فهرست

فصل هشتم
تابع

تعریف تابع

تابع ماشینی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

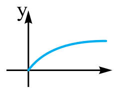
در نمایش زوج‌مرتبی یک تابع، مؤلفه‌های اول نباید برابر باشند، اگر برابر بودند، مؤلفه‌های دومشان هم باید برابر باشد.

توابع خاص

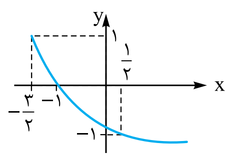
چند تابع خاص داشتیم. یک بار یادآوری می‌کنیم:

۱ تابع ثابت: $f(x)=c$. برد آن تک‌عضوی و نمودارش یک خط افقی است.

۲ تابع همانی: $f(x)=x$. همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (یا بخشی از آن) است.

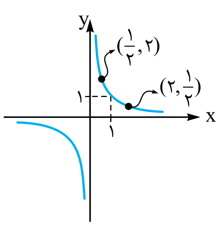
۳ تابع $y=\sqrt{x}$:  دامنه و برد آن $[۰,+\infty)$ است.

⚠ اگر خواستین توابع به فرم $y=\sqrt{ax+b}+c$ را بدون استفاده از انتقال رسم کنید، باید به xتان اعدادی بدهید که زیر رادیکال را صفر، ۱ و ۴ کند. بعد با همان سه نقطه شکل رسم می‌شود. مثلاً برای رسم تابع $y=۱-\sqrt{۲x+۳}$ باید به جای x، اعداد $\frac{-۳}{۲}$، -۱ و $\frac{۱}{۲}$ قرار دهید تا زیر رادیکال اعداد صفر، ۱ و ۴ شود:



x	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$\frac{۱}{۲}$
y	۱	۰	-۱

۴ تابع $y=\frac{۱}{x}$: برای رسمش به x، اعداد $\frac{۱}{۲}$، ۱، ۲ و منفی همین اعداد را بدهید.



دامنه و برد

برای به دست آوردن دامنهٔ توابع دوتا شرط مهم داریم:

۱ مخرج کسرها نباید صفر شود.

۲ عبارت‌های زیر رادیکال‌های با فرجهٔ زوج باید بزرگ‌تر و یا مساوی صفر باشند.

! فرجهٔ فرد محدودیتی در دامنهٔ تابع به وجود نمی‌آورد. مثلاً دامنهٔ تابع $y=\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{x-۲}}$ با دامنهٔ تابع $y=\frac{x+۱}{x-۲}$ که می‌شود $\mathbb{R}-\{۲\}$، یکسان است.

? اگر عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۲}+\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}$، عدد حقیقی باشد. مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

۱) $[\frac{۲}{۳},۲]$
۲) $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ *(تجربی خارج ۹۶)*
۳) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$
۴) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

= گزینهٔ «۴» عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۲}$ که مشکلی ندارد. فقط کافی است عبارت زیر رادیکالی که فرجهٔ ۴ دارد را بزرگ‌تر یا مساوی صفر بگذاریم:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{۴-۹x^۲}{۲x^۲}\geq ۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(۲-۳x)(۲+۳x)}{۲x^۲}\geq ۰$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

مرتبهٔ زوج

x		$-\frac{۲}{۳}$		۰		$\frac{۲}{۳}$	
کل عبارت	−	۰	+	ت ن	+	۰	−

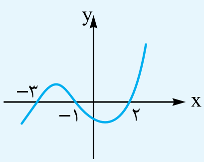
جایی که ما می‌خواستیم

$[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]-\{۰\}$

⚠ یک مدل سؤال خیلی رایجِ دامنه در کنکور، این‌گونه است که نمودار تابع $f(x)$ را به ما می‌دهند و از ما دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ یا توابعی شبیه آن را می‌خواهند. حل این سؤالات واقعاً آسان است! کافیه عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر بگذارید و بعد نامعادلهٔ به دست آمده را با تعیین علامت حل کنید. یک مثال ازش ببینید:

? شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۷)



۱) $[-۳,۲]$
۲) $[-۱,+\infty)$
۳) $(-\infty,-۱]$
۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

= گزینهٔ «۴» عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر و یا مساوی صفر می‌گذاریم:

ریشه: $-۳, -۱, ۲$

$$(x+۱)f(x)\geq ۰$$

ریشه: -۱

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم. $x+۱$ در یک سطر و $f(x)$ هم در یک سطر دیگر. $f(x)$ را با توجه به نمودارش تعیین علامت می‌کنیم. هر جا بالای محور xهاست، + و هر جا زیر محور xهاست، − می‌گذاریم.

x		-۳		-۱		۲	
$x+۱$	−		−	۰	+		+
$f(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+
$(x+۱)f(x)$	+	۰	−	۰	−	۰	+

$$\xrightarrow[\text{صفر است را می‌خواهیم}]{\text{جاهایی که مثبت یا}} (-\infty,-۳]\cup\{-۱\}\cup[۲,+\infty)$$

چون سؤال گفته تابع غیرنقطه‌ای!، پس $\{-۱\}$ را از دامنه حذفش می‌کنیم (چون باعث به وجود آمدن یک نقطهٔ تک می‌شود). در نتیجه:

$$D=(-\infty,-۳]\cup[۲,+\infty)=\mathbb{R}-(-۳,۲)$$

برای به دست آوردن برد توابع «خطی»، «درجه‌دو»، «قدرمطلق»، «رادیکالی»، «چندضابطه‌ای» و «نمایی و لگاریتمی» نمودارشان را رسم می‌کنیم.

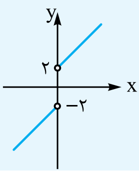
برد تابع $f(x)=x+\dfrac{۲x}{|x|}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

گزینهٔ «۴» تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x+\frac{۲x}{|x|}=\begin{cases}x+۲ & x>۰\\ x-۲ & x<۰\end{cases}$$

آن را رسم می‌کنیم:



برد تابع $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$ است که شامل ۵ عدد صحیحِ $۰,\pm۲,\pm۱$ نمی‌شود.

تساوی دوتابع

توابع f و g با هم برابرند اگر هر دو شرط زیر را داشته باشند:

۱ دامنه‌هایشان برابر باشد. ۲ ضابطه‌هایشان برابر باشد.

چندتا مثال ببینید:

۱ $f(x)=\dfrac{x^۲}{x^۳}$ و $g(x)=\dfrac{x^۵}{x^۶}$: دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ و ضابطه‌های هر دو بعد از ساده‌شدن به صورت $y=\dfrac{۱}{x}$ است، پس f و g برابرند.

۲ $f(x)=\sqrt{x(x-۲)}$ و $g(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x-۲}$

دامنهٔ تابع به فرم $\sqrt{AB}$ از حل نامعادلهٔ $AB\geq۰$ و دامنهٔ تابع به فرم $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ از اشتراک جواب‌های دو نامعادلهٔ $A\geq۰$ و $B\geq۰$ به دست می‌آید.

دامنهٔ f از حل نامعادلهٔ $x(x-۲)\geq ۰$ به دست می‌آید: $D_f=(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty)$

دامنهٔ g، اشتراک جواب نامعادله‌های $x\geq ۰$ و $x-۲\geq ۰$ است: $(x\geq ۰)\cap(x\geq ۲)=[۲,+\infty)$

دامنه‌ها برابر نشد پس f و g برابر نیستند.

جالبه اگر $f(x)=\sqrt{x(۲-x)}$ و $g(x)=\sqrt{x}.\sqrt{۲-x}$ بود، دو تابع برابر بودند! (بررسی کنید).

۳ $f(x)=\log x^۲$ و $g(x)=۲\log x$: اعداد منفی در دامنهٔ f هستند ولی در دامنهٔ g نیستند، پس دو تابع برابر نیستند.

$\log x^۲=۲\log|x|$

۴ این دفعه یک تابع دوضابطه‌ای مثل $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ k & x=۲\end{cases}$ با تابع $g(x)=ax+b$ برابر شده است و از ما a، b و k را می‌خواهند.

ضابطهٔ اول تابع f با اتحاد مزدوج ساده می‌شود: $f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\neq ۲\\ k & x=۲\end{cases}$

الان باید $x+۲$ همان $ax+b$ باشد، پس $a=۱$ و $b=۲$.

در نتیجه $g(x)=x+۲$ شد. حالا مقدار دو تابع را در $x=۲$ برابر قرار می‌دهیم:

$$f(۲)=g(۲)\ \Rightarrow\ k=۲+۲\ \Rightarrow\ k=۴$$

تابع یک‌به‌یک

تابعی که مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌هایش، عضو تکراری نداشته باشد را تابع یک‌به‌یک می‌گوییم.

اگر تابعی یک‌به‌یک باشد، هر خطی موازی محور xها رسم کنیم، حداکثر آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

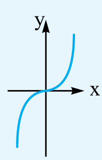
اگر ضابطهٔ تابع را داده بودند، برای بررسی یک‌به‌یک بودن یا نبودنش، یکی از این کارها را انجام می‌دهیم: ۱ رسم نمودار ۲ اگر شد مثال نقض برایش گیر می‌آوریم؛ یعنی ۲تا x گیر می‌آوریم که yهای یکسان بدهند. ۳ اگر تابع اکیداً یکنوا بود، حتماً یک‌به‌یک است.

? کدام گزینه یک‌به‌یک نیست؟

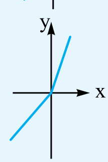
۱) $y=x|x|$ ۲) $y=x+\sqrt{x}$ ۳) $y=x+\dfrac{۱}{x}$ ۴) $y=۲x+|x|$

گزینهٔ «۳» نمودار توابع ۱ و ۴ را رسم می‌کنیم:

۱ $y=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$



۴ $y=۲x+|x|=\begin{cases}۳x & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$



هر دو یک‌به‌یک هستند.

توابع $y=x$ و $y=\sqrt{x}$ توابعی صعودی اکیدند. چون جمع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید می‌شود، پس تابع $y=x+\sqrt{x}$ صعودی اکید و در نتیجه یک‌به‌یک است. پس قطعاً تابع $y=x+\frac{1}{x}$ یک‌به‌یک نیست! می‌شد برایش مثال نقض هم زد. مثلاً به ازای $x=2$ و $x=\frac{1}{2}$، yهای یکسان می‌دهد.

محدودکردن دامنهٔ بعضی توابع برای یک‌به‌یک شدنشان

۱ طول رأس تابع درجه‌دو، $x_S=\frac{-b}{2a}$ می‌شد. اگر دامنهٔ تابع درجه‌دو را به صورت $x\geq\frac{-b}{2a}$ یا به صورت $x\leq\frac{-b}{2a}$ انتخاب کنیم، تابع یک‌به‌یک می‌شود.

$x\geq\frac{-b}{2a}$ $\qquad$ $x\leq\frac{-b}{2a}$

۲ در توابع $y=|x-a|+b$ که نمودارشان به شکل ($\bigvee$) است. اگر دامنه را $x\geq a$ یا $x\leq a$ بگیریم، تابع یک‌به‌یک می‌شود.

۳ در توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ هم اگر دامنه را بین دو نقطهٔ max و min **متوالی** بگیریم، تابع یک‌به‌یک می‌شود.

تابع وارون (معکوس)

اگر جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌مرتب‌ها را عوض کنیم، وارون آن تابع به دست می‌آید.

