\{a,c,e\}$، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = ۳$ می‌شود.



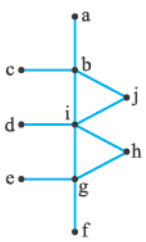
۱۱۲۳- گزینهٔ ۱ گراف از مرتبهٔ $n = ۹$ بوده و $\Delta = ۶$ است، پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۹}{۷} \right\rceil = ۲$. از طرفی $\{b,f\}$، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G) = ۲$.

۱۱۲۴- گزینهٔ ۲ کمی جستجو کنید! مجموعهٔ $\{c,e,h\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، اما اگر یال eh را اضافه کنیم، کل رأس‌ها با دو رأس $\{c,h\}$ احاطه شده و $\gamma(G) = ۲$ می‌شود.

۱۱۲۵- گزینهٔ ۲ خیلی تابلو است. دوتا γ ـ مجموعه داریم که به صورت‌های زیر می‌توانند باشند:

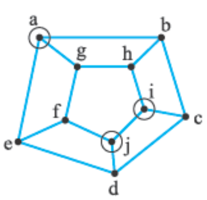


۱۱۲۶- گزینهٔ ۲ $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۵+۱} \right\rceil = ۲$ می‌شود، اما از بین a,c,b حداقل یکی را باید بگیریم که بهتر است b باشد. از بین i و d هم یکی را باید بگیریم که i باشد، بهتر است. با همین استدلال، g را هم بهتر است بگیریم. مجموعهٔ $\{b,i,g\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = ۳$ می‌شود.

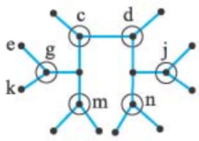


۱۱۲۷- گزینهٔ ۲ از بین f,e,h حداقل یکی باید انتخاب کنیم که بهتر است e باشد. از بین چهارضلعی بالا هم، حداقل دو رأس باید انتخاب شود، پس $\gamma(G) = ۳$.

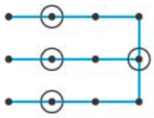
۱۱۲۸- گزینهٔ ۲ گراف از مرتبهٔ $n = ۱۰$ بوده و $\Delta = ۳$ است، پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil = ۳$ می‌شود. از طرفی سه رأس $\{a,i,j\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G) = ۳$ می‌شود.



۱۱۲۹- **گزینهٔ ۴** از بین $\{e,g,k\}$، حداقل یکی باید انتخاب کنیم که بهتر است g باشد. شبیه همین بهتر است که m,n,j را انتخاب کنیم. از بین رأس‌های باقی‌مانده هم، حداقل دوتا را باید انتخاب کنیم، پس $\gamma(G)=۶$ می‌شود.



۱۱۳۰- **گزینهٔ ۳** در مسیر abcd، حداقل دو رأس باید انتخاب شود که بهتر است $\{b,d\}$ باشد. از مسیر efgh هم، رأس f را انتخاب می‌کنیم. از مسیر ijkl هم، حداقل دوتا باید انتخاب کنیم (مثل $\{j,l\}$)، پس $\gamma(G)=۵$! صبر کنید! شاید شما هم در این دام گرفتار شده باشید. راه بهتری هم وجود دارد. ببینید:

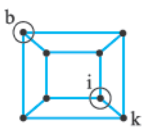


پس: $\gamma(G)=۴$

۱۱۳۱- **گزینهٔ ۲** گراف از مرتبهٔ $n=۱۲$ بوده و $\Delta=۵$ است، پس

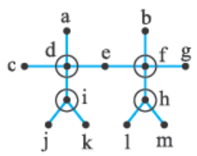
$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{۱۲}{۶}\right\rceil=۲$ *(به نظر با دو رأس نمیشه کل رأس‌ها رو احاطه کرد!)*

ببینید من می‌گویم خود گراف زیر، حداقل دو رأس برای احاطه‌کردن می‌خواهد، اما خب با این دوتا، کل رأس‌های گراف مسئله احاطه نمی‌شود، ولی اگر رأس k را اضافه کنیم، همهٔ رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G)=۳$.



۱۱۳۲- **گزینهٔ ۳** گراف از مرتبهٔ $n=۲۰$ بوده و $\Delta=۵$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{۲۰}{۶}\right\rceil=۴$ می‌شود. خب آیا با ۴ رأس، می‌توانید کل رأس‌ها را احاطه کنید؟ به نظر می‌رسد که این کار ممکن نباشد. ببینید من می‌گویم از هر کدام از پنج‌ضلعی‌ها، حداقل دو رأس باید انتخاب کنیم، پس حداقل ۸ رأس، برای احاطهٔ کل رأس‌ها نیاز است. از طرفی $\{f,h,k,m,p,r,e,a\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G)=۸$ می‌شود.

