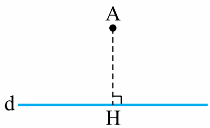
فهرست

فصل اول
ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس ترسیم‌های هندسی

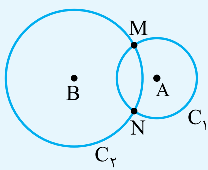


فاصلهٔ یک نقطه از یک خط فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، طول پاره‌خط عمودی است که از آن نقطه بر خط موردنظر وارد می‌شود. در شکل مقابل، AH بر خط d عمود است، پس فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر طول پاره‌خط AH می‌باشد.

اگر در جست‌وجوی نقاطی باشیم که از نقطهٔ ثابت M، به فاصلهٔ مشخص k باشند $(k > ۰)$، این نقاط روی محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع k قرار دارند.

دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از یکدیگر روی صفحه‌ای قرار دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A، به فاصلهٔ ۳ و از نقطهٔ B، به فاصلهٔ ۴ باشند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

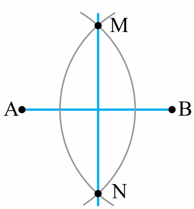


گزینهٔ «۳» تمام نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A، به فاصلهٔ ۳ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ هستند (دایرهٔ $C_۱$).
تمام نقاطی که از نقطهٔ B، به فاصلهٔ ۴ هستند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ قرار دارند (دایرهٔ $C_۲$).
این دو دایره در دو نقطهٔ M و N متقاطع هستند و مسئله دو جواب دارد.

عمودمنصف یک پاره‌خط خطی که از وسط یک پاره‌خط می‌گذرد و بر آن عمود باشد، عمودمنصف آن پاره‌خط می‌نامند.

ویژگی مهم عمودمنصف هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس؛ اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.

چگونگی رسم عمودمنصف یک پاره‌خط اگر پاره‌خط AB داده شده باشد، برای رسم عمودمنصف این پاره‌خط به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

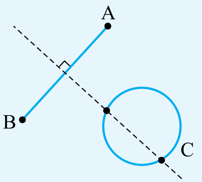


۱ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف AB باز می‌کنیم.
۲ به مرکزهای A و B دو کمان با شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم.
۳ این دو کمان، یکدیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کنند.
۴ خطی که از M و N می‌گذرد، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

دایرهٔ C و پاره‌خط AB در یک صفحه داده شده‌اند. چند نقطه روی دایرهٔ C وجود دارد که از A و B به یک فاصله هستند؟

۱) دقیقاً دوتا ۲) دقیقاً یکی ۳) حداکثر یکی ۴) حداکثر دوتا

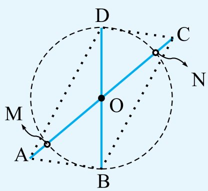
گزینهٔ «۴» تمام نقاطی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. می‌دانیم یک خط و یک دایره حداکثر یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس عمودمنصف AB و دایرهٔ C حداکثر دو نقطهٔ مشترک دارند و این نقاط، همان نقاط موردنظر هستند.



اگر بدانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، آن‌گاه چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم نمود که طول قطرهای آن ۶ و ۷ باشند؟

۱) یکی ۲) بی‌شمار ۳) حداکثر دوتا ۴) دقیقاً دوتا

گزینهٔ «۲» ابتدا پاره‌خط AC را به اندازهٔ ۷ رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ O وسط AC باشد، چنان‌چه به مرکز O و شعاع ۳، دایره‌ای رسم کنیم، هر نقطه مانند B روی این دایره (به‌جز M و N) اختیار کنیم و B را به O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در D قطع کند، آن‌گاه قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD، ۷ و ۶ هستند. چون B نقطه‌ای دلخواه روی دایره است، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

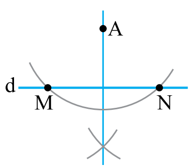


رسم عمود بر یک خط از نقطهٔ A

فرض کنیم خط d و نقطهٔ A داده شده باشند و بخواهیم از نقطهٔ A عمودی بر خط d رسم کنیم. برای این منظور به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از فاصلهٔ A از خط d باز می‌کنیم و به مرکز A، قوسی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط M و N قطع کند.

۲ عمودمنصف MN را رسم می‌کنیم. این خط که از A می‌گذرد بر d عمود می‌باشد.



برای این‌که از نقطهٔ A، خطی عمود بر خط d رسم کنیم، دست‌کم چند کمان باید رسم کنیم؟

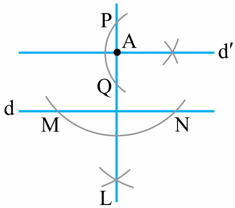
۱) یکی ۲) دوتا ۳) سه‌تا ۴) چهارتا

گزینهٔ «۳» ابتدا باید کمانی به مرکز A و شعاع دلخواه چنان رسم کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ M و N قطع کند.

اکنون باید عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم کنیم ولی می‌دانیم برای رسم عمودمنصف هر پاره‌خط باید دو کمان مساوی به مرکزهای M و N رسم شوند، پس در مجموع باید سه کمان رسم شوند.

چگونگی رسم خطی که از نقطهٔ مشخصی می‌گذرد و با خط مفروضی موازی است.

فرض کنیم خط d و نقطهٔ A بیرون خط d داده شده باشد. برای این‌که خطی رسم کنیم که از A بگذرد و با خط d موازی باشد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



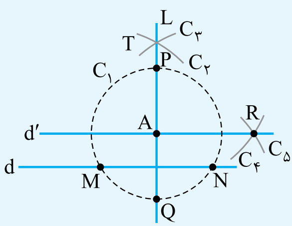
۱ ابتدا از A، عمودی بر خط d رسم می‌کنیم و آن را L می‌نامیم.

۲ سپس از A، عمودی بر خط L رسم می‌کنیم و آن را d' می‌نامیم.

۳ d' موازی با d است و از نقطهٔ A نیز می‌گذرد.

؟ خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده‌اند. برای رسم خطی موازی با d که از A بگذرد، دست کم چند کمان باید رسم شود؟

۱) هفت ۲) شش ۳) پنج ۴) چهار



= گزینهٔ «۳» به مرکز A و شعاع دلخواه ولی بیشتر از فاصلهٔ A از خط d، دایرهٔ C_1 را رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط M و N قطع کند. اکنون به مرکزهای N و M دو کمان C_2 و C_3 را با شعاع‌های مساوی ولی بیشتر از نصف فاصلهٔ MN رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در T قطع کنند.

خطی را که از A و T می‌گذرد L می‌نامیم. خط L دایرهٔ C_1 را در نقاط P و Q قطع می‌کند. اگر به مرکزهای P و Q دو کمان با شعاع‌های مساوی و دلخواه ولی بیشتر از نصف PQ رسم کنیم تا یکدیگر را در R قطع کنند، (کمان‌های C_4 و C_5)، آن‌گاه خطی که از A و R می‌گذرد با d موازی است. در نتیجه حداقل به پنج کمان نیازمندیم.

نیمساز یک زاویه خطی که از رأس زاویه‌ای می‌گذرد و آن را به دو زاویهٔ مساوی تقسیم می‌کند، نیمساز آن زاویه می‌نامند.

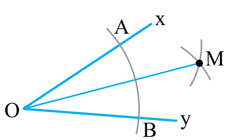
ویژگی مهم نیمساز هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد، آن نقطه روی نیمساز قرار دارد.

چگونگی رسم نیمساز یک زاویه اگر زاویهٔ $x\hat{O}y$ داده شده باشد، برای رسم نیمساز این زاویه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

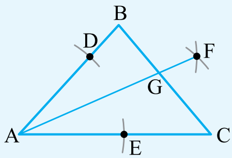
۱ به مرکز O (رأس زاویه) و شعاع دلخواه، قوسی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند.

۲ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف پاره‌خط AB باز می‌کنیم و به مرکزهای A و B دو قوس با شعاع برابر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند.

۳ نیم‌خطی که O را به M وصل می‌کند، نیمساز زاویه است.



در شکل زیر، توسط یک پرگار، ابتدا نقاط D و E را به فاصلهٔ یکسان از رأس A، سپس با استفاده از پرگار، نقطهٔ F را به فاصلهٔ یکسان از D و E پیدا کرده‌ایم. اگر AF ضلع BC را در نقطهٔ G قطع کند، کدام گزینه در حالت کلی درست است؟



۱) FA ضلع CB را نصف می‌کند.

۲) FA زاویهٔ $B\hat{A}C$ را نصف می‌کند.

۳) FA بر CB عمود است.

۴) دو مثلث GBA و GCA همنهشت هستند.