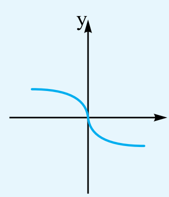
شرط وارون‌پذیری یک تابع، یک‌به‌یک بودن آن است.

جای دامنه و برد در تابع وارون عوض می‌شود: $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_{f^{-1}}=D_f$

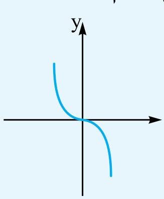
نمودار f و f^{-1}، نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

؟ اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

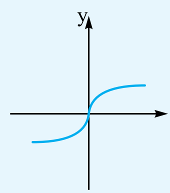
۱)



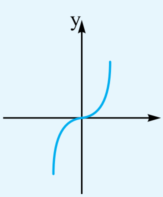
۲)



۳)



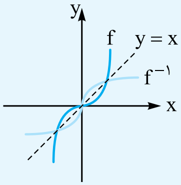
۴)



گزینهٔ «۳» تابع f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$

ابتدا f را رسم می‌کنیم. بعد نمودارش را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا $f^{-۱}$ به دست آید.



هر وقت لازم شد جای $f^{-۱}(b)=a$، بنویسید $f(a)=b$ و برعکس.

دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

گزینهٔ «۲» $f^{-۱}(g(۲a))=۶$، نتیجه می‌گیریم $f(۶)=g(۲a)$.

از زوج‌مرتب $(۶,۳)$ در تابع f، نتیجه می‌گیریم که $f(۶)=۳$. از طرفی با توجه به ضابطهٔ $g(x)$، $g(۲a)=\dfrac{۲a}{۲a-۱}$ است:

$$f(۶)=g(۲a) \Rightarrow ۳=\frac{۲a}{۲a-۱} \Rightarrow ۶a-۳=۲a \Rightarrow ۴a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$، حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

گزینهٔ «۴» فرض می‌کنیم $g^{-۱}(۱۶)=a$ است، پس $g(a)=۱۶$.

$g(a)$ می‌شود $f(۳a-۴)$، پس: $f(۳a-۴)=۱۶$

دوباره از هشدار فوق استفاده می‌کنیم: $f^{-۱}(۱۶)=۳a-۴$

چون $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$، پس: $f^{-۱}(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۲۰$

در نتیجه: $\underbrace{f^{-۱}(۱۶)}_{۲۰}=۳a-۴ \Rightarrow ۳a-۴=۲۰ \Rightarrow a=۸$

ضابطهٔ تابع وارون

یکی از موضوعاتی که معمولاً در کنکور از آن سؤال می‌آید، ضابطهٔ وارون یک تابع است. برای به دست آوردن ضابطهٔ وارون یک تابع دو مرحلهٔ زیر را انجام می‌دهیم:

۱ با هر کلکی که شد، x را برحسب y می‌نویسیم.

۲ جای x و y را عوض می‌کنیم.

توابعی که وارون آن‌ها را از ما می‌خواهند به همراه مثال در زیر آمده‌اند:

۱ تابع خطی: به خاطر آسان‌بودنش مثال نمی‌زنیم. فقط یک نکته ازش بدانید:

وارون توابع خطی با شیب ۱− و تابع خطیِ $y=x$، خودشان می‌شوند.

۲ تابع درجه‌دو با دامنهٔ محدودشده: وارون تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۱$ با دامنهٔ $x\le ۲$ را به دست می‌آوریم.

اول تابع درجه‌دو را به صورت مربع کامل می‌نویسیم. برای این کار مربع نصف ضریب x را اضافه و کم می‌کنیم (این‌جا می‌شود ۴):

$$y=x^{۲}-۴x+۱ \Rightarrow y=\underbrace{x^{۲}-۴x+۴}_{(x-۲)^{۲}}-۴+۱ \Rightarrow y=(x-۲)^{۲}-۳$$

اصل کار انجام شد. حالا x را باید تنها کنیم:

$$y+۳=(x-۲)^{۲} \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y+۳}=|x-۲|$$

این‌جا هم بچه‌ها خیلی اشتباه می‌کنند و قدرمطلق را نمی‌گذارند. حالا چون دامنه $x\le ۲$ بود، پس جای $|x-۲|$ باید $-x+۲$ قرار دهیم:

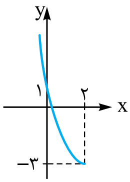
$$\sqrt{y+۳}=-x+۲ \Rightarrow x=-\sqrt{y+۳}+۲$$

در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=-\sqrt{x+۳}+۲$$

متأسفانه هنوز تمام نشده! باید دامنهٔ $f^{-۱}$ را هم به دست بیاوریم.

یادتان باشد بدون ریسک‌ترین راه برای حساب‌کردن $D_{f^{-۱}}$ آن است که نمودار f را بکشیم و برد f که همان $D_{f^{-۱}}$ است را پیدا کنیم. در این‌جا نمودار تابع $y=(x-۲)^{۲}-۳$ با دامنهٔ $x\le ۲$ را می‌کشیم:



$$\Rightarrow \quad D_{f^{-۱}}=R_f=[-۳,+\infty)$$

! اگر در این‌جا دامنه $x\ge ۲$ بود، از آن‌جایی که به $\sqrt{y+۳}=|x-۲|$ رسیدیم، راه‌حل عوض می‌شود. الان چون $x\ge ۲$، پس $|x-۲|$ خود $x-۲$ می‌شود و ادامه می‌دهیم:

$$\sqrt{y+۳}=x-۲ \Rightarrow x=\sqrt{y+۳}+۲ \xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=\sqrt{x+۳}+۲$$

۳ تابع رادیکالی: وارون تابع $f(x)=-\sqrt{x-۱}+۲$ را حساب می‌کنیم:

اول سعی می‌کنیم x را برحسب y بنویسیم:

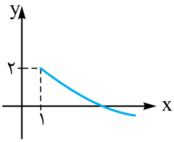
$$y=-\sqrt{x-۱}+۲ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱=(۲-y)^{۲}$$

$$\Rightarrow x-۱=y^{۲}-۴y+۴ \Rightarrow x=y^{۲}-۴y+۵$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=x^{۲}-۴x+۵$$

تمام‌نشده‌ها! باید نمودار خود f را بکشیم و برد f (همان $D_{f^{-1}}$) را پیدا کنیم:



$$\Rightarrow \quad R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, ۲]$$

پس f^{-1} به صورت $\underbrace{y = x^۲ - ۴x + ۵}_{\text{ضابطه}} ; \underbrace{x \le ۲}_{\text{دامنه}}$ درمی‌آید.

۴ درجه‌سه‌هایی که مکعب کامل می‌شوند: برای محاسبهٔ وارون تابع $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x + ۵$، از اتحاد $(x-۲)^۳ = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸$ کمک می‌گیریم و به جای $+۵$ می‌نویسیم $-۸ + ۱۳$:

$$y = \underbrace{x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸}_{(x-۲)^۳} + ۱۳ \Rightarrow y = (x-۲)^۳ + ۱۳ \Rightarrow y - ۱۳ = (x-۲)^۳$$

$$\xrightarrow{\text{فرجهٔ ۳}} x - ۲ = \sqrt[۳]{y - ۱۳} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y - ۱۳} + ۲$$

جای x و y را عوض می‌کنیم: $y = \sqrt[۳]{x - ۱۳} + ۲$. این‌جا دیگر شکل دامنه نداریم و چیزی را لازم نیست چک کنیم.

۵ تابع هموگرافیک: وارون تابع $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$، به صورت $f(x) = \dfrac{dx - b}{-cx + a}$ است.

در واقع جای a و d را عوض کردیم و b و c، سر جای خودشان قرینه می‌شوند.

مثلاً وارون تابع $y = \dfrac{۳x - ۲}{۴x - ۵}$ به صورت $y = \dfrac{-۵x + ۲}{-۴x + ۳}$ است.

اگر هم حفظ کردنش سخته، با طرفین‌وسطین کردن و سپس تنهاکردن x، می‌توانید f^{-1} را به دست آورید.

در تابع هموگرافیک $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$، اگر $a + d = ۰$ باشد، f و f^{-1} با هم برابر می‌شوند.

؟ اگر $f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ ; x \ge ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \dfrac{x - ۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

گزینهٔ «۴» با تابع درجه‌دو طرفیم. پس باید آن را مربع کامل بنویسیم:

$$y = x^۲ - ۲x - ۳ \Rightarrow y = \underbrace{x^۲ - ۲x + ۱}_{(x-۱)^۲} - ۱ - ۳ \Rightarrow y = (x-۱)^۲ - ۴$$

حالا x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y + ۴ = (x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y + ۴} = |x - ۱|$$

چون دامنه $x \ge ۱$ است، پس داریم:

$$\sqrt{y + ۴} = x - ۱ \Rightarrow x = \sqrt{y + ۴} + ۱$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x + ۴} + ۱$$

حالا f^{-1} را با g برابر می‌گذاریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x + ۴} + ۱ = \dfrac{x - ۹}{۲}$$

وقتی گزینه‌ها را داریم، برای چی خودمان را درگیر حل معادله کنیم؟! بین ۱۲، ۱۵، ۱۸ و ۲۱، فقط به ازای $x = ۱۲$ و $x = ۲۱$، رادیکال عددی رند بیرون می‌دهد، پس جواب یکی از این دوتاست. تساوی فقط به ازای $x = ۲۱$ برقرار می‌شود.

تقاطع f و f^{-1}

برای به دست آوردن تقاطع یک تابع با وارونش یکی از این دو کار را انجام می‌دهیم:

۱ نمودار f را می‌کشیم. آن را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان را پیدا می‌کنیم.

۲ ضابطهٔ f^{-1} را حساب می‌کنیم. بعد معادلهٔ $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم.

اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، می‌توانیم به جای حل معادلهٔ $f(x) = f^{-1}(x)$، معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

؟ نمودار تابع $f(x) = \dfrac{x+۴}{x-۲}$، با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) -۴ و -۱ ۲) ۴ و -۱ ۳) -۴ و ۱ ۴) ۴ و ۱

گزینهٔ «۲» برای وارون تابع هموگرافیک فرمول گفتیم:

$$f(x) = \frac{۱x+۴}{۱x-۲} \xrightarrow[\text{+۴ و +۱ قرینه می‌شود}]{\text{جای ۱ و ۲- عوض می‌شود}} f^{-1}(x) = \frac{-۲x-۴}{-۱x+۱} = \frac{۲x+۴}{x-۱}$$

قرینه

قرینه

حالا f را با f^{-1} برابر می‌گذاریم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{۲x+۴}{x-۱} \Rightarrow x^۲ + ۳x - ۴ = ۲x^۲ - ۸$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۴$$

اعمال جبری روی توابع

اگر ضابطه‌های دو تابع f و g را با هم جمع، تفریق، ضرب یا بر هم تقسیم کنیم، به ترتیب توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ به دست می‌آیند. دامنهٔ این توابع از اشتراک دامنهٔ دو تابع f و g به دست می‌آید. البته $\dfrac{f}{g}$ یک شرط بیشتر دارد و آن این است که مخرج یعنی g هم نباید صفر باشد:

$$D_{f \underset{\times}{\pm} g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$$

اگر $f(x)=۲-|x+۱|$ و $g(x)=x+|x|$، آن‌گاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$، کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۷)

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

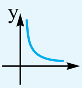
گزینهٔ «۳» دامنهٔ توابع f و g، هر دو $\mathbb{R}$ است. تابع g به ازای $x\leq ۰$ برابر صفر می‌شود، پس دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ می‌شود $\mathbb{R}$ به‌جز $x\leq ۰$:

$$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-(-\infty,۰]=(۰,+\infty)$$

به ازای $x>۰$، داخل هر دو قدرمطلق $|x+۱|$ و $|x|$ مثبت می‌شود و به ترتیب $x+۱$ و x می‌شوند. پس ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{۲-|x+۱|}{x+|x|}=\frac{۲-(x+۱)}{x+x}=\frac{-x+۱}{۲x}=\frac{۱}{۲}(\frac{-x+۱}{x})=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}-۱)$$

حالا با شرط $x>۰$ باید برد تابع $y=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}-۱)$ را حساب کنیم.