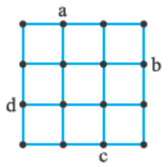
۱۱۳۳- **گزینهٔ ۲** از بین i,j,k حداقل یکی باید انتخاب شود، که بهتر است i را بگیریم. شبیه همین برای احاطه شدن کل رأس‌ها با کم‌ترین تعداد، d,f,h را انتخاب می‌کنیم، پس $\gamma(G)=۴$.



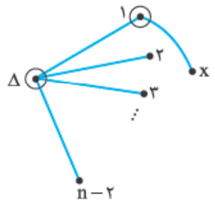
۱۱۳۴- **گزینهٔ ۳** از بین a,m,b,c حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است c را بگیریم. از بین l,k هم حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است k را بگیریم. شبیه همین از بین m,e,f,g هم حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است m را بگیریم و با انتخاب i، کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G)=۴$.

۱۱۳۵- **گزینهٔ ۱** گراف از مرتبهٔ $n=۱۹$ بوده و $\Delta=۵$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{۱۹}{۶}\right\rceil=۴$ می‌شود. از طرفی، از هر کدام از مثلث‌ها، حداقل یک رأس باید انتخاب شود، پس $\gamma(G)\ge ۵$ می‌شود. مجموعهٔ $\{f,h,j,l,n\}$، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G)=۵$ می‌شود.

۱۱۳۶- **گزینهٔ ۲** گراف از مرتبهٔ $n=۱۶$ بوده و $\Delta=۴$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{۱۶}{۵}\right\rceil=۴$. از طرفی مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G)=۴$ است.

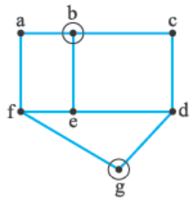


۱۱۳۷- **گزینهٔ ۲** بیایید گراف را رسم کنیم. یک رأس قرار داده و آن را به $n-۲$ رأس دیگر وصل می‌کنیم. یک رأس دیگر مثل x باقی مانده است که چون گراف همبند است، باید آن را به یکی از رأس‌های ۱ تا $n-۲$ وصل کنیم (مثلاً به ۱ وصل می‌کنیم). چون گراف دور ندارد، دیگر یالی نمی‌تواند داشته باشد. *(با اضافه کردن هر یال دیگه، دور به وجود میاد).* واضح است که $\{\Delta,۱\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است، پس $\gamma(G)=۲$ خواهد بود.

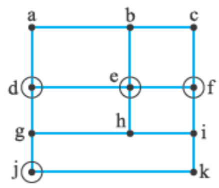


بد نیست توجه کنید که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر $n-۲$ رأس (مجموعهٔ احاطه‌گر $\{۱,۲,\dots,n-۲\}$) می‌تواند داشته باشد، پس ۳ و ۴ هم نادرست هستند.

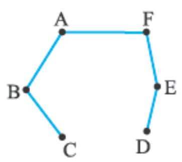
۱۱۳۸- **گزینهٔ ۱** هر تقاطع را با یک رأس و خیابان‌ها را با یال نمایش می‌دهیم تا گراف زیر به دست آید. گراف از مرتبهٔ $n=۷$ و $\Delta=۳$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{۷}{۴}\right\rceil=۲$ می‌شود. از طرفی مجموعهٔ $\{b,g\}$، کل رأس‌های گراف را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G)=۲$ می‌شود.



۱۱۳۹- **گزینهٔ ۲** برای هر تقاطع، یک رأس قرار داده و خیابان‌های بین آن‌ها را هم با یال مشخص کنیم، تا گراف زیر به دست آید. یک خودپرداز که گفته در e قرار دهید. یک راه این است که از بین $\{a,d\}$، حداقل یکی و از بین $\{c,f\}$ هم، حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است f و d را انتخاب کنیم. از بین k و j هم حداقل یکی باید انتخاب شود (مثلاً j)، بنابراین به غیر از e، نیاز به نصب حداقل سه خودپرداز دیگر داریم تا کل رأس‌ها احاطه شده و خواستهٔ مسئله برآورده گردد. یک راه دیگر، انتخاب b به همراه h و j است. خلاصه هرکاری کنیم، نیاز به انتخاب سه رأس داریم.