گزینهٔ «۲» شکل نشان داده شده در صورت مسئله در واقع چگونگی رسم نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$ است، پس AF نیمساز این زاویه می‌باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- در یک دشت وسیع و مسطح، دو دهکدهٔ A و B به فاصلهٔ ۱۶ کیلومتر از یکدیگر قرار دارند. چند نقطه در این دشت وجود دارد که از دهکده‌های A و B به ترتیب به فاصلهٔ ۱۰ و ۱۲ کیلومتر باشند؟

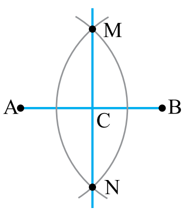
۱) یک ۲) دو ۳) چهار ۴) هیچ

۲- در یک ترسیم هندسی، به مرکزهای A و B دو کمان با شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم. این دو کمان در بالا و پایین پاره‌خط AB یکدیگر را قطع می‌کنند. کدام گزینه دربارهٔ پاره‌خط AB و پاره‌خطی که نقاط برخورد دو کمان را به هم وصل می‌کنند، درست است؟

۱) بر هم منطبق‌اند ۲) طولشان مساوی است

۳) بر هم عمودند ۴) موازی هستند

۳- در شکل زیر، دو کمان با شعاع‌های مساوی یکی به مرکز A و دیگری به مرکز B رسم شده‌اند. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $AC = BC$

۲) $BC = \frac{۱}{۲} AB$

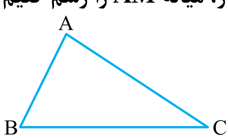
۳) $AB = ۲AC$

۴) $AB = MN$

۴- پاره‌خط AB داده شده است. اگر بخواهیم مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم که یکی از اضلاع آن پاره‌خط AB باشد، دست کم باید چند کمان رسم شود؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۵- فرض کنیم مثلث ABC داده شده باشد و بخواهیم با خط‌کش و پرگار، میانهٔ AM را رسم کنیم (خط‌کشی که داریم مدرج نیست). دست کم باید چند کمان رسم کنیم؟



۱) چهار ۲) سه

۳) دو ۴) یک

۶- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷ از یکدیگر روی صفحهٔ P قرار دارند. چند نقطه روی این صفحه وجود دارد که از A و B به فاصلهٔ ۳/۵ باشد؟

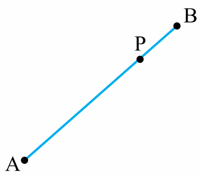
۱) یک　　۲) دو　　۳) هیچ　　۴) بی‌شمار

۷- در شکل زیر، نقطهٔ M روی پاره‌خط AB قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از AB به فاصلهٔ ۱ و از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۲ باشد؟

۱) دو　　۲) چهار

۳) هیچ　　۴) به وضعیت نقطهٔ M روی AB بستگی دارد.

۸- پاره‌خط AB و نقطهٔ P روی آن داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی از نقطهٔ P بگذرانیم که با AP زاویهٔ 45° بسازد. برای این منظور دست کم چند کمان باید رسم شود؟



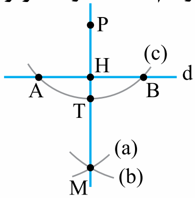
۱) سه　　۲) چهار

۳) پنج　　۴) شش

۹- دو خط d_1 و d_2 در نقطهٔ O متقاطع‌اند و نقطهٔ M روی هیچ‌یک از این دو خط قرار ندارد. چند نقطه وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله باشد و فاصله‌اش از نقطهٔ M مقدار معلوم a باشد؟

۱) دقیقاً دو نقطه　　۲) دقیقاً چهار نقطه　　۳) حداکثر دو نقطه　　۴) حداکثر چهار نقطه

۱۰- در شکل زیر، کمان‌های (a) و (b) با شعاع‌های مساوی به مراکز A و B رسم شده‌اند و P مرکز کمان (c) است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $MP \perp d$

۲) $PA = PB$

۳) PM نیمساز زاویهٔ $A\hat{P}B$ است.

۴) $TP = TM$

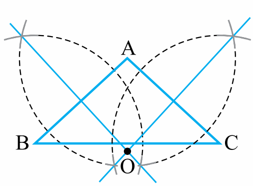
۱۱- پاره‌خط AB داده شده است. برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی که یک ضلع آن AB و رأس زاویهٔ قائمهٔ آن A باشد، دست کم چند کمان باید رسم شود؟ (خط‌کش مدرج در دسترس نداریم).

۱) دو　　۲) سه　　۳) چهار　　۴) پنج

۱۲- پاره‌خط AB داده شده است. می‌خواهیم مربعی رسم کنیم که یک ضلع آن AB باشد. برای این منظور دست کم باید چند کمان رسم شود؟ (خط‌کش مدرج در دسترس نداریم)

۱) سه　　۲) چهار　　۳) پنج　　۴) شش

۱۳- شکل زیر، چگونگی پیداکردن مرکز دایره‌ای را که از هر سه رأس مثلث ABC می‌گذرد نشان می‌دهد. برای این منظور کدام گزینه درست است؟



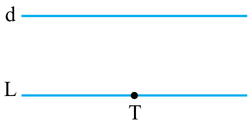
۱) نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی را رسم کرده‌ایم و نقطهٔ برخورد آن‌ها مرکز دایرهٔ موردنظر است.

۲) ارتفاع‌های دو ضلع را رسم کرده‌ایم و نقطهٔ برخورد آن‌ها مرکز دایرهٔ موردنظر است.

۳) میانه‌های نظیر دو ضلع را رسم کرده‌ایم و نقطهٔ برخورد آن‌ها مرکز دایرهٔ موردنظر است.

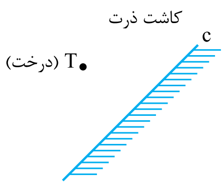
۴) عمودمنصف‌های نظیر دو ضلع را رسم کرده‌ایم و نقطهٔ برخورد آن‌ها مرکز دایرهٔ موردنظر است.

۱۴- دو خط موازی d و L به فاصلهٔ ۱۰ از یکدیگر در صفحه داده شده‌اند و نقطهٔ T روی خط L قرار دارد. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از دو خط d و L به یک فاصله هستند و از نقطهٔ T به فاصلهٔ ۷ است؟



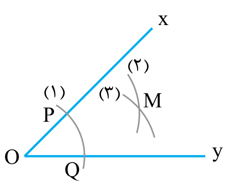
۱) دو
۲) یک
۳) هیچ
۴) بی‌شمار

۱۵- درخت T به فاصلهٔ ۶ متر از ردیف کاشت ذرت (خط c) قرار دارد. کشاورزی می‌خواهد مترسکی به فاصلهٔ ۲ متر از ردیف ذرت و به فاصلهٔ ۵ متر از درخت در مزرعه‌اش نصب کند. چند نقطه می‌تواند پیدا کند؟



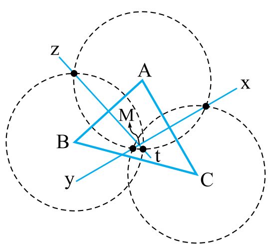
۱) بی‌شمار
۲) هیچ
۳) حداکثر یک
۴) دو

۱۶- در شکل زیر، شعاع کمان‌های (۲) و (۳) برابرند و مراکز این دو کمان، به ترتیب P و Q هستند. کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟



۱) نقطهٔ M از Ox و Oy به یک فاصله است.
۲) $PM = QM$
۳) $x\hat{O}M = \frac{۱}{۲} x\hat{O}y$
۴) پاره‌خط OM در حالت کلی بر پاره‌خط PQ عمود نیست.

۱۷- در شکل زیر، سه دایره با شعاع‌های مساوی به مرکزهای A، B و C هستند و نقاط برخورد دوبه‌دوی این دایره‌ها را به هم وصل کرده‌ایم. اگر $AB < AC < BC$ باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) نقطهٔ M از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.
۲) نقطهٔ M از سه رأس مثلث به یک فاصله است.
۳) فاصلهٔ M از A، بیشتر از فاصلهٔ M از C است.
۴) $MA < MB < MC$

درس ۲ استدلال

در کتاب درسی فقط دو نوع استدلال مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

۱) استدلال استقرایی: هرگاه حکمی در چند مورد درست باشد و از آن‌ها نتیجه بگیریم آن حکم در حالت کلی درست است، چنین استدلالی را استدلال استقرایی می‌نامند.

به بیان دیگر در استدلال استقرایی از جزء به کل می‌رسیم.

باید بدانیم حکم‌های استدلال استقرایی قابل اعتماد نیستند.

۲) استدلال استنتاجی: نتیجه‌گیری براساس واقعیت‌های پذیرفته‌شده و یا مطالبی که قبلاً درستی آن‌ها را بررسی کرده باشیم، استدلال استنتاجی می‌نامند.