نمودار $y=\frac{۱}{x}$ به ازای $x>۰$ به صورت () است که بردش $(۰,+\infty)$ می‌شود، پس $\frac{۱}{x}>۰$.

از $\frac{۱}{x}>۰$، محدودهٔ برد $y=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}-۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{x}>۰\xrightarrow{-۱}\frac{۱}{x}-۱>-۱\xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}-۱)>\frac{-۱}{۲}\Rightarrow y>\frac{-۱}{۲}$$

پس بردمان $(\frac{-۱}{۲},+\infty)$ است.

حالا اگر f و g را زوج‌مرتبی دادند، اول xهای مشترک را می‌نویسیم. بعد مقدار تابع $f+g$ (*یا هرچی که بود*) را در xهای مشترک حساب می‌کنیم. مثلاً اگر $f=\{(-۱,۲),(۳,۷),(۲,۱)\}$ و $g=\{(-۱,۴),(۲,-۱),(۴,۵)\}$ باشد و ما تابع $\frac{۲g}{f+g}$ را بخواهیم، اول xهای مشترک دو تابع f و g را می‌نویسیم:

$$D_f\cap D_g=\{-۱,۲\}$$

حالا در $x=-۱$ و $x=۲$، مقدار تابع $\frac{۲g}{f+g}$ را حساب می‌کنیم:

$$x=-۱:\frac{۲g(-۱)}{f(-۱)+g(-۱)}=\frac{۲(۴)}{۲+۴}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\text{زوج‌مرتب}}(-۱,\frac{۴}{۳})$$

$$x=۲:\frac{۲g(۲)}{f(۲)+g(۲)}=\frac{۲(-۱)}{۱+(-۱)}=\frac{-۲}{۰}\Rightarrow \text{تعریف‌نشده}\Rightarrow \text{زوج‌مرتبی نمی‌دهد}$$

پس تابع $\frac{۲g}{f+g}$ به صورت $\{(-۱,\frac{۴}{۳})\}$ است.

ترکیب دوتابع

ممکن است f و g را زوج‌مرتبی به ما بدهند و fog یا چیزی شبیه آن را از ما بخواهند. این‌جور وقت‌ها حواستان باشد که xها را از تابع داخلی یعنی g می‌گیریم. با یک مثال توضیح دهیم.

فرض کنید $f=\{(۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۵)\}$ و $g=\{(-۲,۳),(۴,-۱),(۷,۶)\}$ باشد، در این صورت xهای دامنهٔ g؛ یعنی ۲−، ۴ و ۷ را در $f(g(x))$ قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} x=-۲: f(\underbrace{g(-۲)}_{۳})=f(۳)=۱ \Rightarrow \text{زوج‌مرتب } (-۲,۱) \text{ می‌دهد} \\ x=۴: f(\underbrace{g(۴)}_{-۱})=f(-۱)=۵ \Rightarrow \text{زوج‌مرتب } (۴,۵) \text{ می‌دهد} \\ x=۷: f(\underbrace{g(۷)}_{۶})=f(۶): \text{وجود ندارد} \Rightarrow \text{زوج‌مرتبی نمی‌دهد} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow fog=\{(-۲,۱),(۴,۵)\}$$

اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$ ۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

گزینهٔ «۱» اول باید f^{-1} را بنویسیم. جای x و yهای f را عوض می‌کنیم:

$$f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

برای نوشتن gof^{-1}، xهای f^{-1} را در $g(f^{-1}(x))$ می‌گذاریم:

$$\left.\begin{array}{l} x=۲: g(f^{-1}(۲))=g(۱)=\text{ندارد} \\ x=۵: g(f^{-1}(۵))=g(۲)=۳ \Rightarrow (۵,۳) \\ x=۴: g(f^{-1}(۴))=g(۳)=۱ \Rightarrow (۴,۱) \\ x=۶: g(f^{-1}(۶))=g(۴)=۲ \Rightarrow (۶,۲) \end{array}\right\} \Rightarrow gof^{-1}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$

فرض کنید gof^{-1}، تابع h است و ما تابع $\frac{g}{h}$ را می‌خواهیم. دامنهٔ مشترک g و h را می‌نویسیم:

$$D_g \cap D_h=\{۴,۵\}$$

حالا در $x=۴$ و $x=۵$، مقدار تابع $\frac{g}{h}$ را حساب می‌کنیم:

$$x=۴: \frac{g(۴)}{h(۴)}=\frac{۲}{۱}=۲ \Rightarrow (۴,۲)$$

$$x=۵: \frac{g(۵)}{h(۵)}=\frac{۶}{۳}=۲ \Rightarrow (۵,۲)$$

پس تابع $\frac{g}{h}$ به صورت $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ است.

دو تابع با ضابطه‌های $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $f(x)=۲x-۵$، مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}og)(a)=۶$ باشد، a کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۴» همیشه جای $(fog)(x)$، $f(g(x))$ بنویسید. این‌جا هم همین کار را می‌کنیم:

$$f^{-۱}(g(a))=۶$$

در تابع وارون گفتیم از $f^{-۱}(b)=a$، نتیجه می‌گیریم $f(a)=b$، پس در این‌جا داریم:

$$f(۶)=g(a)$$

مقدار $f(۶)$ را از ضابطه‌اش حساب می‌کنیم: $f(x)=۲x-۵ \Rightarrow f(۶)=۷$

پس تساوی $f(۶)=g(a)$ به شکل $g(a)=۷$ درمی‌آید. با توجه به وجود زوج‌مرتب $(۴,۷)$ در تابع g، نتیجه می‌گیریم: $a=۴$.

به دست آوردن یکی از توابع f، g و fog، با داشتن دوتای آن‌ها

سه حالت دارد:

۱) f و g را داریم و fog را می‌خواهیم: راحت‌ترین حالت همین است. کافی است جای xهای تابع f، $g(x)$ را قرار دهیم. مثلاً اگر $f(x)=x^۲-۲x$ و $g(x)=۳x-۱$ باشد، آن‌گاه:

$$(fog)(x)=f(g(x))=(۳x-۱)^۲-۲(۳x-۱)$$

۲) g و fog را داریم و f را می‌خواهیم: این حالت بیشتر مورد علاقهٔ طراحان کنکور است. تابع داخلی یعنی g را مساوی t می‌گذاریم. x را برحسب t می‌نویسیم و در fog قرار می‌دهیم تا $f(x)$ به دست آید.

اگر $g(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۸x^۲+۶x+۵$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $۲x^۲+۳x+۱$ ۲) $۲x^۲-۲x+۳$
۳) $۲x^۲-x+۴$ ۴) $۲x^۲+x+۳$

گزینهٔ «۳» g را مساوی t می‌گذاریم و x را برحسب t می‌نویسیم:

$$۲x+۱=t \Rightarrow x=\frac{t-۱}{۲}$$

در تابع fog، جای xها، $\frac{t-۱}{۲}$ می‌گذاریم:

$$f(۲x+۱)=۸x^۲+۶x+۵ \Rightarrow f(t)=۸(\frac{t-۱}{۲})^۲+۶(\frac{t-۱}{۲})+۵$$

$$\Rightarrow f(t)=۲(t-۱)^۲+۳(t-۱)+۵=۲t^۲-۴t+۲+۳t-۳+۵$$

$$\Rightarrow f(t)=۲t^۲-t+۴$$

آخر سر هم باید جای t، دوباره x بنویسیم: $f(x)=۲x^۲-x+۴$

ممکن بود صورت همین سؤال را مثل کنکور ۹۷ این‌جوری به ما می‌دادند: «اگر $f(۲x+۱)=۸x^۲+۶x+۵$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟» پس یادتان باشد هر وقت تابع داخلی (در این‌جا g) را داشتیم، باید آن را t بگیریم.

۳ f و fog را داریم و g را بخواهیم: جای xهای $f(x)$، تابع $g(x)$ را قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید. $f(g(x))$ به دست آمده را با $f(g(x))$ که داشتیم برابر می‌گذاریم و با حل معادله، $g(x)$ را پیدا می‌کنیم.

مثلاً اگر $f(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۲x^۲+۸x-۳$ باشد، می‌نویسیم:

$$f(g(x))=۲g(x)+۱$$

حالا این $f(g(x))$ را با $fog(x)$ که سؤال داده برابر می‌گذاریم:

$$۲g(x)+۱=۲x^۲+۸x-۳ \Rightarrow ۲g(x)=۲x^۲+۸x-۴ \xrightarrow{\div ۲} g(x)=x^۲+۴x-۲$$

اگر f و fog هر دو درجه‌دو بودند، باید دو طرف را مربع کامل کنید، بعد معادله را حل کنید.

مثلاً اگر $f(x)=x^۲+۴x+۷$ و $(fog)(x)=x^۲-۲x+۴$ باشد، اول $f(g(x))$ را می‌نویسیم:

$$f(g(x))=g^۲(x)+۴g(x)+۷$$

بعد این $f(g(x))$ را با $f(g(x))$ که سؤال داده، برابر قرار می‌دهیم:

$$g^۲+۴g+۷=x^۲-۲x+۴$$

دو طرف را مربع کامل می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$(g+۲)^۲+۳=(x-۱)^۲+۳ \Rightarrow (g+۲)^۲=(x-۱)^۲ \Rightarrow |g+۲|=|x-۱|$$

دو حالت می‌شود:

$$\begin{cases} g(x)+۲=x-۱ \Rightarrow g(x)=x-۳ \\ g(x)+۲=-x+۱ \Rightarrow g(x)=-x-۱ \end{cases}$$

$$(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$$

دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد. a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینهٔ «۲» جای $g^{-۱}of^{-۱}$ می‌نویسیم $(fog)^{-۱}$، پس: $(fog)^{-۱}(a)=۸$

از $(fog)^{-۱}(a)=۸$، نتیجه می‌گیریم $(fog)(۸)=a$، پس: $f(g(۸))=a$

$g(۸)$ را حساب می‌کنیم: $g(x)=\sqrt{۵x+۹} \Rightarrow g(۸)=\sqrt{۴۹}=۷$

ادامه می‌دهیم: $f(g(۸))=a \Rightarrow f(۷)=a \Rightarrow ۳=a$

ترکیب f و $f^{-۱}$

دو تابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$، ضابطه‌های برابری دارند ولی دامنه‌هایشان متفاوت است:

۱ $(fof^{-۱})(x)=x \;,\; D_{fof^{-۱}}=D_{f^{-۱}}=R_f$

۲ $(f^{-۱}of)(x)=x \;,\; D_{f^{-۱}of}=D_f$

پس هر دو تابع، توابعی **همانی** هستند.