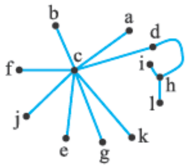
۱۱۴۰- **گزینهٔ ۲** ۶ رأس (متناظر با ۶ شهر) قرار می‌دهیم. اگر شهری، شهر دیگری را پوشش دهد، یعنی فاصلهٔ آن‌ها حداکثر تا ۵۰ کیلومتر باشد، آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم تا گراف مقابل به وجود آید؛ حالا کافی است $\gamma(G)$ را به دست آوریم.



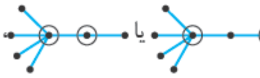
$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۶}{۳}\right\rceil=۲$ می‌شود. از طرفی مجموعهٔ $\{B,E\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G)=۲$.

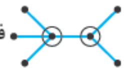
۱۱۴۱- **گزینهٔ ۲** قبل از این‌که بخواهم شما را درگیر راه‌حل اصلی کنم، کمی دقت کنید! من می‌گویم خیلی خوب است که یک درمانگاه در c بزنیم، چون روستاهای b، f، e، j، d، a، g و k با همین یکی، پوشش داده شده می‌شود.

یکی هم در h بزنیم و خلاص! اما برای این که قانع بشوید، باید برای هر منطقه، یک رأس قرار داده و اگر فاصلهٔ دو منطقه، حداکثر ۲۰ کیلومتر باشد، آن‌ها را به هم وصل کنیم. مثلاً c به b وصل می‌شود. c به f و e وصل می‌شود و ... (*یعنی رأس‌هایی که پوشش می‌ده!*) حالا دیگر من گراف را کامل نکشیدم، چون کافی است $\gamma(G)$ و را پیدا کنیم. رأس درجه $p-۱$ نداریم، پس $\gamma(G) > ۱$ و از طرفی با دو رأس $\{c,h\}$، کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = ۲$.

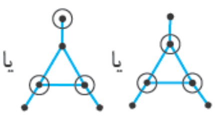


۱۱۴۲- گزینهٔ ۲ گفته γ ـ مجموعه، یکتا باشد، یعنی چی؟ یعنی فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم داشته باشیم. یکی‌یکی گزینه‌ها را بررسی کنیم:

(۱)  هر دو احاطه‌گر مینیمم هستند.

(۲)  فقط همین یک مجموعه است که کل رأس‌ها را با کم‌ترین تعداد عضو، احاطه کند، پس خودش است. همین گزینه جواب است.

(۳)  یا ... ، پس مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم این هم، یکتا نیست.

(۴)  یا ... پس این هم نیست.

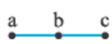
۱۱۴۳- گزینهٔ ۳ با برداشتن یک رأس از A، ممکن است هنوز احاطه‌گر باشد، پس (۱) و (۲) غلط هستند. مجموعهٔ B مینیمال است، پس با برداشتن هر رأس از آن، دیگر احاطه‌گر نخواهد بود، این یعنی (۳) درست است.

۱۱۴۴- گزینهٔ ۱ واضح است که $\gamma(G) = ۲$ (مثلاً $\{e,c\}$ یا $\{a,d\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند). با کمی جستجو درمی‌یابیم که در این گرافِ خاص، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هم هستند، پس حداکثر تعداد عضوهای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، همان ۲ است. به عبارت دیگر، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالِ ۳عضوی نداریم. (*مثلاً* $\{e,c,b\}$ *بگیریم،* b *قابل حذفه و ...*)

۱۱۴۵- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، ولی هیچ‌کدام از رأس‌ها در آن، قابل حذف‌شدن نیست. یعنی اگر هر کدام را حذف کنیم، مجموعه، دیگر احاطه‌گر نخواهد بود. به جای این که رأس b را بگیریم، a و i را می‌گیریم. چرا؟ چون اگر b را بگیریم، هر دو رأس i و a را احاطه می‌کند، آن‌وقت دیگر i و a را نمی‌توانیم بگیریم (*چون قابل حذف شدنه*). شبیه همین به جای h، g و به جای e، f را می‌گیریم تا رأس‌های کم‌تری را احاطه کند. هیچ رأسی c و d را احاطه نکرده، پس آن‌ها را هم می‌گیریم. مجموعهٔ $\{a,i,g,f,c,d\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو است.

۱۱۴۶- گزینهٔ ۲ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، ممکن است مینیمم نباشد، پس این‌گونه نیست که با حذف برخی از رئوس هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواهی، یک γ ـ مجموعه بتوانیم بسازیم. بنابراین (۱) و(۳) رد می‌شوند.