نتایج مهم و پرکاربردی را که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند قضیه می‌نامند.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای که حاصل می‌شود، عکس قضیه می‌نامند.

عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

اگر عکس یک قضیه درست باشد، آن را قضیهٔ دوشرطی می‌نامند.

برهان خلف (استدلال غیرمستقیم): اگر فرض کنیم حکم یک قضیه نادرست باشد (فرض خلف) و به نتیجه‌ای نادرست برسیم، آن‌گاه می‌گوییم قضیه با برهان خلف به اثبات رسیده است.

مثال نقض: هرگاه مثالی بزنیم تا حکمی را رد کند، آن را مثال نقض می‌نامند.

؟ کدام گزینه درست نیست؟

۱) اگر جای فرض و حکم را در قضیه‌ای عوض کنیم، گزارهٔ حاصل را عکس قضیه می‌نامند.

۲) اگر از درستی چند مورد، حکمی کلی صادر کنیم، آن را استدلال استقرایی می‌نامند.

۳) اگر فرض کنیم حکمی نادرست است و به نتیجه‌ای نادرست برسیم، قضیهٔ اصلی اثبات شده است.

۴) اگر مثالی ارائه دهیم که نشان دهد حکم مورد ادعا درست است، آن حکم به اثبات رسیده است.

گزینهٔ «۴» فرض کنیم شخصی ادعا کند حاصل‌ضرب دو عدد مثبت همیشه بزرگ‌تر از ۱ است و برای این منظور بگوید دو عدد ۲ و ۳ حاصل‌ضربشان ۶ است که بزرگ‌تر از ۱ است ولی این مثال، درستی حکم را در حالت کلی ارائه نمی‌دهد؛ زیرا به عنوان مثال، دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ هر دو مثبت هستند ولی حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{۱}{۶}$ است که از ۱ کوچک‌تر می‌باشد.

قضیهٔ خطوط موازی و مورب اگر خطی مورب، دو خط موازی را قطع کند، آن‌گاه تعداد هشت زاویه پدید می‌آیند که اغلب چهارتای آن‌ها حاده و چهارتای دیگر، منفرجه هستند. تمام چهار زاویهٔ حاده با هم برابرند و تمام چهار زاویهٔ منفرجه نیز با هم برابرند در ضمن هر زاویهٔ حاده و منفرجه مجموعشان ۱۸۰° است (مکمل یکدیگرند).

چند خاصیت مهم

۱ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، برابر ۱۸۰° است.

۲ مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث، برابر ۳۶۰° است.

۳ هر زاویهٔ خارجی مثلث، برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن است.

۴ مجموع زاویه‌های درونی هر nضلعی محدب، برابر با $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.

۵ مجموع زاویه‌های بیرونی هر nضلعی محدب، برابر ۳۶۰° است.

۶ هر یک از زاویه‌های داخلی nضلعی منتظم، برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ و هر زاویهٔ خارجی آن برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است.

در یک nضلعی محدب، مجموع زاویه‌های داخلی، هشت برابر مجموع زاویه‌های خارجی آن است. n کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

گزینهٔ «۲» مجموع زاویه‌های خارجی $\times$ ۸ = مجموع زاویه‌های داخلی

$$(n-۲)\times ۱۸۰ = ۸\times ۳۶۰ \Rightarrow n = ۱۸$$

نقاط همرسی در مثلث

۱ در هر مثلث، سه عمودمنصف اضلاع آن در یک نقطه همرس هستند. نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث، از سه رأس آن به یک فاصله است.

اگر هر سه زاویهٔ مثلث، حاده باشند، نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف، درون مثلث قرار دارد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه وسط وتر مثلث قرار دارد و اگر یکی از زاویه‌های مثلث، منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث قرار دارد.

۲ سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث در یک نقطه واقع در درون مثلث، همرس هستند. این نقطه از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

۳ سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه همرس هستند.

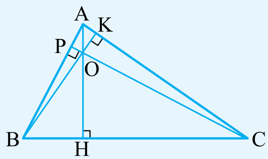
اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها درون مثلث قرار دارد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه بر رأس زاویهٔ قائمه قرار دارد و چنان‌چه یکی از زاویه‌های مثلث، منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث قرار دارد.

اگر سه ارتفاع مثلث ABC در نقطهٔ O همرس باشند، آن‌گاه رأس B برای مثلث AOC کدام نقطه است؟

۱) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها ۲) نقطهٔ همرسی نیمسازها

۳) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها ۴) نقطهٔ خاصی نیست.

گزینهٔ «۳» در مثلث AOC، BK بر AC عمود است و BP نیز بر OC عمود می‌باشد، پس نقطهٔ B، نقطهٔ همرسی سه ارتفاع مثلث AOC است.



نامساوی در مثلث

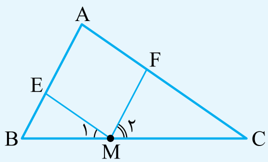
می‌دانیم هر زاویهٔ خارجی مثلث، برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن است، پس می‌توان نتیجه گرفت که هر زاویهٔ خارجی مثلث، از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاور به آن بزرگ‌تر است.

قضیه اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر است و برعکس، اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلعی که مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر باشد، بزرگ‌تر از ضلعی است که مقابل به زاویهٔ کوچک‌تر قرار دارد.

در مثلث ABC، $AB = ۲$ و $AC = ۳$ است. اگر از نقطهٔ دلخواه M روی ضلع BC دو خط به موازات AB و AC رسم کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در E و F قطع کنند، اندازهٔ $ME + MF$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $۳/۵$ ۲) $۲/۷$ ۳) $۲/۵$ ۴) $۲/۱$

گزینهٔ «۱» چون $AC > AB$، پس $\hat{B} > \hat{C}$.



$$ME \parallel AC \xrightarrow{\text{مورب } BC} \hat{C} = \hat{M}_۱$$

$$\xrightarrow{\hat{B}>\hat{C}} \hat{B} > \hat{M}_۱ \Rightarrow ME > BE \ (۱)$$

$$\text{متوازی‌الاضلاع } MEAF \Rightarrow MF = AE \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ME + MF > BE + AE = AB = ۲$$

$$MF \parallel AB \xrightarrow{\text{مورب } BC} \hat{B} = \hat{M}_۲ \xrightarrow{\hat{B}>\hat{C}} \hat{M}_۲ > \hat{C} \Rightarrow FC > MF \quad (۳)$$

و در متوازی‌الاضلاع AEMF داریم $ME = AF$. اکنون از رابطهٔ ۳ داریم:

$$\underbrace{AF + FC}_{=AC} > ME + MF \Rightarrow ME + MF < ۳$$

در نتیجه $۲ < ME + MF < ۳$ و در بین گزینه‌ها گزینهٔ ۱ در این فاصله قرار ندارد.

قضیهٔ نامساوی مثلثی (حمار)

در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

از این قضیه به سادگی نتیجه می‌شود که هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

در هر مثلث، میانهٔ نظیر هر ضلع، از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

اگر طول اضلاع مثلثی $۲x + ۱$، $۳x - ۲$ و $x + ۲$ باشند، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $x > \frac{۳}{۴}$ ۲) $x > \frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲} < x < \frac{۳}{۴}$ ۴) $۰ < x < \frac{۱}{۲}$

گزینهٔ «۱» باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} ۲x + ۱ < (۳x - ۲) + (x + ۲) \\ ۳x - ۲ < (۲x + ۱) + (x + ۲) \\ x + ۲ < (۳x - ۲) + (۲x + ۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۱ < ۴x \\ ۳x - ۲ < ۳x + ۳ \\ x + ۲ < ۵x - ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x > ۱ \\ -۲ < ۳ \quad \text{همیشه درست} \\ ۴x > ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{۱}{۲} \\ x > \frac{۳}{۴} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > \frac{۳}{۴}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۸- کدام گزینه دربارهٔ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) درست است؟

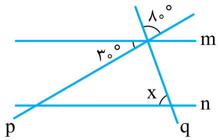
۱) فرض را نادرست می‌گیریم و به تناقض می‌رسیم.

۲) جای فرض و حکم را عوض می‌کنیم و استدلال را ارائه می‌دهیم.

۳) حکم را نقض می‌کنیم و به تناقض می‌رسیم.

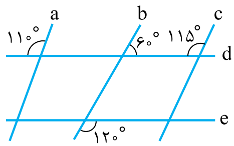
۴) یک مثال نقض ارائه می‌دهیم که نشان دهد حکم موردنظر درست نیست.