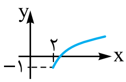
یک مثال زوج‌مرتبی و یک مثال ضابطه‌ای از آن ببینید:

۱ مثال زوج‌مرتبی: اگر $f=\{(۱,۲),(۴,۵)\}$ باشد، چون $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ هر دو تابع همانی‌اند، پس مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌مرتب‌هایشان برابر است. در $fof^{-۱}$، xها از $D_{f^{-۱}}$ یا همان R_f می‌آیند و در $f^{-۱}of$، xها از D_f می‌آیند.

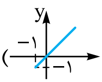
$$fof^{-۱}=\underbrace{\{(۲,۲),(۵,۵)\}}_{\text{تابع همانی با دامنهٔ } R_f}$$

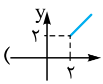
$$f^{-۱}of=\underbrace{\{(۱,۱),(۴,۴)\}}_{\text{تابع همانی با دامنهٔ } D_f}$$

۲ مثال ضابطه‌ای: اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}-۱$ باشد، نمودارش به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \begin{cases} D_f=[۲,+\infty) \\ R_f=[-۱,+\infty) \end{cases}$$

$(fof^{-۱})(x)=x$ و دامنه‌اش $[-۱,+\infty)$ است که نمودارش به شکل () است.

$(f^{-۱}of)(x)=x$ و دامنه‌اش $[۲,+\infty)$ است که نمودارش به شکل () است.

انتقال توابع

با فرض داشتن نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار توابع وابسته به آن را این‌گونه رسم می‌کنیم:

$(a,b>۰)$

۱ $y=f(x-a) \Leftarrow$ a واحد به راست ، $y=f(x+a) \Leftarrow$ a واحد به چپ

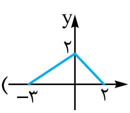
۲ $y=f(x)+b \Leftarrow$ b واحد به بالا ، $y=f(x)-b \Leftarrow$ b واحد به پایین

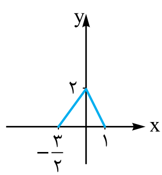
۳ $y=f(-x) \Leftarrow$ قرینه نسبت به محور yها

۴ $y=-f(x) \Leftarrow$ قرینه نسبت به محور xها

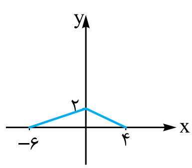
۵ $y=f(kx) \Leftarrow$ طول نقاط در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌شود (yها ثابت می‌ماند).

۶ $y=kf(x) \Leftarrow$ عرض نقاط در k ضرب می‌شود (xها ثابت می‌ماند).

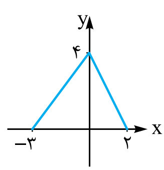
برای مورد (۵) و (۶) مثال می‌زنیم. اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل () باشد، داریم:



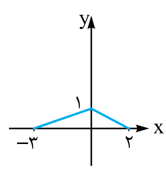
$f(۲x)$



$f(\frac{x}{۲})$

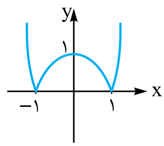


$۲f(x)$



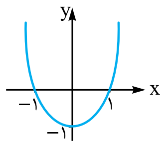
$\frac{۱}{۲}f(x)$

۷ $y=|f(x)|$ ⇐ قسمت بالای محور xها بدون تغییر می‌ماند و قسمت پایین محور xها، نسبت به آن قرینه می‌شود.



$y=|x^۲-۱|$

⇐



$y=x^۲-۱$

! در موارد (۱)، (۳) و (۵) حواستان باشد که در ضابطهٔ تابع، جای xها، به ترتیب $x\pm a$، $-x$ و kx قرار می‌گیرد. مثلاً اگر تابع $y=\sqrt{۱-۲x}$ را بخواهیم ۳ واحد به راست ببریم، باید جای xها، $x-۳$ قرار دهیم: $y=\sqrt{۱-۲(x-۳)}=\sqrt{-۲x+۷}$

؟ **قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟**

(تجربی خارج ۹۷)

۱) -۲ ۲) $۰/۵$ ۳) ۱ ۴) $۱/۵$

= **گزینهٔ «۳»** مراحل را به ترتیبی که سؤال گفته، انجام می‌دهیم:

۱ برای قرینه‌کردن نسبت به محور yها، جای xها، $-x$ می‌گذاریم:

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y=\sqrt{-x}$$

۲ برای ۲ واحد به سمت راست بردن، جای xها، $x-۲$ می‌گذاریم:

$$y=\sqrt{-x}\Rightarrow y=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{۲-x}$$

۳ تابع $y=\sqrt{۲-x}$ را با خط $y=x$ قطع می‌دهیم:

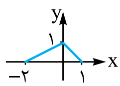
$$\sqrt{۲-x}=x$$

اگر گزینه‌ها را چک کنیم فقط به ازای $x=۱$ تساوی بالا برقرار است.

⚠ اگر این انتقال‌ها با هم ترکیب شوند، ترتیب اثر دادنشان به صورت زیر است:

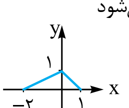
$$\underset{\text{سوم}}{a}\ f(\underset{\text{دوم}}{b}\ x+\underset{\text{اول}}{c})+\underset{\text{چهارم}}{d}$$

مثلاً اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت (



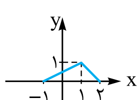
) باشد و بخواهیم نمودار $y=-f(\frac{x}{۲}-۱)+۱$ را رسم کنیم، این‌جوری می‌شود:

$$\underset{\text{قرینه نسبت به محور yها}}{\overset{③}{-}}f(\underset{\text{xها ۲ برابر می‌شود}}{\overset{②}{\frac{۱}{۲}}}x\ \underset{\text{۱ واحد به راست}}{\overset{①}{-\ ۱}})\overset{④}{+\ ۱}\rightarrow \text{۱ واحد به بالا}$$



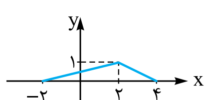
$f(x)$

۱ واحد به راست ←

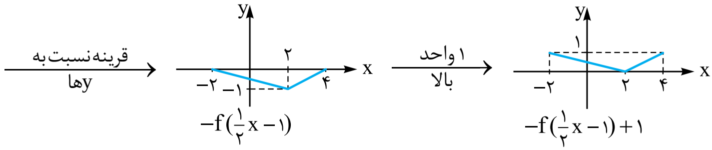


$f(x-۱)$

xها ۲ برابر می‌شوند ←

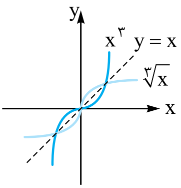


$f(\frac{۱}{۲}x-۱)$



تابع درجه ۳

شکل تابع $y=x^3$ ملقب به لر و وارونش یعنی $y=\sqrt[3]{x}$ این‌جوری بود:



دوتا اتحاد مکعب روبه‌رو را هم بلد باشید:

$$\begin{cases}(x\pm 1)^3=x^3\pm 3x^2+3x\pm 1\\(x\pm 2)^3=x^3\pm 6x^2+12x\pm 8\end{cases}$$

با این دوتا اتحاد ممکن است بازی کنند. مثلاً برای رسم تابع $y=x^3+3x^2+3x-2$، باید از دلش $(x+1)^3$ را بیرون بکشید:

$$y=x^3+3x^2+3x-2\xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{خودمان ۱+ و ۱−}}y=x^3+3x^2+3x+1-1-2$$
$$=(x+1)^3-3$$

پس برای رسم تابع $y=(x+1)^3-3$، تابع $y=x^3$ را یک واحد به چپ و ۳ واحد به پایین می‌بریم.

نمودار تابع $y=x^3-6x^2+12x-3$ را نسبت به محور yها قرینه و سپس ۳ واحد به سمت راست می‌بریم. تابع جدید، خط $y=32$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -8 ۴) 8

گزینهٔ «۱» از ضابطهٔ تابع باید $(x-2)^3$ بیرون بکشیم. عدد ۸− و ۸+ را اضافه می‌کنیم:

$$y=\underbrace{x^3-6x^2+12x-8}_{(x-2)^3}+8-3=(x-2)^3+5$$

اول ضابطه را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، سپس جای xها، $-x$ می‌گذاریم:

$$y=(-x-2)^3+5$$

بعد آن را ۳ واحد به راست می‌بریم، یعنی جای xها، $x-3$ می‌گذاریم:

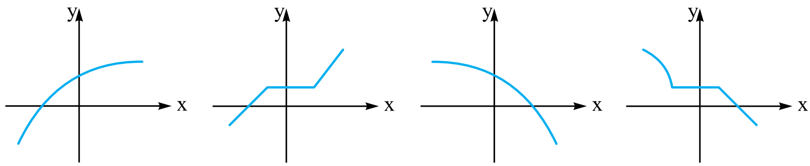
$$y=(-(x-3)-2)^3+5=(-x+1)^3+5$$

حالا آن را با خط $y=32$ قطع می‌دهیم:

$$(-x+1)^3+5=32\Rightarrow(-x+1)^3=27\Rightarrow -x+1=3\Rightarrow x=-2$$

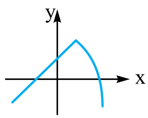
توابع صعودی و نزولی

در تعریف ریاضی تابع صعودی، داریم:
$$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) \geq f(x_۱)$$
ولی در تعریف ریاضی تابع اکیداً صعودی، مساوی بالا حذف می‌شود:
$$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) > f(x_۱)$$
ما معمولاً برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن مجبوریم، نمودار رسم کنیم.
با حرکت از چپ به راست روی نمودار، اگر نمودار تابع فقط رو به بالا برود، تابع اکیداً صعودی است و اگر هم بالا برود و هم خط افقی شود، تابع صعودی است.



نزولی | اکیداً نزولی | صعودی | اکیداً صعودی

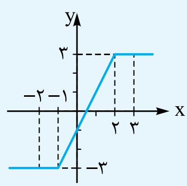
! تابع ثابت، تابعی هم صعودی و هم نزولی است.
اگر قسمتی از یک تابع، صعودی و قسمت دیگرش نزولی باشد، آن تابع غیریکنوا است، مثل این:



? **تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۱| - |x-۲|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟** (تجربی خارج ۹۸)

۱) $(-\infty, ۲)$ ۲) $(۱, +\infty)$ ۳) $(-۱, ۲)$ ۴) $(۲, +\infty)$

= **گزینهٔ «۳»** نمودار رسم می‌کنیم. اگر یادتان باشد شکل این توابع، آبشاری می‌شد! کافی است چهارتا نقطه بدهیم:



	کوچک‌تر	ریشه	ریشه	بزرگ‌تر
x	-۲	-۱	۲	۳
y	-۳	-۳	۳	۳

این تابع در بازهٔ $[-۱, ۲]$ یا $(-۱, ۲)$ اکیداً صعودی است.

! اگر جای «اکیداً صعودی» می‌گفت «صعودی»، جواب $\mathbb{R}$ می‌شد.

⚠ در تابع اکیداً صعودی اگر $f(a) > f(b)$، نتیجه می‌گیریم $a > b$ (با حذف f ها علامت برنمی‌گردد)
ولی اگر f اکیداً نزولی باشد از $f(a) > f(b)$، نتیجه می‌گیریم $a < b$ (علامت برمی‌گردد).