مثلاً گراف مقابل را ببینید:



$\{b\}$، یک γ ـ مجموعه است و $\{a,c\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال. می‌بینید که با حذف هیچ‌کدام از رأس‌های $\{a,c\}$، تبدیل به γ ـ مجموعه نمی‌شود. همین مثال نشان می‌دهد که (۴) هم غلط است، چون $\{b\} - \{a,c\} \neq \varnothing$.

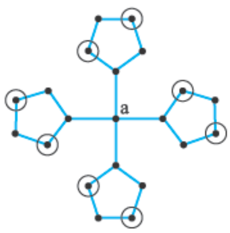
اما (۲) درست است. چرا؟ ببینید، یک مجموعهٔ احاطه‌گر با رأس‌های $\{V_۱, V_۲, \ldots, V_k\}$ داریم. اگر $V_۱$ را حذف کرده و هنوز مجموعه، احاطه‌گر باقی بماند، آن را حذف می‌کنیم، در غیر این صورت آن را نگه می‌داریم. همین کار را برای بقیهٔ رأس‌ها هم انجام می‌دهیم. مجموعهٔ جدیدی که به دست می‌آید، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال خواهد بود.

۱۱۴۷- گزینهٔ ۴ اگر $V_۳ \in A$ باشد، مجموعهٔ $\{V_۱, V_۳, V_۵\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است. چون هر کدام از رأس‌ها را که حذف کنیم، مجموعهٔ حاصل، دیگر احاطه‌گر نیست، پس A دارای ۳ عضو، ولی این مجموعه، γ ـ مجموعه نیست، چون مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، دارای ۲ عضو بوده، مثل $\{V_۲, V_۴\}$ که با کم‌ترین تعداد عضو، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند.

۱۱۴۸- گزینهٔ ۱ اگر i عضو A نباشد، از هر کدام از مربع‌ها، حداقل دو رأس باید انتخاب شود تا کل رأس‌ها احاطه شود. مثلاً $\{d,b,g,e,o,q,j,m\}$ که یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۸عضوی است. اما در گزینه‌ها دقت کنید! آیا مجموعهٔ احاطه‌گر ۹عضوی هم می‌توانیم داشته باشیم. اگر مجموعه‌ای را به صورت $\{a,c,h,f,k,l,n,p\}$ بگیریم، هنوز رأس i احاطه نشده است، پس مجبوریم حداقل یک رأس دیگر (مثل d) اضافه کنیم. مجموعهٔ جدید هم، یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۹عضوی است، ولی مینیمال نیست، چون رأس a یا c قابل حذف‌شدن است.

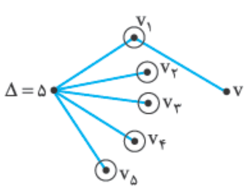
پس مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالی که i عضوی از آن نباشد، می‌تواند فقط ۸عضوی باشد.

۱۱۴۹- گزینهٔ ۲ خب باید کاری کنیم که مجموعهٔ احاطه‌گر، دارای بیشترین تعداد عضو بوده و در ضمن، هیچ رأسی هم قابل حذف‌کردن نباشد. (*با حذف هر رأس، دیگر احاطه‌گر نشه!*) از هر کدام از آن پنج‌ضلعی‌ها، دو رأس باید انتخاب شود. این‌ها را طوری بگیریم که رأس a را احاطه نکنند، یعنی مثلاً به صورت مقابل بگیریم:



برای احاطه شدن a، مجبوریم حداقل یک رأس دیگر (مثل خود a) اضافه کنیم. مجموعهٔ ۹عضوی به دست آمده از رأس‌ها، کل رأس‌های دیگر را احاطه کرده و در ضمن، هیچ رأسی قابل حذف‌شدن نیست، پس مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، حداکثر ۹ عضو می‌تواند داشته باشد.

۱۱۵۰- گزینهٔ ۴ ببینیم ساختار این گراف به چه صورتی می‌تواند باشد! یک رأس $\Delta = ۵$ قرار می‌دهیم. یک رأس دیگر مثل v باقی مانده است. چون گراف همبند بوده و دور هم ندارد، این رأس را با یک یال باید به یکی از رأس‌های $\{V_۱, V_۲, \ldots, V_۵\}$ متصل کرد. (مثلاً به $V_۱$).



یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو می‌تواند به صورت $\{V_۱, V_۲, \ldots, V_۵\}$ باشد، پس (۴) می‌شود پاسخ.