۱۹- در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های روی آن، مقدار x چند درجه باشد تا دو خط m و n موازی باشند؟



۱) ۱۱۰ ۲) ۸۰ ۳) ۷۰ ۴) ۵۰

۲۰- با توجه به شکل زیر و اندازه‌های روی آن، کدام گزینه درست است؟



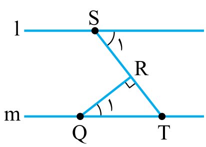
۱) $a \parallel c$

۲) $b \parallel c$

۳) $a \parallel b$

۴) $d \parallel e$

۲۱- در شکل زیر، دو خط l و m موازی‌اند و $QR \perp ST$. اگر $\hat{S}_1 = ۵۲^\circ$ باشد، اندازهٔ $\hat{Q}_1$ چند درجه است؟



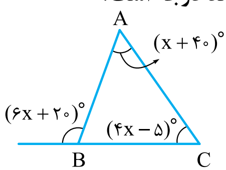
۱) ۵۲

۲) ۳۸

۳) ۶۸

۴) ۵۶

۲۲- در شکل زیر با توجه به اندازه‌های روی آن، اندازهٔ زاویهٔ داخلی B چند درجه است؟



۱) ۱۱۰

۲) ۵۵

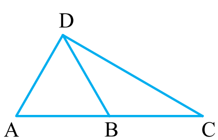
۳) ۸۵

۴) ۷۰

۲۳- در مثلث ABC داریم $\hat{A} = x^\circ$ ، $\hat{B} = (۲x+۲)^\circ$ و $\hat{C} = (۳x+۴)^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ خارجی نظیر رأس B چند درجه است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۵۸ ۴) ۱۲۲

۲۴- در شکل زیر، B نقطه‌ای روی AC است طوری که مثلث ADB متساوی‌الاضلاع و مثلث CBD در رأس B متساوی‌الساقین است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ چند درجه است؟



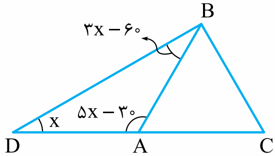
۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۳۰

۴) با این اطلاعات نمی‌توان زاویهٔ C را مشخص نمود.

۲۵- در شکل زیر، A روی پاره‌خط CD، $AB = ۶a - ۸$ ، $BC = ۴a - ۲$ و مثلث ABC در رأس B متساوی‌الساقین است. کدام گزینه درست است؟ (زاویه‌ها برحسب درجه هستند.)



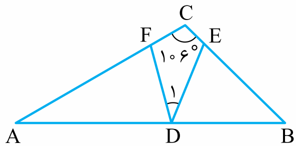
۱) $\hat{C} = ۵۷^\circ$

۲) $BC = ۹$

۳) $DC = ۲۰$

۴) $D\hat{B}C = ۹۳^\circ$

۲۶- در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع AB است. اگر $BD = EB$ ، $AD = AF$ و $\hat{C} = ۱۰۶^\circ$ باشد، اندازهٔ $\hat{D}_۱$ چند درجه است؟



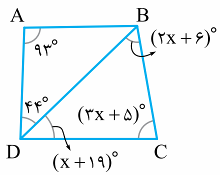
۱) ۳۷　　۲) ۷۴

۳) ۵۶　　۴) ۶۲

۲۷- محمد می‌خواهد مثلثی مانند ABC رسم کند طوری که زاویهٔ $\hat{A}$ بین ۵۰° تا ۶۰° و زاویهٔ $\hat{B}$ نیز بین ۹۰° و ۱۰۰° باشد. با این شرایط محدودهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ کدام است؟

۱) بین ۲۰° تا ۴۰°　　۲) بین ۳۰° تا ۵۰°　　۳) بین ۸۰° تا ۹۰°　　۴) بین ۱۴۰° تا ۱۶۰°

۲۸- با توجه به اندازه‌های روی شکل، کدام گزینه نادرست است؟



۱) $A\hat{B}C = ۹۹^\circ$

۲) $AB \parallel CD$

۳) $\hat{C} = ۸۰^\circ$

۴) BD نیمساز زاویهٔ D از چهارضلعی $ABCD$ است.

۲۹- اندازهٔ هر یک از زاویه‌های خارجی یک nضلعی منتظم برابر ۱۸° است. اندازهٔ زاویهٔ داخلی $(n - ۲)$ ضلعی منتظم چند درجه است؟

۱) ۱۶۲　　۲) ۱۶۰　　۳) ۱۵۸　　۴) ۱۵۶

۳۰- در صفحهٔ مثلث ABC چند نقطه وجود دارد که از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است؟

۱) یک　　۲) دو　　۳) سه　　۴) چهار

۳۱- سه نیمساز داخلی مثلث ABC در نقطهٔ M همرس هستند. اگر فاصلهٔ M از ضلع BC برابر $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ و محیط مثلث ۱۸ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$　　۲) $۳\sqrt{۶}$　　۳) $۶\sqrt{۲}$　　۴) $۲\sqrt{۶}$

۳۲- اگر در مثلثی نقطهٔ همرسی سه ارتفاع، بیرون مثلث باشد، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) مثلث یک زاویهٔ قائمه دارد.　　۲) مثلث یک زاویهٔ منفرجه دارد.

۳) هر سه زاویهٔ مثلث، حاده هستند.　　۴) این مثلث نمی‌تواند متساوی‌الساقین باشد.

۳۳- در مثلث ABC، سه ارتفاع مثلث در نقطهٔ O همرس هستند. رأس C برای مثلث AOB چه نقطه‌ای است؟

۱) نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی　　۲) نقطهٔ همرسی سه ارتفاع

۳) نقطهٔ همرسی نیمسازهای خارجی A و B　　۴) نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف

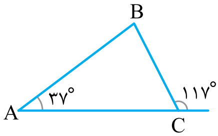
۳۴- در چهارضلعی ABCD زاویه‌های A و C قائمه هستند. امتداد دو ضلع AB و CD در نقطهٔ M و امتداد دو ضلع AD و BC در N متقاطع هستند. قطر BD از این چهارضلعی کدام ویژگی را دارد؟

۱) عمودمنصف MN است.
۲) از وسط MN می‌گذرد ولی بر آن عمود نیست.
۳) بر MN عمود است.
۴) نیمساز زاویهٔ B است.

۳۵- اگر در مثلث ABC، $AB = ۷$ ، $AC = ۸$ و $BC = ۵$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

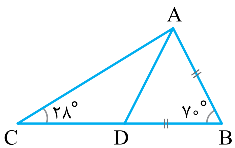
۱) $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$
۲) $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$
۳) $\hat{B} < \hat{A} < \hat{C}$
۴) $\hat{A} < \hat{C} < \hat{B}$

۳۶- در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟



۱) AB
۲) AC
۳) BC
۴) با این اطلاعات حکمی قطعی نمی‌توان داد.

۳۷- در شکل زیر، D نقطه‌ای روی ضلع BC است طوری که $AB = BD$. با توجه به اندازه‌های روی شکل، کدام گزینه درست است؟

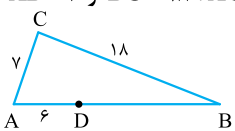


۱) $CD > AD$
۲) $CD = AD$
۳) $AD > CD$
۴) بسته به اندازهٔ ضلع AC هر سه حالت ممکن است رخ دهد.

۳۸- اگر اندازه‌های سه ضلع مثلثی $x + ۱$ ، $۴x - ۲$ و $۲x$ باشند، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵} < x < ۳$
۲) $\frac{۱}{۶} < x < \frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶} < x < ۳$
۴) $\frac{۱}{۳} < x < ۳$

۳۹- در شکل زیر، D نقطه‌ای روی AB و بین A و B است. اگر $AC = ۷$ ، $BC = ۱۸$ و $AD = ۶$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند طول پاره‌خط BD باشد؟

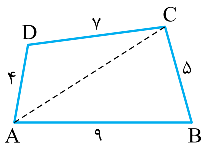


۱) ۵
۲) ۱۳
۳) ۱۹
۴) ۲۰

۴۰- محیط مثلث ABC برابر ۴۸ و BC بزرگ‌ترین ضلع آن است. طول ضلع BC کدام می‌تواند باشد؟

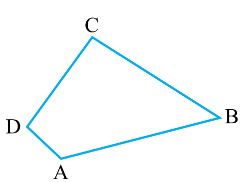
۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۱۶
۴) ۱۲

۴۱- در شکل مقابل، اگر طول AC عددی صحیح باشد، حاصل‌جمع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای AC کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۷
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۴۲- اگر در چهارضلعی ABCD، AD کوچک‌ترین ضلع و BC بزرگ‌ترین ضلع باشد، کدام گزینه درست است؟