? **اگر $f(x) = ۲^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(\frac{۱}{x}) - f(x)}$، به کدام صورت است؟** (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $\mathbb{R} - (-۱, ۱)$ ۲) $[-۱, ۰) \cup (۰, ۱]$
۳) $[-۱, ۰) \cup [۱, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -۱] \cup (۰, ۱]$

گزینهٔ «۴» عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{1}{x})-f(x)\geq 0 \Rightarrow f(\frac{1}{x})\geq f(x)$$

$f(x)=2^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف fها، علامت برنمی‌گردد. $\frac{1}{x}\geq x$

نامعادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x}-x\geq 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x}\geq 0 \Rightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x}\geq 0$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

		-1		0		1	
کل	+	۰	−	ت ن	+	۰	−
	جواب				جواب		

$(-\infty,-1]\cup(0,1]$

در تابع خطی $y=ax+b$، اگر $a>0$ تابع اکیداً صعودی و اگر $a<0$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟ *(ریاضی ۹۴)*

۱) $-x+6; x<-4$

۲) $-x+5; x>2$

۳) $-\frac{1}{2}x+1; -4<x<3$

۴) $-\frac{1}{2}x+1; -4<x<10$

گزینهٔ «۴» تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. ریشه‌های قدرمطلق‌ها، ۳ و -4 است.

$$y=|2x-6|-|x+4|+x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq 3: y=2x-6-(x+4)+x=2x-10 \\ -4<x<3: y=-2x+6-(x+4)+x=-2x+2 \\ x\leq -4: y=-2x+6-(-x-4)+x=10 \end{cases}$$

فقط شیبِ ضابطهٔ وسطی، منفی شد، پس تابع در بازهٔ $-4<x<3$ با ضابطهٔ $y=-2x+2$، اکیداً نزولی است.

وارونش را به دست می‌آوریم: $y=-2x+2 \Rightarrow 2x=-y+2 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}y+1$

$$\xrightarrow[\text{x و y}]{\text{عوض‌کردن جای}} y=\frac{-1}{2}x+1$$

پس ضابطهٔ وارون به صورت $y=\frac{-1}{2}x+1$ است. فقط چیزی که خیلی مهمه و اغلب اشتباه می‌کنند، دامنهٔ تابع وارون است که برد f می‌شود. ما باید برد $f(x)=-2x+2$ را در بازهٔ $(-4,3)$ حساب کنیم. چون f خطی است، سروته بازهٔ دامنه‌اش را می‌دهیم تا بردش به دست آید.

$$\left.\begin{array}{l} f(-4)=10 \\ f(3)=-4 \end{array}\right. \Rightarrow R_f=(-4,10)$$

پس دامنهٔ f^{-1} در این بازه، $(-4,10)$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۶۰- اگر $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، تابع $(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)$ چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ثابت
۲) همانی
۳) فرد
۴) یک‌به‌یک

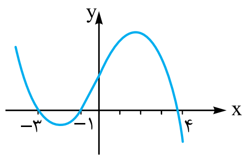
۱۶۱- اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت و $f(۲-a)=a^۲+۵a+۱۱=g(۱)$ باشد، مقدار $g(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) ۵
۴) -۵

۱۶۲- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{ax^۲+۴x+۴}{x^۲+۶x+a}$ به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{b\}$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۶
۲) -۶
۳) ۱۲
۴) -۱۲

۱۶۳- شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

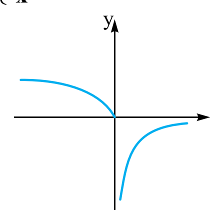


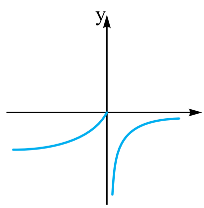
۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$
۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$
۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$
۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

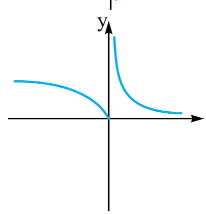
۱۶۴- اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases} f:(-۲,۳)\Rightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=-۴x+b\end{cases}$، بازهٔ $(-۱۱,k)$ باشد، مقدار $b+k$ کدام است؟

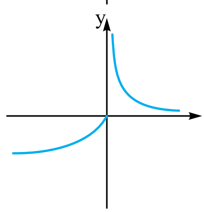
۱) -۵۰
۲) ۵۰
۳) -۱۰
۴) ۱۰

۱۶۵- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & x\leq ۰\\ \frac{-۱}{x} & x>۰\end{cases}$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۶۶- در کدام گزینه، توابع f و g، مساوی‌اند؟

۱) $f(x)=|x|$ و $g(x)=(\sqrt{x})^۲$
۲) $f(x)=\log x^۲$ و $g(x)=۲\log x$
۳) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}$
۴) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-۱}}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x}{x-۱}}$

۱۶۷- اگر دو تابع $f(x)=\frac{۲}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۲x+d}{ax^۲+bx+c}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۸

۱۶۸- اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$، تابع یک‌به‌یک باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۶)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۶۹- تابع $\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)=۲x^۲+۸x-۳ \end{cases}$ یک‌به‌یک نیست. A کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۰,۴)$ ۲) $(-۳,۰)$ ۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $[-۲,۲]$

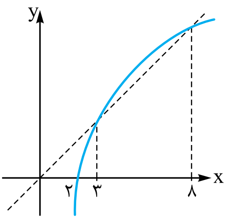
۱۷۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۳|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

۱۷۱- قرینهٔ خط به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۷۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$، کدام است؟ (تجربی ۹۴)



۱) $(۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

۱۷۳- ضابطهٔ معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $y=x^۲-۴x+۵;x\le ۲$ ۲) $y=-x^۲+۴x-۵;x\le ۲$
۳) $y=x^۲-۴x+۵;x\ge ۱$ ۴) $y=-x^۲+۴x-۵;x\ge ۱$

۱۷۴- اگر $y=-x^۲+۶x-۵$ با دامنهٔ $x\ge ۳$ باشد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۴-x}+۳;x\le ۴$ ۲) $\sqrt{۴-x}+۳;x\le ۳$
۳) $-\sqrt{x-۴}+۳;x\ge ۴$ ۴) $-\sqrt{x-۴}+۳;x\ge ۳$

۱۷۵- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰ \\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-x^۲$ ۲) $x^۲$ ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۱۷۶- تابع با ضابطهٔ $y=x|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه، کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $۱-\sqrt{۱+x};x<۰$ ۲) $۱-\sqrt{۱-x};x<۱$
۳) $۱+\sqrt{۱-x};۰<x<۱$ ۴) $۱-\sqrt{۱-x};۰<x<۱$

۱۷۷- اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^{۲}+۴})$ باشد، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $x-\frac{۱}{x}$ ۲) $\frac{۱}{x}-x$ ۳) $x-\frac{۲}{x}$ ۴) $\frac{۲}{x}-x$

۱۷۸- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(۳,-۲),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-۱}(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷۹- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g(x)=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $(gof)(a)=۵$ باشد، a کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۰- تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۴ و $\frac{۱}{۹}$ ۲) ۹ و $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴ (ریاضی خارج ۹۴)

۱۸۱- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of)-f$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $\{-۱,۴\}$ ۲) $\{۲,۳\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۲,-۱\}$

۱۸۲- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) -۷ و -۱ ۲) -۷ و ۱ ۳) ۷ و -۱ ۴) ۷ و ۱

۱۸۳- اگر $f(۲x-۳)=۴x^{۲}-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$، برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $x^{۲}-x+۳$ ۲) $x^{۲}-۲x-۱$
۳) $x^{۲}-۲x+۱$ ۴) $x^{۲}-x+۱$

۱۸۴- اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(f(x))=۸x^{۲}+۲۲x+۲۰$ باشند، ضابطهٔ تابع fog، کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $۲x^{۲}-۷x+۳$ ۲) $۲x^{۲}-۳x+۷$
۳) $۴x^{۲}-۲x+۱۳$ ۴) $۴x^{۲}-۴x+۱۱$

۱۸۵- اگر $f(x)=x^{۲}-x-۲$ و $(fog)(x)=x^{۲}+x-۲$، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $x^{۲}-۱$ ۲) $x^{۲}+۱$ ۳) $x^{۲}-۲x$ ۴) $x^{۲}+۲x$

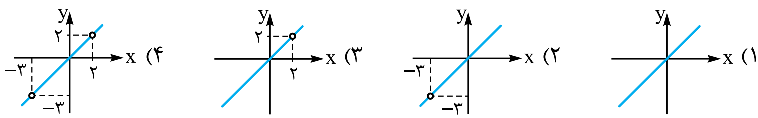
۱۸۶- اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\log(x^{۲}-۱۵x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $(۰,۵]\cup[۲۰,۲۵)$ ۲) $[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$
۳) $(۱۵,۲۰]$ ۴) $[-۵,۰)$

۱۸۷- اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^{۳}+x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$، کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳ *(تجربی خارج ۹۸)*

۱۸۸- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ باشد، نمودار تابع $y=(fof^{-۱})(x)$ کدام است؟



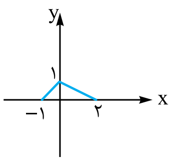
۱۸۹- نمودار تابع $y=-x^{۲}+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ *(ریاضی ۹۸)*

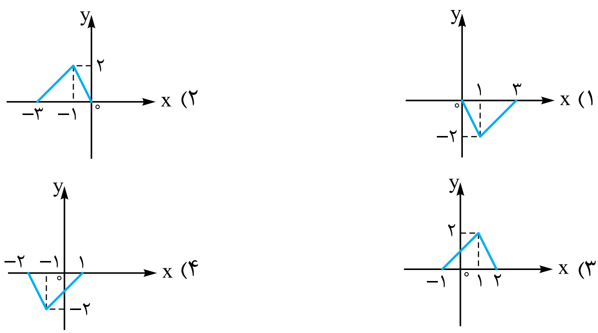
۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۲,۵)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۲,۶)$

۱۹۰- نمودار تابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را، ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟ *(تجربی ۹۳)*

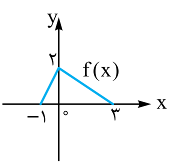
۱) −۳/۵ ۲) −۳ ۳) −۲/۵ ۴) −۲

۱۹۱- تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو است. نمودار تابع $y=۲f(۱-x)$ به کدام صورت است؟





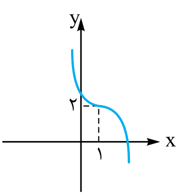
۱۹۲- نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است. اشتراک دامنه و برد تابع $y=۲f(۱+۲x)-۳$ کدام است؟



۱) $\{-۱\}$ ۲) $[-۱,۱]$

۳) $[-۳,۱]$ ۴) $[-۱,۰]$

۱۹۳- نمودار تابع $y=-x^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{b-c}{d}$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) −۱

۱۹۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $(-\infty,-۲)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

۱۹۵- تابع $f=\{(۲,۵-m),(-۱,۲m-۱),(۴,m+۱۱)\}$ تابعی اکیداً نزولی است. محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $m<-۳$ ۳) $-۳<m<۲$ ۴) $\varnothing$

۱۹۶- کدام‌یک از توابع زیر در دامنهٔ خود، اکیداً نزولی است؟

۱) $f(x)=x^۲|x|$ ۲) $f(x)=-x^۲|x|$

۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=-x|x|$

۱۹۷- اگر تابع $f(x)=(x^۲-۲x+۱)|x-۱|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً یکنوا باشد، حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

۱۹۸- در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

۱۹۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $-x+۷;x>۸$ ۲) $\frac{۱}{۳}x+۲;x>۳$

۳) $x+۷;x>-۴$ ۴) $\frac{۱}{۲}x-۱;-۴<x<۸$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱۶۰- گزینهٔ «۱» تابع $f(\sqrt{x})$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲+\frac{۱}{(\sqrt{x})^۲}=x+\frac{۱}{x}$$

ادامه می‌دهیم:

$$(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)=(x+\frac{۱}{x})^۲-(x^۲+\frac{۱}{x^۲})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲-x^۲-\frac{۱}{x^۲}=۲$$

پس این تابع یک تابع ثابت است.