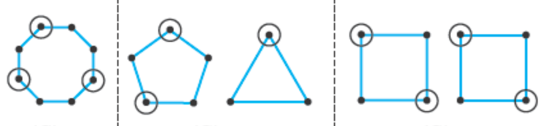
۱۱۵۱- **گزینهٔ ۴** ساختار ۲ ـ منتظم‌ها به صورت اجتماعی از تعدادی C_n (چندضلعی) هستند. حالا گفته همبند، پس فقط یک حالت می‌ماند، آن هم گراف $C_{۲۳}$ است. حتماً یادتان هست که $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳}\right\rceil$، پس $\gamma(C_{۲۳})=\left\lceil \frac{۲۳}{۳}\right\rceil=۸$.

۱۱۵۲- **گزینهٔ ۱** عدد احاطه‌گری هر دو گراف C_n و P_n برابر $\left\lceil \frac{n}{۳}\right\rceil$ است، یعنی $\gamma(C_n)=\gamma(P_n)=\left\lceil \frac{n}{۳}\right\rceil$، پس $\gamma(P_n)=۷$.

۱۱۵۳- **گزینهٔ ۲** در گراف k ـ منتظم مرتبهٔ p داریم $pk=۲q$ پس:

$$۲p=۲\times ۸ \Rightarrow p=۸$$

گراف ۲ ـ منتظم از مرتبهٔ ۸ است. ساختار گراف‌های ۲ ـ منتظم به صورت اجتماعی از تعدادی C_n است، پس این گراف به صورت‌های زیر می‌تواند باشد:



پس $\gamma(G)$ دو مقدار می‌تواند داشته باشد.

۱۱۵۴- **گزینهٔ ۲** در گراف k ـ منتظم مرتبهٔ p و اندازهٔ q، رابطهٔ $pk=۲q$ برقرار است، پس:

$$۸k=۲\times ۲۴ \Rightarrow k=۶$$

پس گراف ۶ ـ منتظم از مرتبهٔ ۸ است. اگر در گراف، رأس درجهٔ $p-۱$ داشته باشیم، $\gamma(G)=۱$ می‌شود، پس این‌جا چون رأس درجهٔ ۷ نداریم، $\gamma(G)>۱$ می‌شود. از طرفی یک رأس درجهٔ ۶، خودش و ۶ رأس دیگر را احاطه می‌کند (۷تا، تا این‌جا). پس اگر یک رأس دیگر را هم انتخاب کنیم، دقیقاً همهٔ ۸ رأس احاطه می‌شود، پس $\gamma(G)=۲$ می‌شود.

۱۱۵۵- **گزینهٔ ۲** داریم $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳}\right\rceil$، پس $\left\lceil \frac{n}{۳}\right\rceil=۱۱$ می‌شود. حالا:

$$۱۰<\frac{n}{۳}\le ۱۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳۰<n\le ۳۳ \quad (I)$$

از طرفی $\gamma(P_n)=\left\lceil \frac{n}{۳}\right\rceil$ می‌شود، پس:

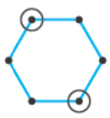
$$\gamma(P_{n+۲})=\left\lceil \frac{n+۲}{۳}\right\rceil=۱۱ \Rightarrow ۱۰<\frac{n+۲}{۳}\le ۱۱$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۳۰<n+۲\le ۳۳ \xrightarrow{-۲} ۲۸<n\le ۳۱ \quad (II)$$

با اشتراک بین (I) و (II) می‌فهمیم، فقط $n=۳۱$ می‌تواند باشد.

۱۱۵۶- **گزینهٔ ۴** صبورانه گزینه‌ها را برویم جلو:

(۱) $n=۶$ و $\Delta=۲$ است، پس $۲=\left\lceil \frac{۶}{۳}\right\rceil$ می‌شود.



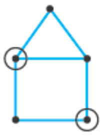
از طرفی، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل می‌تواند باشد:

پس در این گراف $۲=\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=\gamma(G)$ می‌شود.

(۲) $n=۷$ و $\Delta=۲$ است، پس $۳=\left\lceil \frac{۷}{۳}\right\rceil$ می‌شود. از طرفی، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل می‌تواند باشد:

پس این‌جا هم $۳=\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=\gamma(G)$ می‌شود.

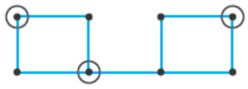
(۳) $n=۵$ و $\Delta=۳$ است، پس $۲=\left\lceil \frac{۵}{۴}\right\rceil$ می‌شود.



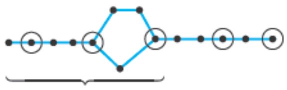
از طرفی، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل می‌تواند باشد:

پس این هم نمی‌شود.

(۴) $n=۸, \Delta=۳$ است، پس $۲=\left\lceil \frac{۸}{۴}\right\rceil$ می‌شود، اما گراف با هیچ مجموعهٔ دوعضوی، احاطه نمی‌شود (کمی جست‌وجو کنید!) و نیاز به حداقل ۳ عضو دارد.