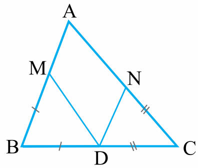


۱) $\hat{A} > \hat{C}$
۲) $\hat{D} > \hat{B}$
۳) $\hat{D} > \hat{A}$
۴) گزینه‌های ۱ و ۲

مسائل کنکور سال‌های اخیر

۴۳- در شکل زیر، $\hat{A} = ۵۸^\circ$، $BM = BD$ و $CN = CD$. زاویهٔ $M\hat{D}N$ چند درجه است؟

(ریاضی ۹۱ ـ داخل)



۱) ۵۸
۲) ۵۹
۳) ۶۱
۴) ۶۲

۴۴- در چهارضلعی $ABCD$، عمودمنصف‌های دو ضلع مقابل AB و CD در نقطهٔ M متقاطع‌اند. اگر $BC > AD$ باشد، کدام نابرابری همواره صحیح است؟ (ریاضی ۹۳ ـ داخل)

۱) $A\hat{M}B > B\hat{M}C$
۲) $C\hat{A}B > C\hat{A}D$
۳) $B\hat{M}C > A\hat{M}D$
۴) $C\hat{M}D > A\hat{M}B$

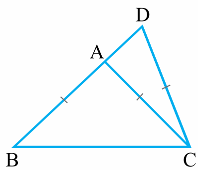
۴۵- در چهارضلعی $ABCD$، اگر $CD = CB$ و $A\hat{C}B > A\hat{C}D$ باشد، آن‌گاه کدام نامساوی همواره برقرار است؟ (ریاضی ۹۲ ـ خارج)

۱) $AB > AC$
۲) $AB > AD$
۳) $AC > AB$
۴) $AC > AD$

۴۶- در مثلث ABC، میانهٔ AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام نامساوی همواره درست است؟ (ریاضی ۹۴ ـ داخل)

۱) $AM < BC$
۲) $AM < AB$
۳) $AD < AB$
۴) $AD < AM$

۴۷- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) ساق BA را از نقطهٔ B به اندازهٔ قاعدهٔ BC تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟ (ریاضی ۹۴ ـ خارج)



۱) ۱۰۲
۲) ۱۰۵
۳) ۱۰۸
۴) ۱۱۲

۴۸- در مثلث ABC، زاویهٔ $\hat{C} > \hat{A}$، نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف AB در نقطهٔ D متقاطع‌اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطهٔ D به ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند. کدام نابرابری درست است؟ (ریاضی ۹۵ ـ داخل)

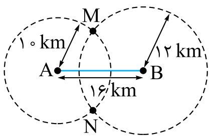
۱) $NC > NB$
۲) $NC < NB$
۳) $DA > DC$
۴) $AM < BN$

۴۹- در مثلث ABC نیمسازهای زاویهٔ داخلی، در نقطهٔ O متقاطع‌اند. اگر زاویه‌های AOB، BOC و COA متناسب با اعداد ۷، ۶ و ۵ باشند، بزرگ‌ترین زاویهٔ این مثلث چند درجه است؟ (ریاضی ۹۷ ـ داخل)

۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۱۰

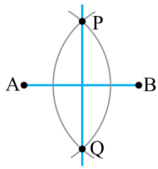
پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱- گزینهٔ «۲» تمامی نقاطی که از دهکدهٔ A به فاصلهٔ ۱۰ باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۰ قرار دارند و تمام نقاطی که از دهکدهٔ B به فاصلهٔ ۱۲ قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۱۲ واقع هستند.



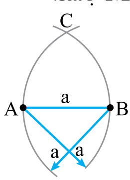
با توجه به شکل، این دو دایره در دو نقطهٔ M و N متقاطع‌اند و این دو نقطه، همان نقاط مطلوب هستند، پس دو نقطه با مشخصات موردنظر وجود دارند.

۲- گزینهٔ «۳» خطی که از دو نقطهٔ برخورد دو کمان می‌گذرد، عمودمنصف AB است، پس گزینهٔ ۳ درست است.



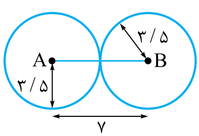
۳- گزینهٔ «۴» خطی که از نقطه‌های برخورد دو کمان رسم شده؛ یعنی از نقاط M و N می‌گذرد، عمودمنصف پاره‌خط AB می‌باشد، پس نقطهٔ C وسط AB است و در نتیجه $AC = BC$ (یعنی گزینهٔ ۱ درست است) و بنابراین BC نصف AB است (یعنی گزینهٔ ۲ نیز درست است) و همچنین AB دو برابر AC است (یعنی گزینهٔ ۳ نیز درست است) اما دلیلی ندارد که $MN = AB$ باشد.

۴- گزینهٔ «۲» اگر دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $AB = a$ باز کنیم و به مرکزهای A و B دو کمان رسم کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند، آن‌گاه $AC = BC = a$، پس هر سه ضلع مثلث ABC برابرند و در نتیجه با دو کمان، مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کرده‌ایم.

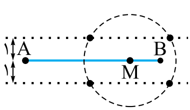


۵- گزینهٔ «۳» در میانهٔ AM، نقطهٔ M وسط BC است. برای پیداکردن نقطهٔ وسط این پاره‌خط کافی است عمودمنصف آن را رسم کنیم؛ نقطهٔ برخورد عمودمنصف با BC همان نقطهٔ M است و برای رسم عمودمنصف یک پاره‌خط باید به مرکزهای B و C دو کمان با شعاع مساوی و دلخواه که بیشتر از نصف BC باشد رسم کنیم.

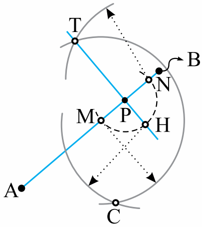
۶- گزینهٔ «۱» باید به مرکزهای A و B دو کمان با شعاع‌های ۳/۵ رسم کنیم. با توجه به شکل، این دو دایره تنها یک نقطهٔ مشترک دارند، پس فقط یک نقطه با شرایط موردنظر وجود دارد.



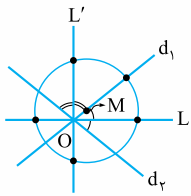
۷- گزینهٔ «۲» تمام نقاطی که از پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۱ هستند روی دو خط موازی با آن قرار دارند. از طرفی تمام نقاطی که از M به فاصلهٔ ۲ هستند، روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲ قرار دارند. چون فاصلهٔ M از دو خط مفروض، کم‌تر از شعاع دایره است، پس این دایره هر یک از دو خط را قطع می‌کند و چهار نقطه پدید می‌آید.



۸- گزینهٔ «۲» ابتدا خطی رسم می‌کنیم که از P بگذرد و بر AB عمود باشد. برای این منظور ۳ کمان باید رسم شوند.

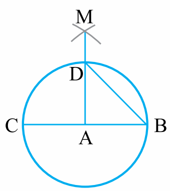


کمان به مرکز P که قبلاً رسم شده امتداد PT را در H قطع می‌کند.
اکنون باید نیمساز زاویهٔ قائمهٔ $A\hat{P}H$ را رسم کنیم.
اگر به مرکزهای M و H دو قوس با شعاع مساوی رسم کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند، آن‌گاه $A\hat{P}C$ برابر ۴۵° است.
یکی از قوس‌ها قبلاً رسم شده (قوسی به مرکز M) پس کافی است قوس دیگری به مرکز H و همان شعاع رسم شود، پس دست کم به چهار کمان نیاز داریم.

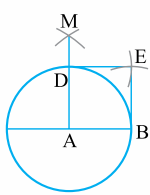


۹- گزینهٔ «۴» تمام نقاطی که از دو خط d_1 و d_2 به یک فاصله باشند، روی نیمساز زاویه‌های بین این دو خط هستند (این دو نیمساز را در شکل L و L′ نامیده‌ایم).
هم‌چنین مجموعهٔ تمام نقاطی که از نقطهٔ M به فاصلهٔ a هستند، روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع a قرار دارند.
نقاط برخورد این دایره با هر یک از دو خط L و L′ جواب مسئله هستند. چون هر دایره دو خط متمایز را حداکثر در چهار نقطه قطع می‌کند، پس مسئله حداکثر چهار جواب دارد.

۱۰- گزینهٔ «۴» شکل نشان داده شده همان روش رسم عمود بر یک خط از یک نقطه است. پس MP بر d عمود است و چون این خط، پاره‌خط AB را نصف کرده است، در نتیجه MP عمودمنصف AB است و بنابراین $PA = PB$. از طرفی در مثلث APB پاره‌خط PH هم میانه و هم ارتفاع است، پس این مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه PH نیمساز زاویهٔ APB نیز می‌باشد. گزینهٔ ۴ در حالت کلی درست نمی‌باشد.