۱۶۱- گزینهٔ «۳» f همانی است، پس $f(۲-a)=۲-a$، در نتیجه:

$$۲-a=a^۲+۵a+۱۱ \Rightarrow a^۲+۶a+۹=۰ \Rightarrow (a+۳)^۲=۰ \Rightarrow a=-۳$$

از طرفی $g(۱)$ با $۲-a$ برابر بود: $g(۱)=۲-(-۳)=۵$

چون g تابع ثابت است، پس $g(-۲)$ هم ۵ می‌شود.

۱۶۲- گزینهٔ «۴» دامنهٔ f فقط شامل یک عدد (b) نمی‌شود، پس مخرج f یعنی $x^۲+۶x+a$ باید یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

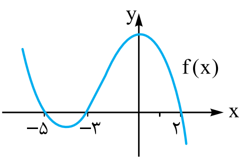
$$\Delta_{\text{مخرج}}=۰ \Rightarrow ۳۶-۴a=۰ \Rightarrow a=۹$$

با شرط $a=۹$، ریشهٔ مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+۶x+۹=۰ \Rightarrow (x+۳)^۲=۰ \Rightarrow x=-۳$$

پس b باید ۳- باشد و در نتیجه: $b-a=-۳-۹=-۱۲$

۱۶۳- گزینهٔ «۴» نمودار $f(x)$ را اگر ۲ واحد به راست ببریم می‌شود $f(x-۲)$. پس الان باید ۲ واحد ببریمش به چپ تا به نمودار خود $f(x)$ برسیم.



برای دامنه، زیر رادیکال باید بزرگ‌تر و یا مساوی صفر باشد: $xf(x)\geq ۰$

برای حل این نامعادله، جدول تعیین علامت می‌کشیم. تعیین علامت x که کاری ندارد. برای $f(x)$ هم، هر جا که نمودارش بالای محور xهاست، علامت + و هر جا زیر محور xهاست، علامت − قرار می‌دهیم:

		۵-		۳-		۰		۲	
x	−		−		−	۰	+		+
$f(x)$	+	۰	−	۰	+		+	۰	−
$xf(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−
			جواب				جواب		

$$\Rightarrow x\in[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

۱۶۴- گزینهٔ «۴» دامنهٔ تابع بازهٔ $(-۲,۳)$ است. از نامساوی $-۲<x<۳$، محدودهٔ برد را پیدا می‌کنیم:

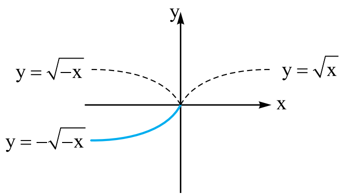
$$-۲<x<۳ \xrightarrow{\times(-۴)} -۱۲<-۴x<۸ \xrightarrow{+b} -۱۲+b<-۴x+b<۸+b$$

$$\Rightarrow \text{برد}=(-۱۲+b,۸+b)$$

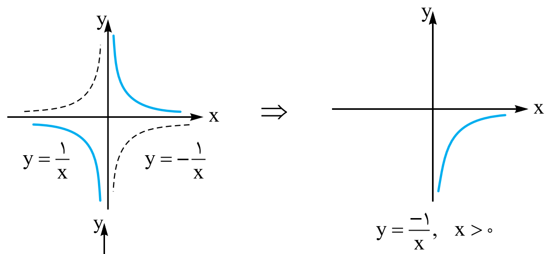
پس بازهٔ $(-۱۱,k)$ با بازهٔ $(-۱۲+b,۸+b)$ برابر است: $\Rightarrow \begin{cases} -۱۲+b=-۱۱ \Rightarrow b=۱ \\ ۸+b=k \Rightarrow k=۹ \end{cases}$

در نتیجه: $b+k=۱+۹=۱۰$

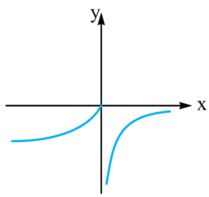
۱۶۵- گزینهٔ «۲» تابع $y=\sqrt{x}$ رانسبت‌به‌محور yها قرینه می‌کنیم $(y=\sqrt{-x})$ و بعد نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم $(y=-\sqrt{-x})$. این شکلی می‌شود:



نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را بلدیم. آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و فقط قسمت $x>۰$ را نگه می‌داریم:



پس شکل نهایی این است:



۱۶۶- گزینهٔ «۳» در ۱، ۲ و ۴ دامنه‌ها با هم برابر نیست.

۱ $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=[۰,+\infty)$

۲ $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $D_g=(۰,+\infty)$. یادتان باشد که $\log x^۲$ با $۲\log|x|$ برابر است.

۴ برای دامنهٔ f، بین دو شرط $x\geq ۰$ و $x>۱$، اشتراک می‌گیریم: $D_f=(۱,+\infty)$. برای دامنهٔ g، نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۱}\geq ۰$ را حل می‌کنیم: $D_g=(-\infty,۰]\cup(۱,+\infty)$

فقط توابع ۳ هر دو شرط را دارند. دامنهٔ هر دو $\mathbb{R}-\{۰\}$ است و ضابطهٔ هر دو به صورت $\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$ درمی‌آید.

۱۶۷- گزینهٔ «۱» دامنهٔ تابع f، فقط عدد ۳ را شامل نمی‌شود. دامنهٔ g باید با دامنهٔ f برابر باشد، پس مخرج g باید ریشهٔ مضاعف ۳ بدهد، یعنی به صورت ضریبی از $(x-۳)^۲$ باشد. پس در صورت g باید $x-۳$ باشد که با یکی از $x-۳$ های مخرج ساده شود، در نتیجه g باید این‌جوری باشد:

$$g(x)=\frac{۲(x-۳)}{(x-۳)^۲}=\frac{۲x\overset{d}{-۶}}{\underset{a}{۱}x^۲\underset{b}{-۶}x+\underset{c}{۹}}$$

پس: $a+b+c+d=۱-۶+۹-۶=-۲$

۱۶۸- گزینهٔ «۴» دو زوج‌مرتب $(۳,a^۲-a)$ و $(۳,۲)$ داریم. برای تابع‌بودن باید $a^۲-a$ مساوی ۲ باشد:

$$a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ a=۲ \end{cases}$$

اگر $a=-۱$ باشد، آن‌وقت دو زوج‌مرتب $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ داریم که باعث می‌شود رابطه، تابع نباشد، پس فقط $a=۲$ قبول است. دو زوج‌مرتب $(b,۲)$ و $(۳,۲)$، مؤلفه‌های دوم برابر دارند. برای یک‌به‌یک بودن رابطه، باید $b=۳$ باشد.

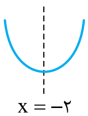
در نتیجه:

$$a+b=۲+۳=۵$$

۱۶۹- گزینهٔ «۲» طول رأس سهمی را حساب می‌کنیم:

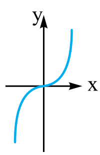
$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲(۲)}=-۲$$

یعنی شکل حدودی سهمی این‌جوری است:

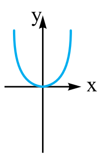


برای آن‌که تابع یک‌به‌یک باشد، باید دامنه یعنی A را به گونه‌ای انتخاب کنیم که یا قبل از ۲− باشد یا بعد از ۲− . الان به ازای $(-۳,۰)$، عدد ۲− داخل بازه می‌افتد، پس یک‌به‌یک نیست.

۱۷۰- گزینهٔ «۳» تابع $y=x^۳$ را می‌کشیم:



برای رسم $y=|x^۳|$، کافی است قسمت‌های زیر محور xها را بالا بیاوریم. واضح است که تابع یک‌به‌یک نیست، پس وارون‌پذیر نیست.



۱۷۱- گزینهٔ «۱» وقتی سؤال می‌گوید تابعی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ قرینه کنید؛ یعنی وارونش را می‌خواهد. در ضابطهٔ $۳y-۲x=۴$، جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$۳x-۲y=۴$$

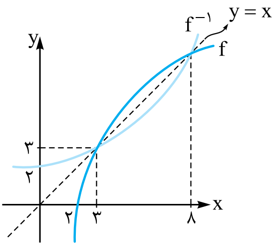
بعد y را برحسب x می‌نویسیم:

$$۲y=۳x-۴ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x\underbrace{-۲}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

۱۷۲- گزینهٔ «۴» عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر می‌گذاریم:

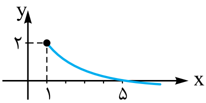
$$x-f^{-۱}(x)\geq ۰ \Rightarrow x\geq f^{-۱}(x)$$

نمودار f^{-1} را می‌کشیم:



نامعادلهٔ $x \geq f^{-1}(x)$، یعنی کجاها، تابع $y=x$ بالاتر از $y=f^{-1}(x)$ است؟ روی نمودار به ازای $۳ \leq x \leq ۸$، نیمساز ربع اول و سوم بالاتر از f^{-1} است، پس جواب همین است: $[۳,۸]$

۱۷۳- گزینهٔ «۱» اول برد تابع اولیه که همان دامنهٔ تابع وارون است را حساب می‌کنیم:



با توجه به نمودار، داریم: $R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty,۲]$

حالا می‌رویم سراغ ضابطه. x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱=y^۲-۴y+۴$$
$$\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$$

جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=x^۲-۴x+۵$

پس ضابطهٔ وارون $y=x^۲-۴x+۵$ و دامنه‌اش $(-\infty,۲]$ است.

۱۷۴- گزینهٔ «۱» باید تابع را مربع کامل بنویسیم:

$$y=-x^۲+۶x-۵ \Rightarrow y=-(x^۲-۶x+۵)$$

داخل پرانتز، عدد ۹ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$y=-(x^۲-۶x+۹-۹+۵)=-(x^۲-۶x+۹)+۴$$
$$\Rightarrow y=-(x-۳)^۲+۴$$

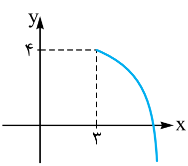
حالا x را برحسب y می‌نویسیم: $(x-۳)^۲=۴-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۳|=\sqrt{۴-y}$

با دامنهٔ $x \geq ۳$، داخل قدرمطلق مثبت است، پس خودش بیرون می‌آید:

$$x-۳=\sqrt{۴-y} \Rightarrow x=\sqrt{۴-y}+۳$$

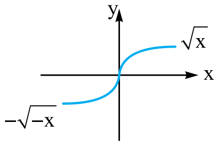
جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=\sqrt{۴-x}+۳$

رسیدیم به جای مهم داستان، یعنی دامنهٔ f^{-1}. به جای $D_{f^{-1}}$ باید R_f را حساب کنیم. نمودار $y=-(x-۳)^۲+۴$ با دامنهٔ $x \geq ۳$ را می‌کشیم:

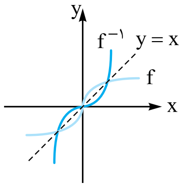


$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty,۴]$$

۱۷۵- گزینهٔ «۳» نمودار f را می‌کشیم:



اگر آن را نسبت به $y = x$ قرینه کنیم، نمودار روبه‌رو به دست می‌آید:

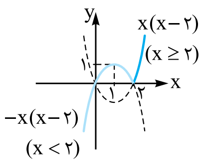


نمودار مربوط به تابع $y = x\,|\,x\,|$ است که چند باری هم در کنکور آمده است.