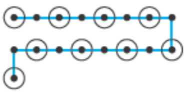


۱۱۵۷- **گزینهٔ ۳** گراف از مرتبهٔ $n=۱۴$ و $\Delta=۳$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=۴$ می‌شود. از طرفی برای احاطهٔ رأس‌های ۵ضلعی، نیاز به حداقل دو رأس داریم. در دنبالهٔ سمت چپ هم، حداقل یک رأس می‌خواهیم که اگر به صورت روبه‌رو بگیریم، با ۳ رأس، کل رأس‌های A احاطه می‌شود.



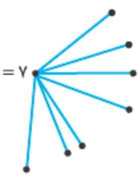
در دنبالهٔ راست هم، حداقل دو رأس برای احاطه کردن رأس‌ها لازم است، پس $\gamma(G)=۵$ می‌شود.

۱۱۵۸- **گزینهٔ ۴** مسیر $P_{۱۷}$ را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



برای این که خواستهٔ مسئله اتفاق بیفتد، رأس‌ها را به صورت بالا می‌گیریم. هیچ‌کدام از رأس‌ها را نمی‌توانیم حذف کنیم، (*دیگه احاطه‌گر نمیشه!*) پس این مجموعه، احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو می‌تواند باشد که ۹ عضو دارد. (*یه فرمول هم برای P_n در حالت کلی می‌تونیم پیدا کنیم که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، حداکثر $\left\lceil \frac{n}{۲}\right\rceil$ عضو می‌تونه داشته باشه.*)

۱۱۵۹- **گزینهٔ ۴** اگر $\gamma(G)=۱$ باشد، یعنی رأسی وجود دارد که به همهٔ رأس‌های دیگر وصل است. این یعنی $\Delta=p-۱=۷$ خواهد بود. برعکس این هم درست است، یعنی اگر $\Delta=p-۱$ باشد، $\gamma(G)=۱$ است. کم‌ترین تعداد یال‌ها وقتی به دست می‌آید که گراف، به صورت مقابل باشد، یعنی ۷ یال داشته باشد:



بیشترین تعداد یال هم وقتی به دست می‌آید که گراف، کامل مرتبهٔ ۸ یعنی $k_۸$ باشد، پس بیشترین تعداد یال‌ها هم برابر $\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$ می‌شود. پس اختلاف این دو مقدار، برابر $۲۸-۷=۲۱$ است.

۱۱۶۰- **گزینهٔ ۱** با توجه به تست قبلی، گراف، رأس از درجهٔ ۸ ندارد. بیشترین تعداد یال‌ها وقتی به دست می‌آید که درجه‌ها، تا حد امکان بزرگ باشند، پس همهٔ رأس‌ها را از درجهٔ ۷ می‌گیریم، اما یک نکته‌ای؛ گراف فرد ـ منتظم مرتبهٔ فرد نداریم، یعنی گراف ۷ ـ منتظم مرتبهٔ ۹ نداریم، پس مجبوریم درجه‌ها را به صورت مقابل بگیریم:

$$\underbrace{۷,۷,۷,\ldots,۷}_{۸\text{تا}},۶$$

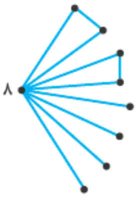
حالا:

$$\text{مجموع درجه‌ها}=۲q \Rightarrow ۷\times ۸+۶=۲q \Rightarrow q=۳۱$$

۱۱۶۱- **گزینهٔ ۱** چون $\gamma(G)=1$، پس گراف، رأسی دارد که به همهٔ رأس‌های دیگر وصل است، یعنی $\Delta = p-1 = 8$ می‌شود. تا این‌جا، گراف به صورت روبه‌رو می‌شود:

دو یال دیگر باید اضافه کنیم، طوری که گراف، فقط دو دور داشته باشد. این دو یال باید به صورت بالا اضافه شوند (*یعنی نباید مجاور باشن، چون اون‌جوری سه دور پیدا می‌کنه*). پس گراف، ۴ رأس درجهٔ یک پیدا می‌کند.

$\Delta = 8$



۱۱۶۲- **گزینهٔ ۱** گراف از مرتبهٔ $n=10$ و $\Delta=4$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{10}{5}\right\rceil=2$ می‌شود. از طرفی $\{i,f\}$، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G)=2$ است، اما چندتا γ ـ مجموعه داریم؟ ببینید، برای این‌که a و j احاطه شود، رأس i حتماً باید انتخاب شود، پس فقط یک رأس دیگر می‌ماند. آن یک رأس باید همهٔ رأس‌های g، c، d و e را احاطه کند. فقط یک رأس با این شرایط یعنی f وجود دارد، پس فقط یک γ ـ مجموعهٔ $\{i,f\}$ در این گراف وجود دارد.