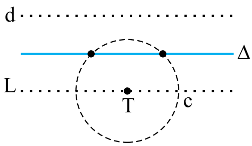
۱۱- گزینهٔ «۲» به مرکز A و شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم.
امتداد AB، دایره را در C قطع می‌کند. به مرکزهای B و C و شعاع‌های دلخواه مساوی که بیشتر از AB باشد، دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. MA بر AB عمود است و دایرهٔ اول را در D قطع می‌کند. مثلث ADB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس دست کم به سه کمان نیاز داریم.



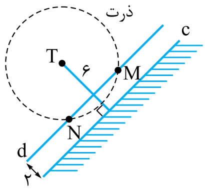
۱۲- گزینهٔ «۳» همانند تست قبل مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABD را رسم می‌کنیم (تا این‌جا به رسم سه کمان نیازمندیم). اکنون به مرکزهای B و D دو کمان با شعاعی که برابر AB باشد رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در E قطع کنند. مربع ABED جواب مسئله است، پس باید دست کم پنج کمان رسم شود.

۱۳- گزینهٔ «۴» نقاطی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف AB قرار دارند و نقاطی که از A و C به یک فاصله باشند نیز روی عمودمنصف AC هستند. اگر این دو عمودمنصف، یکدیگر را در O قطع کنند، آن‌گاه چون O روی عمودمنصف AB است، پس $OA = OB$ و چون این نقطه روی عمودمنصف AC است، در نتیجه $OA = OC$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $OA = OB = OC$، یعنی نقطهٔ O از سه رأس مثلث به یک فاصله هستند، در نتیجه کافی است عمودمنصف‌های نظیر دو ضلع را رسم کنیم.

۱۴- گزینهٔ «۱» تمام نقاطی که از دو خط موازی d و L به یک فاصله هستند، روی خطی موازی با این دو خط هستند که از وسط آن‌ها می‌گذرد (این خط را با Δ نمایش داده‌ایم). نقطهٔ T از این خط (خط Δ) به فاصلهٔ ۵ است. مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ T به فاصلهٔ ۷ باشند، روی دایره‌ای به مرکز T و شعاع ۷ قرار دارند. این دایره، خط Δ را در دو نقطه قطع می‌کند و این دو نقطه جواب مسئله است.

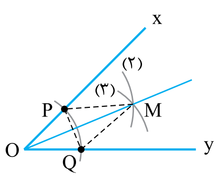


۱۵- گزینهٔ «۴» نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از ردیف کاشت ذرت هستند دو خط به فاصلهٔ ۲ از خط c هستند ولی چون مترسک باید در سمتی که ذرت کاشته شده باشد، پس فقط یک خط که در شکل با d نمایش داده شده قابل‌قبول است. تمام نقاطی که از نقطهٔ T به فاصلهٔ ۵ قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز T و شعاع ۵ قرار دارند.



چون فاصلهٔ T از خط d برابر ۴ است، پس این دایره خط d را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند و این دو نقطه جواب‌های مسئله هستند.

۱۶- گزینهٔ «۴» از شکل می‌توان پی برد که نیمساز زاویهٔ O را رسم کرده‌ایم، پس OM نیمساز است. بنا بر ویژگی نیمساز یک زاویه، نقطهٔ M از دو ضلع زاویه، یعنی Ox و Oy، به یک فاصله است، پس گزینهٔ ۱ درست است. PM شعاع کمان (۲) و QM نیز شعاع کمان (۳) است و چون شعاع‌های این دو کمان برابرند، پس $PM = QM$ و در نتیجه گزینهٔ ۲ نیز درست است.



چون OM نیمساز است، پس $x\hat{O}M = \frac{۱}{۲} x\hat{O}y$ و گزینهٔ ۳ نیز درست است.

اما علت نادرستی گزینهٔ ۴ این است که چون $OP = OQ$، پس مثلث OPQ مثلثی متساوی‌الساقین است و چون OM نیمساز زاویهٔ رأس این مثلث است، پس ارتفاع نیز می‌باشد یعنی $OM \perp PQ$.

۱۷- گزینهٔ «۲» با توجه به چگونگی رسم عمودمنصف یک پاره‌خط نتیجه می‌شود xy عمودمنصف ضلع AC و zt عمودمنصف AB است. با توجه به ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط داریم:

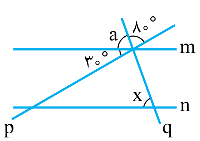
$$\left.\begin{array}{l} \text{M روی عمودمنصف AC} \Rightarrow MA = MC \\ \text{M روی عمودمنصف AB} \Rightarrow MA = MB \end{array}\right\} \Rightarrow MA = MB = MC$$

یعنی نقطهٔ M از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

۱۸- گزینهٔ «۳» در اثبات به روش برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) حکم را نقض می‌کنیم (یعنی فرض می‌کنیم حکم درست نباشد) و سعی می‌کنیم که به تناقض برسیم.

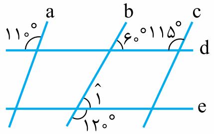
۱۹- گزینهٔ «۳» با توجه به شکل داریم:

$$\hat{a} + ۳۰^\circ + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{a} = ۷۰^\circ$$

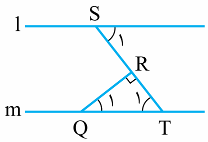


اگر m و n بخواهند موازی باشند، چنان‌چه خط q را مورب بگیریم، باید $a = x$ باشد، پس $x = ۷۰^\circ$.

۲۰- گزینهٔ «۴» با توجه به شکل، زاویهٔ $\hat{۱}$، مکمل زاویهٔ ۱۲۰° و برابر ۶۰° است، پس $d \parallel e$.



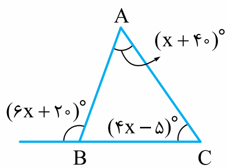
۲۱- گزینهٔ «۲» چون دو خط l و m موازی‌اند و ST مورب است، پس $\hat{T}_۱ = \hat{S}_۱ = ۵۲^\circ$.



در مثلث QRT داریم: $\hat{Q}_۱ + \hat{R} + \hat{T}_۱ = ۱۸۰^\circ$

$$\hat{Q}_۱ + ۹۰^\circ + ۵۲^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{Q}_۱ = ۳۸^\circ$$

۲۲- گزینهٔ «۴» چون هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است، پس باید داشته باشیم:



$$۶x + ۲۰ = (x + ۴۰) + (۴x - ۵)$$

$$\Rightarrow ۶x + ۲۰ = ۵x + ۳۵ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

زاویهٔ داخلی B $= ۱۸۰ - (۶x + ۲۰)$

$$= ۱۸۰ - (۶ \times ۱۵ + ۲۰) = ۷۰^\circ$$

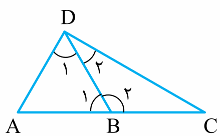
۲۳- گزینهٔ «۲» می‌دانیم مجموع سه زاویهٔ داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است، پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + (۲x + ۲) + (۳x + ۴) = ۱۸۰ \Rightarrow ۶x = ۱۸۰ - ۶ = ۱۷۴$$

$$\Rightarrow x = ۲۹^\circ$$

پس زاویهٔ B برابر $۲x + ۲ = ۲ \times ۲۹ + ۲ = ۶۰^\circ$ و در نتیجه زاویهٔ خارجی نظیر رأس B برابر ۱۲۰° است.

۲۴- گزینهٔ «۳» چون مثلث ABD متساوی‌الاضلاع است، پس:

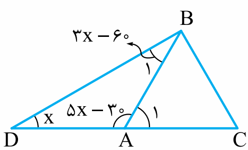


$$\hat{A} = \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۲ = ۱۲۰^\circ$$

چون مثلث BCD در رأس B متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C} = \hat{D}_۲ = \alpha$. اکنون در مثلث BCD داریم:

$$\hat{B}_۲ + \hat{D}_۲ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰ + \alpha + \alpha = ۱۸۰ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

۲۵- گزینهٔ «۳» چون $AB = BC$، پس $۶a - ۸ = ۴a - ۲$، در نتیجه $a = ۳$، بنابراین $BC = ۴a - ۲ = ۱۰$، یعنی گزینهٔ ۲ نادرست است.



مجموع زاویه‌های مثلث ABD باید ۱۸۰° باشد، پس داریم:

$$x + (۵x - ۳۰) + (۳x - ۶۰) = ۱۸۰ \Rightarrow ۹x = ۲۷۰ \Rightarrow x = ۳۰^\circ$$

بنابراین $D\hat{A}B = ۵ \times ۳۰ - ۳۰ = ۱۲۰^\circ$ و درنتیجه $\hat{A}_۱ = \hat{C} = ۶۰^\circ$، پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و بنابراین $AC = BC = ۱۰$. (از این‌جا نتیجه می‌شود که گزینهٔ ۱ نیز نادرست است.)