۱۷۶- گزینهٔ «۳» اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x\,|\,x-۲\,| = \begin{cases} x(x-۲) & x \geq ۲ \\ x(-x+۲) & x < ۲ \end{cases}$$

نمودار را رسم می‌کنیم:



تابع رسم‌شده در بازهٔ $(۱,۲)$ نزولی اکید است. ضابطهٔ آن در این بازه به صورت $y = -x(x-۲)$ است.

برای به دست آوردن وارون، باید آن را مربع کامل بنویسیم:

$$y = -(x^۲ - ۲x) = -(\underbrace{x^۲ - ۲x + ۱}_{(x-۱)^۲} - ۱) = -(x-۱)^۲ + ۱$$

x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y = -(x-۱)^۲ + ۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱ - y \xrightarrow{\text{جذر}} |\,x-۱\,| = \sqrt{۱-y}$$

به ازای $۱ < x < ۲$، داخل قدرمطلق مثبت می‌شود:

$$x - ۱ = \sqrt{۱-y} \Rightarrow x = \sqrt{۱-y} + ۱$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \sqrt{۱-x} + ۱$$

برد تابع f به ازای $۱ < x < ۲$، بازهٔ $(۰,۱)$ است، پس $D_{f^{-۱}}$ همان $(۰,۱)$ است.

۱۷۷- گزینهٔ «۱» برای تنهاکردن x در رابطهٔ $y = \frac{۱}{۲}(x + \sqrt{x^۲ + ۴})$، اول دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲y = x + \sqrt{x^۲ + ۴}$$

بعد رادیکال را تنها می‌کنیم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۲y - x = \sqrt{x^۲ + ۴} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴y^۲ - ۴xy + \cancel{x^۲} = \cancel{x^۲} + ۴$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 4 = 4xy \xrightarrow{\div 4} y^2 - 1 = xy \Rightarrow x = \frac{y^2-1}{y}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم: $y = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$

۱۷۸- گزینهٔ «۱» گفتیم از $f^{-1}(b) = a$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $f(a) = b$.

این‌جا هم از $g^{-1}(f(a)) = 3$، نتیجه می‌گیریم $g(3) = f(a)$.

جای $g(3)$، مقدارش را می‌گذاریم: $-2 = f(a)$

با توجه به ضابطهٔ f، فقط مقدار $f(-4)$، برابر ۲− است. پس $a = -4$.

۱۷۹- گزینهٔ «۴» از $g(f(a)) = 5$ و زوج‌مرتب $(6,5)$ در g، نتیجه می‌گیریم که $f(a)$ باید ۶ باشد. $f(a)$ می‌شود $a + \sqrt{a}$، که باید مساوی با ۶ قرار دهیم:

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\text{گزینه‌ها}} a = 4$$

۱۸۰- گزینهٔ «۲» نمودار f، محور xها را در $x = 6$ و $x = -\frac{1}{4}$ قطع کرده، پس $f(6) = 0$ و $f(-\frac{1}{4}) = 0$.

اگر تابع $f(g(x))$ محور xها را قطع کند، باید معادلهٔ $f(g(x)) = 0$ را حل کنیم. با توجه به این‌که f در $x = 6$ و $x = -\frac{1}{4}$، صفر می‌شود، پس $g(x)$ باید ۶ و $-\frac{1}{4}$ باشد:

$$g(x) = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6$$

$$\xrightarrow{\text{حدس}} x = 9$$ (با توجه به گزینه‌ها بین ۴ و ۹، فقط ۹ جواب می‌دهد)

$$g(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} = \frac{-1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

۱۸۱- گزینهٔ «۴» جای x و y را در g عوض می‌کنیم تا g^{-1} به دست آید:

$$g^{-1} = \{(3,2),(2,4),(6,5),(1,3)\}$$

تابع $g^{-1}of$، xهایش را از f می‌گیرد:

$x = 1 : g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(2) = 4 \Rightarrow$ زوج‌مرتب $(1,4)$ را می‌دهد

$x = 2 : g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(5) =$ ندارد $\Rightarrow$ ×

$x = 3 : g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) =$ ندارد $\Rightarrow$ ×

$x = 4 : g^{-1}(f(4)) = g^{-1}(6) = 5 \Rightarrow$ زوج‌مرتب $(4,5)$ را می‌دهد

حالا با داشتن $h = g^{-1}of = \{(1,4),(4,5)\}$ و $f = \{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$، می‌خواهیم $h - f$ را تشکیل دهیم. با دامنهٔ مشترک h و f کار داریم:

$$D_h \cap D_f = \{1,4\}$$

مقدار تابع $h-f$ را در $x=۱$ و $x=۴$ حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x=۱:(h-f)(۱)=h(۱)-f(۱)=۴-۲=۲ \\ x=۴:(h-f)(۴)=h(۴)-f(۴)=۵-۶=-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{برد}=\{۲,-۱\}$$

۱۸۲- گزینهٔ «۱» جای xهای f، $x+۴$ می‌گذاریم تا fog به دست آید:

$$f(g(x))=\frac{۲(x+۴)-۱}{(x+۴)+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}$$

یک بار هم جای xهای g، $\frac{۲x-۱}{x+۲}$ می‌گذاریم تا gof به دست آید:

$$g(f(x))=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\frac{۶x+۷}{x+۲}$$

fog و gof را برابر می‌گذاریم:

$$\frac{۲x+۷}{x+۶}=\frac{۶x+۷}{x+۲} \Rightarrow ۶x^۲+۴۳x+۴۲=۲x^۲+۱۱x+۱۴$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰ \xrightarrow{\div ۴} x^۲+۸x+۷=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x+۷)=۰ \Rightarrow x=-۱,-۷$$

۱۸۳- گزینهٔ «۴» $۲x-۳$ را t می‌گیریم:

$$۲x-۳=t \Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}$$

جای xها، $\frac{t+۳}{۲}$ می‌گذاریم:

$$f(\underbrace{۲x-۳}_{t})=۴x^۲-۱۴x+۱۳ \Rightarrow f(t)=۴(\frac{t+۳}{۲})^۲-۱۴(\frac{t+۳}{۲})+۱۳$$

$$\Rightarrow f(t)=(t+۳)^۲-۷(t+۳)+۱۳ \Rightarrow f(t)=t^۲-t+۱$$

آخر سر هم جای t، x می‌گذاریم:

$$f(x)=x^۲-x+۱$$

۱۸۴- گزینهٔ «۳» از $g(f(x))$، f که تابع داخلی می‌شود را داریم. تابع داخلی را t می‌گیریم:

$$۲x+۳=t \Rightarrow x=\frac{t-۳}{۲}$$

در $g(۲x+۳)=۸x^۲+۲۲x+۲۰$، جای xها، $\frac{t-۳}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$g(t)=۸(\frac{t-۳}{۲})^۲+۲۲(\frac{t-۳}{۲})+۲۰ \Rightarrow g(t)=۲(t-۳)^۲+۱۱(t-۳)+۲۰$$

$$\Rightarrow g(t)=۲t^۲-۱۲t+۱۸+۱۱t-۳۳+۲۰ \Rightarrow g(t)=۲t^۲-t+۵$$

جای tها x می‌گذاریم:

$$g(x)=۲x^۲-x+۵$$

حالا fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=۲(۲x^۲-x+۵)+۳=۴x^۲-۲x+۱۳$$

۱۸۵- گزینهٔ «۱» در $f(x)=x^۲-x-۲$، جای xها، $g(x)$ می‌گذاریم:

$$f(g(x))=g^۲(x)-g(x)-۲$$

$f(g(x))$ صفحهٔ قبل را با $f(g(x))$ای که سؤال داده برابر قرار می‌دهیم:

$$g^{۲}(x)-g(x)\cancel{-۲}=x^{۲}+x\cancel{-۲}$$

این‌جور وقت‌ها باید دو طرف را مربع کامل کنیم. عبارت $x^{۲}+x$ با عدد $\frac{۱}{۴}$، مربع کامل می‌شود. پس به دو طرف، $\frac{۱}{۴}$ اضافه می‌کنیم:

$$g^{۲}(x)-g(x)+\frac{۱}{۴}=x^{۲}+x+\frac{۱}{۴}\Rightarrow (g(x)-\frac{۱}{۲})^{۲}=(x+\frac{۱}{۲})^{۲}$$

جذر می‌گیریم:

$$|g(x)-\frac{۱}{۲}|=|x+\frac{۱}{۲}|$$

دو حالت می‌شود:

$$\begin{cases} g(x)-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=x+۱ \\ g(x)-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=-x \end{cases}$$

در هر دو حالت $f+g$ را می‌سازیم:

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=(x^{۲}-x-۲)+(x+۱)=x^{۲}-۱ \quad ۱ \\ f(x)+g(x)=(x^{۲}-x-۲)+(-x)=x^{۲}-۲x-۲ \end{cases}$$

۱۸۶- گزینهٔ «۲» دامنهٔ fog دوتا شرط داشت: ۱ $x\in D_g$ و ۲ $g(x)\in D_f$

برای دامنهٔ f، زیر رادیکال را بزرگ‌تر و یا مساوی صفر قرار می‌دهیم: $۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲$

برای دامنهٔ g، عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم:

$$x^{۲}-۱۵x>۰\Rightarrow x(x-۱۵)>۰\Rightarrow x>۱۵ \text{ یا } x<۰$$

الان هر دو شرط را اعمال می‌کنیم:

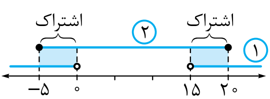
۱ $x\in D_g \Rightarrow x>۱۵$ یا $x<۰$

۲ $g(x)\in \underbrace{D_f}_{x\leq ۲}\Rightarrow \log(x^{۲}-۱۵x)\leq ۲$

$$\xrightarrow[\log ۱۰۰]{\text{جای ۲، می‌نویسیم}}\log(x^{۲}-۱۵x)\leq \log ۱۰۰\Rightarrow x^{۲}-۱۵x\leq ۱۰۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۱۵x-۱۰۰\leq ۰\Rightarrow (x-۲۰)(x+۵)\leq ۰\Rightarrow -۵\leq x\leq ۲۰$$

بین شرط (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:



$$[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$$

۱۸۷- گزینهٔ «۴» $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ یعنی $g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$.

اول باید $f^{-۱}(۸)$ را حساب کنیم. $f(x)$ را مساوی ۸ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=۸\Rightarrow \frac{۲}{۵}x-۴=۸\Rightarrow \frac{۲}{۵}x=۱۲\Rightarrow x=۳۰$$

پس $f^{-۱}(۸)=۳۰$ و $g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$ می‌شود $g^{-۱}(۳۰)$.