۱۱۶۳- **گزینهٔ ۳** خب گراف از مرتبهٔ $n=6$ بوده و $\Delta=3$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{6}{4}\right\rceil=2$ می‌شود. از طرفی مثلاً $\{a,f\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا γ ـ مجموعه است، پس $\gamma(G)=2$ می‌شود. به ازای هر انتخاب دو رأسی که، یک رأس از بالا و یک رأس از پایین انتخاب شود، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا γ ـ مجموعه به دست می‌آید، پس تعداد γ ـ مجموعه‌ها می‌شود: $\binom{3}{1}\binom{3}{1}=9$

۱۱۶۴- **گزینهٔ ۲** **روش اول** واضح است که $\gamma(G)=2$ می‌شود. طبق یک نظم برویم جلو تا چیزی از قلم نیفتد. نمی‌شود هیچ‌کدام از رأس‌های a، b و e را انتخاب نکرده باشیم، پس ۳ حالت می‌گیریم:

① رأس a انتخاب شده باشد: با هر کدام از رأس‌های b، d و c یک مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی می‌سازد. (۳تا این‌جا)

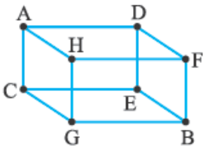
② رأس e انتخاب شده باشد: با هر کدام از رأس c، d و b یک مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی می‌سازد. (۳تا هم این‌جا)

③ رأس b انتخاب شده باشد: با d یک مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی می‌سازد ($\{b,a\}$ و $\{b,e\}$ *رو قبلاً شمردیم!*)

خلاصه شد ۷تا γ ـ مجموعه.

روش دوم هر دو رأس که انتخاب کنیم، دقیقاً یک γ ـ مجموعه می‌شود. به‌جز $\{a,e\}$، $\{c,b\}$ و $\{c,d\}$، پس تعداد γ ـ مجموعه‌ها برابر $\binom{5}{2}-3=7$ تا می‌شود.

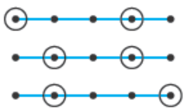
۱۱۶۵- **گزینهٔ ۲** $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{8}{4}\right\rceil=2$ می‌شود. از طرفی مثلاً $\{A,B\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G)=2$ می‌شود. به رأس‌های A و B دقت کنید. دو رأس، قطر مکعب هستند. از روی همین می‌توانید γ ـ مجموعه‌ها را حدس بزنید. دو سر مقابلِ هم قطرهای مکعب، همان γ ـ مجموعه‌ها هستند (یعنی $\{G,D\}$، $\{C,F\}$ و $\{H,E\}$)، پس ۴تا γ ـ مجموعه داریم. (*قطر وجه‌ها مثل* $\{A,G\}$ *رو نمی‌گم، اونا احاطه‌گر نیستن.*)



۱۱۶۶- **گزینهٔ ۱** بگویید ببینم آیا ممکن است در مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی، رأس g حضور نداشته باشد؟ (خب، مثلاً $\{a,c\}$ یا $\{b,f\}$ یا ...) من می‌گویم نه نمی‌شود، پس رأس g حتماً باید باشد. g همهٔ رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس هر رأس دیگری که انتخاب کنید، به همراه g، یک مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی می‌شود (مثل $\{b,g\}$، $\{a,g\}$ و ...)، پس ۶ مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی داریم.

۱۱۶۷- **گزینهٔ ۲** گراف از مرتبهٔ $n=12$ بوده و $\Delta=5$ است، پس $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{12}{6}\right\rceil=2$ می‌شود، اما از هر کدام از آن مربع‌های قطردار، حداقل یکی باید انتخاب شود، یعنی برای احاطه شدن کل رأس‌ها، حداقل ۳ رأس می‌خواهیم. از طرفی $\{f,g,i\}$، کل رأس‌ها را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G)=3$ می‌شود. برای تشکیل γ ـ مجموعه می‌توانیم d یا g، a یا f، i یا l را برداریم، پس $8=2\times2\times2$ تا مجموعهٔ احاطه‌گر با کم‌ترین تعداد عضو به دست می‌آید. (مثلاً $\{a,g,i\}$ یا $\{a,d,i\}$ یا ...)