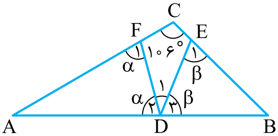
$\hat{B}_۱ = ۳ \times ۳۰ - ۶۰ = ۳۰^\circ$، پس $\hat{B}_۱ = \hat{D}$، در نتیجه $DA = AB = ۱۰$ بنابراین $DC = ۱۰ + ۱۰ = ۲۰$، یعنی گزینهٔ ۳ درست می‌باشد.

به سادگی نتیجه می‌شود که $D\hat{B}C = ۳۰ + ۶۰ = ۹۰^\circ$؛ یعنی گزینهٔ ۴ هم نادرست است.

۲۶- گزینهٔ «۱»

$$AF = AD \Rightarrow \hat{F}_۱ = \hat{D}_۲ = \alpha \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$$

$$BD = BE \Rightarrow \hat{D}_۳ = \hat{E}_۱ = \beta \Rightarrow B = ۱۸۰^\circ - ۲\beta$$



در مثلث ABC مجموع زاویه‌ها ۱۸۰° است، پس:

$$(۱۸۰ - ۲\alpha) + ۱۰۶ + (\cancel{۱۸۰} - ۲\beta) = \cancel{۱۸۰}$$

$$\Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۲۸۶ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۴۳^\circ$$

از طرفی $\hat{D}_۱ + \alpha + \beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱ + ۱۴۳^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۳۷^\circ$

۲۷- گزینهٔ «۱»

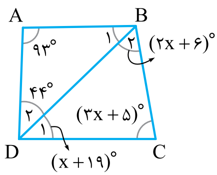
$$\left.\begin{aligned} ۵۰^\circ < \hat{A} < ۶۰^\circ \\ ۹۰^\circ < \hat{B} < ۱۰۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۱۴۰^\circ < \hat{A} + \hat{B} < ۱۶۰^\circ \quad (۱)$$

می‌دانیم $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$، پس $\hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ - \hat{C}$، بنابراین از رابطهٔ (۱) داریم:

$$۱۴۰^\circ < ۱۸۰^\circ - \hat{C} < ۱۶۰^\circ \Rightarrow ۱۴۰^\circ - ۱۸۰^\circ < -\hat{C} < ۱۶۰^\circ - ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow -۴۰^\circ < -\hat{C} < -۲۰^\circ \Rightarrow ۲۰^\circ < \hat{C} < ۴۰^\circ$$

۲۸- گزینهٔ «۲»



مجموع زاویه‌های مثلث BCD باید ۱۸۰° باشد، پس داریم:

$$(x + ۱۹) + (۲x + ۶) + (۳x + ۵) = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۶x + ۳۰ = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۲۵$$

در نتیجه: $\hat{B}_۲ = ۲x + ۶ = ۵۶$ و $\hat{D}_۱ = x + ۱۹ = ۴۴^\circ$

در مثلث ABD نیز مجموع زاویه‌ها باید ۱۸۰° باشد، پس: $\hat{B}_۱ + ۹۳ + ۴۴ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۴۳$

چون $\hat{B}_۱$ با $\hat{D}_۱$ برابر نیست، پس AB و CD موازی نیستند، یعنی گزینهٔ ۲ درست نیست.

از طرفی $A\hat{B}C = \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۴۳ + ۵۶ = ۹۹$، یعنی گزینهٔ ۱ درست است.

چون $\hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ = ۴۴^\circ$ پس BD نیمساز زاویهٔ D است و گزینهٔ ۴ نیز درست است.

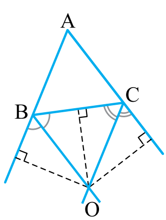
از طرفی $\hat{C} = ۳x + ۵ = ۳ \times ۲۵ + ۵ = ۸۰^\circ$ و گزینهٔ ۳ هم درست است.

۲۹- گزینهٔ «۲» اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم، برابر $\frac{۳۶۰}{n}$ و اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی آن $\frac{(n-۲) \times ۱۸۰}{n}$ است، پس:

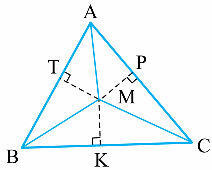
$$\frac{۳۶۰}{n} = ۱۸ \Rightarrow n = ۲۰$$

$$\text{ضلعی منتظم} \; n-۲ \; \text{هر زاویهٔ داخلی} = \text{هر زاویهٔ داخلی ۱۸ ضلعی منتظم} = \frac{(۱۸-۲) \times ۱۸۰}{۱۸} = ۱۶۰^\circ$$

۳۰- گزینهٔ «۴» نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی هر مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است. از طرفی دو نیمساز زاویه‌های خارجی و نیمساز زاویهٔ داخلی رأس سوم نیز در یک نقطه همرس هستند و این نقطه نیز از سه ضلع مثلث به یک فاصله است (در شکل مقابل O از سه ضلع مثلث به یک فاصله است) و در صفحهٔ هر مثلث سه نقطه نظیر آن وجود دارد (یکی برخورد دو نیمساز خارجی رأس‌های B و C و دیگری A و C و سومی A و B) پس در مجموع چهار نقطه در صفحه وجود دارند که از سه ضلع مثلث به یک فاصله هستند.



۳۱- گزینهٔ «۱» نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی هر مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؛ یعنی در شکل مقابل:



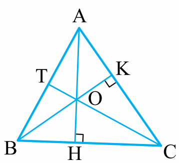
$$MT = MP = MK = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

با توجه به شکل مقابل داریم:

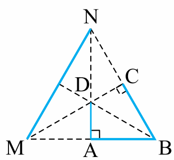
$$S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{۱}{۲}MK \times BC + \frac{۱}{۲}MT \times AB + \frac{۱}{۲}MP \times AC$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}BC + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times AB + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times AC = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(BC + AB + AC) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۱۸ = ۶\sqrt{۳}$$

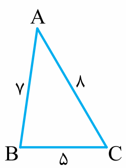
۳۲- گزینهٔ «۲» اگر یکی از زاویه‌های مثلثی منفرجه باشد، آن‌گاه نقطهٔ همرسی سه ارتفاع آن مثلث بیرون مثلث قرار می‌گیرد.



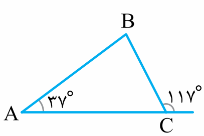
۳۳- گزینهٔ «۲» در مثلث AOB، BH ارتفاع نظیر ضلع AO، AK ارتفاع نظیر ضلع BO و OT ارتفاع نظیر ضلع AB است و این سه خط در نقطهٔ C همرس هستند، پس نقطهٔ C نقطهٔ همرسی سه ارتفاع مثلث AOB است.



۳۴- گزینهٔ «۳» در مثلث MBN، NA و MC ارتفاع‌های نظیر دو ضلع MB و NB هستند، پس نقطهٔ D نقطهٔ همرسی سه ارتفاع مثلث MNB است و در نتیجه امتداد BD نیز بر MN عمود است.



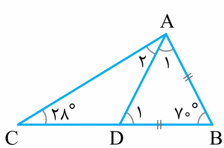
۳۵- گزینهٔ «۴» می‌دانیم اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه ضلعی که بزرگ‌تر است، زاویهٔ مقابلش نیز بزرگ‌تر است.
با توجه به شکل مقابل نتیجه می‌شود $\hat{B} > \hat{C} > \hat{A}$.



۳۶- گزینهٔ «۲» چون زاویهٔ خارجی نظیر رأس C برابر ۱۱۷° است، پس زاویهٔ داخلی آن $\hat{C} = ۱۸۰ - ۱۱۷ = ۶۳^\circ$ و چون مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰° است، پس:

$$\hat{B} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = ۱۸۰ - (۳۷ + ۶۳) = ۸۰^\circ$$

چون بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC، زاویهٔ $\hat{B}$ است، پس ضلع مقابل به این زاویه؛ یعنی ضلع AC، بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.