برای محاسبهٔ $g^{-1}(30)$، $g(x)$ را مساوی ۳۰ می‌گذاریم:

$$g(x)=30 \Rightarrow x^3+x=30 \xrightarrow{\text{گزینه‌ها}} x=3$$

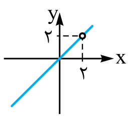
پس $g^{-1}(30)=3$.

۱۸۸- گزینهٔ «۳» تابع fof^{-1} تابع همانی بود، یعنی ضابطه‌اش $y=x$ است.
فقط حواسمان به دامنه‌اش باشد. دامنهٔ fof^{-1} همان $D_{f^{-1}}$ است که آن هم R_f می‌شود.

برد تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$، به صورت $\mathbb{R}-\{\dfrac{a}{c}\}$ است.

با توجه به نکتهٔ بالا، برد تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ به صورت $\mathbb{R}-\{2\}$ است، پس دامنهٔ f^{-1} هم $\mathbb{R}-\{2\}$ است.

در نتیجه ما باید $y=x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$ رسم کنیم:



۱۸۹- گزینهٔ «۲» برای آن‌که تابع $y=-x^2+2x+5$، ۳ واحد به راست برود، جای xها، $x-3$ قرار می‌دهیم:

$$y=-(x-3)^2+2(x-3)+5=-x^2+6x-9+2x-6+5$$

$$\Rightarrow y=-x^2+8x-10$$

ضابطه را منهای ۲ می‌کنیم تا تابع ۲ واحد به پایین برود:

$$y=(-x^2+8x-10)-2 \Rightarrow y=-x^2+8x-12$$

برای آن‌که ببینیم تابع f، کجا بالای تابع g است، باید نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ را حل کنیم.
پس این‌جا برای این‌که ببینیم f، کجا بالای $y=x$ است، باید نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$f(x)>x \Rightarrow -x^2+8x-10>x \Rightarrow x^2-7x+10<0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-5)<0 \Rightarrow 2<x<5$$

۱۹۰- گزینهٔ «۲» برای آن‌که تابع $y=|\dfrac{x}{2}|-2$، ۴ واحد به چپ برود، جای xها، $x+4$ قرار می‌دهیم:

$$y=|\frac{x+4}{2}|-2$$

حالا یک واحد به آن اضافه می‌کنیم تا تابع ۱ واحد بالا برود:

$$y=|\frac{x+4}{2}|-1$$

ضابطهٔ اولیه را با ضابطهٔ جدید مساوی قرار می‌دهیم:

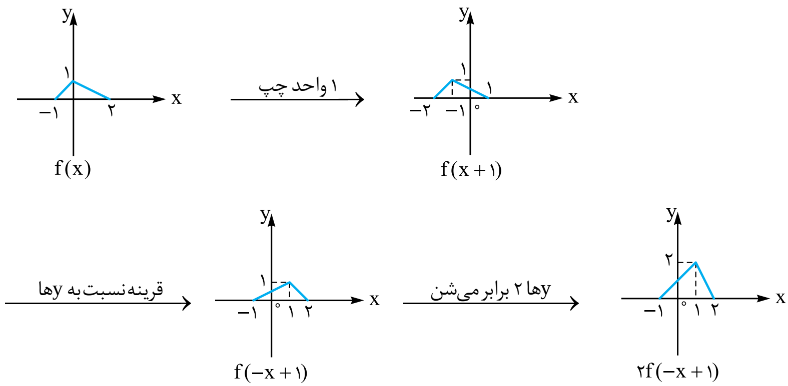
$$|\frac{x}{2}|-2=|\frac{x+4}{2}|-1$$

طرفین را ضربدر ۲ می‌کنیم:

$$|x|-4=|x+4|-2 \Rightarrow |x|-|x+4|=2$$

گزینه‌ها را چک می‌کنیم. فقط به ازای $x=-3$ جواب می‌دهد.

۱۹۱- گزینهٔ «۳» مرحله‌به‌مرحله تابع $y = \underset{\text{سوم}}{۲}\ \underset{\text{دوم}}{f(-}x+\underset{\text{اول}}{۱)}$ را رسم می‌کنیم:



۱۹۲- گزینهٔ «۲» دامنهٔ تابع $f(x)$، بازهٔ $[-۱,۳]$ است. برای به دست آوردن دامنهٔ $f(۲x+۱)$، باید $۲x+۱$ را بین -۱ و ۳ قرار دهیم:

$$-۱ \le ۲x+۱ \le ۳ \xrightarrow{-۱} -۲ \le ۲x \le ۲ \xrightarrow{\div ۲} -۱ \le x \le ۱ \Rightarrow D=[-۱,۱]$$

برد تابع $f(x)$، بازهٔ $[۰,۲]$ است. برای به دست آوردن برد $۲f(۲x+۱)-۳$، فقط عدد ۲ پشت f و عدد -۳ نقش دارند. اول دو سر بازه را در ۲ ضرب می‌کنیم: $[۰,۴]$. بعد ۳ واحد از دو سر آن کم می‌کنیم: $R=[-۳,۱]$

حالا بین دامنه و برد اشتراک می‌گیریم: $D \cap R = [-۱,۱] \cap [-۳,۱] = [-۱,۱]$

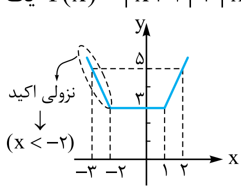
۱۹۳- گزینهٔ «۲» اگر تابع $y=x^۳$ را انتقال دهیم و نسبت به محورها قرینه کنیم، ضابطه‌اش به صورت $y=k(x-a)^۳+b$ درمی‌آید که a و b به ترتیب x و y نقطهٔ مرکز تقارن تابع هستند. در این‌جا مرکز تقارن $(۱,۲)$ است، پس a و b به ترتیب ۱ و ۲ هستند و ضابطه به شکل $y=k(x-۱)^۳+۲$ است.

ضریب k را به کمک $y=-x^۳+bx^۲+cx+d$ پیدا می‌کنیم. چون ضریب $x^۳$، -۱ است، پس k هم -۱ است، در نتیجه ضابطهٔ تابع به شکل $y=-(x-۱)^۳+۲$ درمی‌آید:

$$y=-(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+۲=-x^۳\underbrace{+۳}_{b}x^۲\underbrace{-۳}_{c}x\underbrace{+۳}_{d}$$

پس: $\dfrac{b-c}{d}=\dfrac{۳-(-۳)}{۳}=۲$

۱۹۴- گزینهٔ «۱» تابع $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ یک تابع گلدانی است. با نقطه‌یابی، آن را رسم می‌کنیم:



	کوچک‌تر	ریشه	ریشه	بزرگ‌تر
x	-۳	-۲	۱	۲
y	۵	۳	۳	۵

۱۹۵- گزینهٔ «۴» زوج‌مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$f=\{(-۱,۲m-۱),(۲,۵-m),(۴,m+۱۱)\}$$

در تابع نزولی، با افزایش xها yها کم می‌شوند، پس: $۲m-۱ > ۵-m > m+۱۱$

نامعادلهٔ بالا تبدیل به دو نامعادله می‌شود:

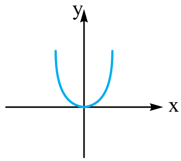
$$۲m-۱>۵-m \Rightarrow ۳m>۶ \Rightarrow m>۲$$

$$۵-m>m+۱۱ \Rightarrow -۲m>۶ \Rightarrow m<-۳$$

بین دو شرط بالا، اشتراک می‌گیریم که تهی می‌شود.

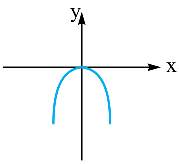
۱۹۶- گزینهٔ «۴» نمودار تمام توابع را رسم می‌کنیم:

① $y=x^۲|x|=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۰ \\ -x^۳ & x<۰ \end{cases}$



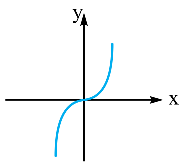
$\Rightarrow$ غیریکنوا

② $y=-x^۲|x| \Rightarrow$ شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم



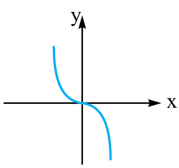
$\Rightarrow$ غیریکنوا

③ $y=x|x|=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$



$\Rightarrow$ اکیداً صعودی

④ $y=-x|x| \Rightarrow$ شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم

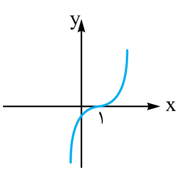


$\Rightarrow$ اکیداً نزولی

۱۹۷- گزینهٔ «۱» تابع f را ساده‌تر می‌نویسیم:

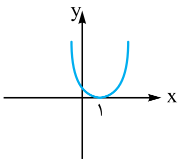
$$f(x)=(x-۱)^۲|x-۱|=|x-۱|^۲|x-۱|=|(x-۱)^۳|$$

تابع $y=x^۳$ را ۱ واحد به راست می‌بریم تا نمودار $y=(x-۱)^۳$ به دست آید:



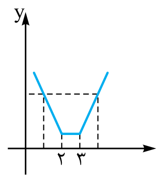
قسمت زیر محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

$$y = |(x-۱)^۳|$$



این تابع در بازهٔ $(-\infty, ۱]$ اکیداً نزولی است، پس حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۱۹۸- گزینهٔ «۱» تابع گلدانی $f(x) = |x-۲| + |x-۳|$ را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ در بازهٔ $(-\infty, ۲]$ اکیداً نزولی است.

x	۱	۲ (ریشه)	۳ (ریشه)	۴
y	۳	۱	۱	۳

به ازای $x \le ۲$، ضابطهٔ f را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x) = |x-۲| + |x-۳| = (-x+۲) + (-x+۳) = -۲x+۵$$

ضابطهٔ به دست آمده را با $g(x) = ۲x^۲ - x - ۱۰$، قطع می‌دهیم:

$$۲x^۲ - x - ۱۰ = -۲x + ۵ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow x = -۳, \frac{۵}{۲}$$

از دو عدد به دست آمده فقط $x = -۳$ در بازهٔ $(-\infty, ۲]$ قرار دارد، پس در یک نقطه متقاطع‌اند.

۱۹۹- گزینهٔ «۳» ریشه‌های قدرمطلق‌ها ۳ و ۱- هستند. تابع را سه‌ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |۲x-۶| - |x+۱| = \begin{cases} x > ۳ : ۲x - ۶ - (x+۱) = x - ۷ \\ -۱ \le x \le ۳ : (-۲x+۶) - (x+۱) = -۳x + ۵ \\ x < -۱ : (-۲x+۶) - (-x-۱) = -x + ۷ \end{cases}$$

فقط شیب ضابطهٔ $y = x - ۷$ عددی مثبت است، پس این تابع در دامنهٔ $x > ۳$ با ضابطهٔ $y = x - ۷$، تابعی صعودی است.

ضابطهٔ وارون آن را حساب می‌کنیم:

$$y = x - ۷ \xrightarrow{\text{x برحسب y}} x = y + ۷ \xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y = x + ۷$$

فقط مانده دامنهٔ $f^{-۱}$ که می‌شود برد f. از $x > ۳$، محدودهٔ $y = x - ۷$ را می‌سازیم:

$$x > ۳ \xrightarrow{-۷} x - ۷ > -۴ \Rightarrow y > -۴$$

پس ضابطهٔ وارون $y = x + ۷$ و دامنه‌اش $x > -۴$ شد.