۱۱۶۸- **گزینهٔ ۲** $\gamma(P_n)=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ است، پس $\gamma(P_5)=\left\lceil\frac{5}{3}\right\rceil=2$ تا γ ـ مجموعه، می‌تواند به صورت‌های مقابل باشد:

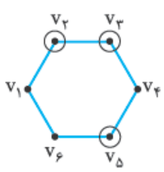


۱۱۶۹- **گزینهٔ ۳** P_6 را به صورت زیر ببینید:

هر ۴ رأس که انتخاب کنید، احاطه‌گر است به‌جز $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ و $\{V_3,V_4,V_5,V_6\}$، پس:

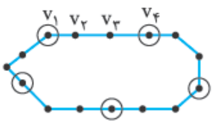
$$\text{تعداد احاطه‌گرهای ۴عضوی}=\binom{6}{4}-2=15-2=13$$

۱۱۷۰- **گزینهٔ ۳** یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳عضوی، مثلاً می‌تواند به صورت روبه‌رو باشد. باز هم جستجو کنید. می‌بینید اگر بین حداقل دوتا از رأس‌ها فاصله باشد، به زبان دیگر، هر ۳ رأس که به صورت مسیر P_3 مجاور نباشند، کل رأس‌ها احاطه می‌شوند.

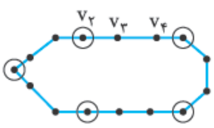


اما اگر ۳ رأس پشت سر هم باشند، دیگر احاطه‌گر نیستند. بنابراین مجموعه‌های ۳عضوی $\{V_1,V_2,V_3\}$، $\{V_2,V_3,V_4\}$، $\{V_3,V_4,V_5\}$، $\{V_4,V_5,V_6\}$، $\{V_5,V_6,V_1\}$ و $\{V_6,V_1,V_2\}$، هیچ‌کدام احاطه‌گر نیستند.

۱۱۷۱- **گزینهٔ ۱** C_{15} را به صورت مقابل در نظر بگیرید. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل است:



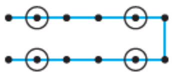
اگر به جای V_1، سمت راستی آن را برداریم، γ ـ مجموعه به صورت مقابل به دست می‌آید:



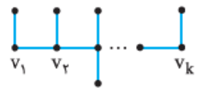
اگر با $V_۳$ هم شروع کنید، شبیه صفحهٔ قبل یک γ ـ مجموعهٔ دیگر به دست می‌آید (شد ۳تا این‌جا). ولی اگر از $V_۴$ شروع کنیم، همان مجموعهٔ احاطه‌گر اول به دست می‌آید. بنابراین ۳تا γ ـ مجموعه وجود دارد.

۱۱۷۲- گزینهٔ ۲ خیالتان را راحت کنم، در هیچ‌کدام از C_n ها، γ ـ مجموعه‌ها یکتا نیستند، به عبارت دیگر، چندین γ ـ مجموعه وجود دارد (*مثلاً تو حالت $C_۶$ و $C_۷$ امتحان کن. یکی رو بگیر و دو تا در میون برو جلو*). پس ۱ و ۳ رد می‌شوند، اما در مسیرها، $P_{۱۳}$ را ببینید: $\gamma(P_{۱۳}) = \left\lceil \frac{۱۳}{۳} \right\rceil = ۵$ است. دوتا γ ـ مجموعه به صورت‌های زیر می‌توانند باشند:

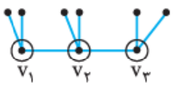
اما $P_{۱۲}$ فقط یک γ ـ مجموعه به صورت زیر دارد. یادتان باشد که γ ـ مجموعه در گراف‌های $P_{۳k}$، یکتا است. (یعنی اگر n مضرب ۳ باشد، γ ـ مجموعه P_n، یکتا است.)



۱۱۷۳- گزینهٔ ۴ تمرین مهمی در کتاب درسی داریم که می‌گوید: اگر $k < \frac{n}{۲}$ باشد، گراف nرأسی با $\gamma(G) = k$ وجود دارد. دلیل آن هم خیلی ساده است. می‌توانید گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید.

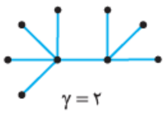


k رأس به صورت مسیری قرار دهید و بعد به هر کدام، حداقل یک یال وصل کنید تا گراف از مرتبهٔ n شود. مثلاً گراف ۹رأسی که $\gamma(G) = ۳$ است، می‌تواند به صورت مقابل باشد:



$\gamma = ۳$

بنابراین گراف ۹رأسی که $\gamma = ۲, ۳, ۴$ باشد، وجود دارد.



$\gamma = ۲$

$\gamma = ۴$