۳۷- گزینهٔ «۳» $AB = BD \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ = ۵۵^\circ$

در مثلث ACD، زاویهٔ $\hat{D}_۱$ زاویهٔ خارجی است، پس:

$$\hat{D}_۱ = \hat{A}_۲ + ۲۸^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۵۵^\circ - ۲۸^\circ = ۲۷^\circ$$

در مثلث ACD چون $\hat{A}_۲ < \hat{C}$، در نتیجه: $CD < AD$

۳۸- گزینهٔ «۱» هر ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+۱<(۴x-۲)+۲x \\ ۴x-۲<(x+۱)+۲x \\ ۲x<(۴x-۲)+(x+۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+۱<۶x-۲ \\ ۴x-۲<۳x+۱ \\ ۲x<۵x-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۶x<-۲-۱ \\ ۴x-۳x<۱+۲ \\ ۲x-۵x<-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۵x<-۳ \\ x<۳ \\ -۳x<-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{۳}{۵} \\ x<۳ \\ x>\frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} \frac{۳}{۵}<x<۳$$

۳۹- گزینهٔ «۲» در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است، پس باید داشته باشیم:

$$|AC-BC|<AB<AC+BC \Rightarrow |۷-۱۸|<\underbrace{AD}_{=۶}+BD<۷+۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۱<۶+BD<۲۵ \Rightarrow ۵<BD<۱۹$$

در بین گزینه‌ها فقط عدد ۱۳ بین ۵ و ۱۹ است.

۴۰- گزینهٔ «۱» در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، پس:

$$BC<AB+AC \xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{به دو طرف } BC} ۲BC<AB+AC+BC=۴۸ \Rightarrow BC<۲۴ \quad (۱)$$

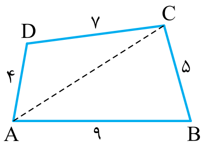
چون BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، پس:

$$\left.\begin{matrix} BC>AB \\ BC>AC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{دو طرف نامساوی‌های هم‌جهت را جمع می‌کنیم}} ۲BC>AB+AC$$

$$\Rightarrow ۳BC>AB+AC+BC \Rightarrow ۳BC>۴۸ \Rightarrow BC>۱۶ \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $۱۶<BC<۲۴$ و تنها گزینهٔ ۱ در این نامساوی صدق می‌کند.

۴۱- گزینهٔ «۴» می‌دانیم در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است ولی از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.



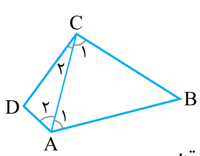
در مثلث ACD: $|۷-۴|<AC<۴+۷ \Rightarrow ۳<AC<۱۱ \quad (۱)$

در مثلث ABC: $|۹-۵|<AC<۹+۵ \Rightarrow ۴<AC<۱۴ \quad (۲)$

اشتراک رابطه‌های (۱) و (۲) عبارت است از $۴<AC<۱۱$.

چون طول AC عددی صحیح است، پس بیشترین مقدار صحیح آن برابر ۱۰ و کوچک‌ترین مقدار صحیح آن ۵ می‌باشد و مجموع این دو مقدار $۱۰+۵=۱۵$ است.

۴۲- گزینهٔ «۴» اگر از A به C وصل کنیم؛ آن‌گاه:



در مثلث ACB: $BC>AB \Rightarrow \hat{A}_۱>\hat{C}_۱$

در مثلث ACD: $CD>AD \Rightarrow \hat{A}_۲>\hat{C}_۲$

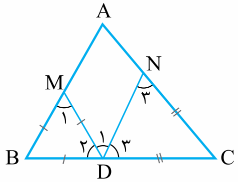
اگر طرفین این دو نامساوی هم‌جهت را با هم جمع کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲>\hat{C}_۱+\hat{C}_۲ \Rightarrow \hat{A}>\hat{C}$$

پس گزینهٔ ۱ درست است.

اگر قطر BD را رسم کنیم و به همین شیوه استدلال کنیم، نتیجه می‌شود $\hat{D} > \hat{B}$ ، پس گزینهٔ ۲ نیز درست است و در نتیجه پاسخ تست، گزینهٔ ۴ می‌باشد.

۴۳- گزینهٔ «۳»



$$MB = BD \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_2 = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} \quad (1)$$

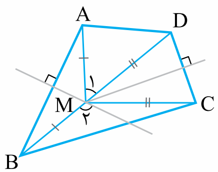
$$CD = NC \Rightarrow \hat{N}_3 = \hat{D}_3 = \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} \quad (2)$$

از طرفی چون $\hat{A} = 58^\circ$ ، پس $\hat{B} + \hat{C} = 122^\circ$. طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = \frac{180^\circ - \hat{B} + 180 - \hat{C}}{2} = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ$$

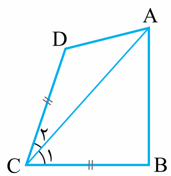
$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 180^\circ - 119^\circ = 61^\circ$$

۴۴- گزینهٔ «۳» چون M روی عمودمنصف AB است، پس $AM = BM$ و چون روی عمودمنصف CD نیز قرار دارد، پس $MC = MD$. اکنون در دو مثلث BMC و AMD داریم:



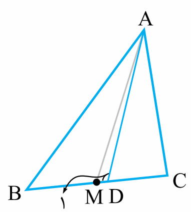
$$\left.\begin{array}{l} BM = AM \\ MC = MD \\ BC > AD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_2 > \hat{M}_1 = A\hat{M}D < B\hat{M}C$$

۴۵- گزینهٔ «۲»



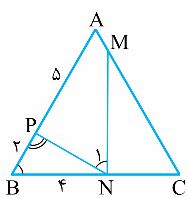
$$\left.\begin{array}{l} BC = CD \\ AC = AC \\ \hat{C}_1 > \hat{C}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB > AD$$

۴۶- گزینهٔ «۴» می‌دانیم نیمساز هر زاویهٔ مثلث، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، پس:



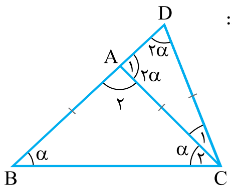
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

با توجه به این‌که AD نیمساز است، اگر $AB < AC$ باشد، آن‌گاه $BD < CD$ ، در نتیجه $\hat{D}_1 > \hat{M}_1$ ، بنابراین $AM > AD$ و به دلیل مشابه اگر $AB > AC$ باشد، آن‌گاه $\hat{D}_1 > \hat{M}_1$ و باز هم $AM > AD$ ، پس منظور طراح گزینهٔ ۴ بوده است. اما باید توجه کرد که اگر $AB = AC$ باشد، آن‌گاه AD و AM بر هم منطبق خواهند شد و در این صورت $AM = AD$ است و در نتیجه طرح تست ایراد دارد!



۴۷- گزینهٔ «۳» چون $AB = AC$، پس $\hat{B} = \hat{C}_۲ = \alpha$. در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A}_۱$ زاویه‌ای خارجی است، پس $\hat{A}_۱ = ۲\alpha$ و چون $AC = DC$، پس $\hat{D} = ۲\alpha$ و در نتیجه $\hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۴\alpha$.

اکنون در مثلث BCD چون $BD = BC$، پس $\hat{D} = \hat{C}$، بنابراین داریم:



$$۲\alpha = \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ \Rightarrow ۲\alpha = \alpha + (۱۸۰^\circ - ۴\alpha)$$

$$\Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

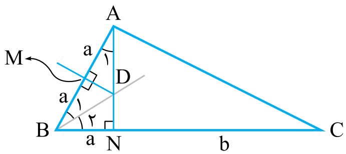
پس:

$$\hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - ۲ \times ۳۶ = ۱۰۸^\circ$$

۴۸- گزینهٔ «۱»

$$D \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow AD = BD \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \xrightarrow{\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۲$$

$$D \text{ روی نیمساز } B \Rightarrow DM = DN$$



پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMD و BND در حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده، هم‌نهشت هستند، در نتیجه $AM = BN$. اگر AM را a و CN را b بگیریم، چون $\hat{A} > \hat{C}$، پس $BC > AB$ و در نتیجه:

$$a + b > ۲a \Rightarrow b > a \Rightarrow NC > BN$$

۴۹- گزینهٔ «۳» زاویهٔ بین دو نیمساز داخلی هر دو زاویهٔ مثلث، برابر ۹۰° به اضافهٔ نصف زاویهٔ سوم است، پس داریم:

$$\left.\begin{aligned} A\hat{O}B &= ۷x = ۹۰^\circ + \frac{\hat{C}}{۲} \\ B\hat{O}C &= ۶x = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} \\ C\hat{O}A &= ۵x = ۹۰^\circ + \frac{\hat{B}}{۲} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} ۱۸x = ۲۷۰^\circ + \frac{\hat{C} + \hat{A} + \hat{B}}{۲} = ۲۷۰^\circ + \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۳۶۰^\circ$$

در نتیجه x برابر است با ۲۰°. از سه رابطهٔ فوق ملاحظه می‌شود $\hat{C}$ بزرگ‌ترین زاویه است، پس داریم:

$$۷ \times ۲۰^\circ = ۹۰^\circ + \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۱۰۰^\circ$$