حرکت شناسی (فصل ۱)

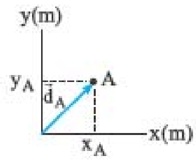
درسنامه و پاسخ

حرکت چیست؟

(درس ۱)

احتمالاً شما مفهوم حرکت را می‌دانید اما برای ورود به بحث حرکت‌شناسی باید تعریف دقیقی از حرکت داشته باشیم. به زبان ساده هر وقت جسمی **«تغییر مکان»** بدهد، حرکت کرده است. پس اول باید بدانیم منظور ما از «مکان» چیست.

بردار مکان



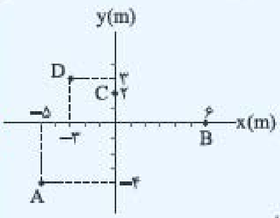
مکان یعنی موقعیتی که جسم در آن قرار دارد که در فیزیک آن را با یک بردار نشان می‌دهیم. در واقع **بردار مکان**، برداری است که مبدأ مکان (یا مبدأ مختصات) را به محل جسم وصل می‌کند.

پس برای این‌که بردار مکان را بکشیم، اول باید محورهای مختصات (مانند محورهای x و y) را رسم کنیم و بعد، از مبدأ مکان (یا مبدأ مختصات) بردار مکان را به محل جسم وصل کنیم.

مثلاً در شکل روبه‌رو، بردار مکان نقطهٔ A را با $\vec{d}_A$ نشان داده‌ایم که $\vec{d}_A$ برابر است با: $\vec{d}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$

(طول نقطهٔ A ضریب $\vec{i}$ و عرض نقطهٔ A ضریب $\vec{j}$ است.)

تست **با توجه به شکل روبه‌رو، کدام‌یک از گزینه‌های زیر بردار مکان نقطهٔ موردنظر را درست بیان نکرده است؟ (همهٔ مقدارها برحسب متر هستند.)**



۱) $\vec{d}_A = -5\vec{i} - 4\vec{j}$
۲) $\vec{d}_B = 6\vec{i}$
۳) $\vec{d}_C = 2\vec{j}$
۴) $\vec{d}_D = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

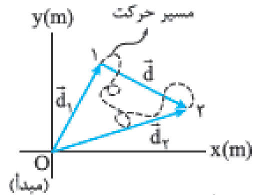
پاسخ **گزینهٔ ۴** گفتیم مؤلفهٔ محور x ضریب $\vec{i}$ و مؤلفهٔ محور y ضریب $\vec{j}$ است؛ پس بردار مکان نقطهٔ D برابر است با:

$$\vec{d}_D = x_D\vec{i} + y_D\vec{j} \xrightarrow{x_D=-3,\ y_D=3} \vec{d}_D = -3\vec{i} + 3\vec{j}$$

اگر حرکت جسم، راست‌خط باشد (یعنی جسم در راستای خط راست حرکت کند)، کافی است یک محور (مانند محور x) رسم کنیم و یک نقطه را به عنوان مبدأ ($x = 0$) انتخاب کنیم. بدیهی است که این محور باید منطبق بر مسیر حرکت جسم باشد.

جابه‌جایی (تغییر مکان)

بد نیست یکم از سطح کتاب درسی بالاتر بریم و مفهوم جابه‌جایی رو از جابه‌جایی در صفحه شروع کنیم.



هر وقت بردار مکان یک جسم تغییر کند، می‌گوییم آن جسم **«جابه‌جا»** شده است. در این صورت به برداری که مکان آغاز حرکت را به مکان پایان حرکت وصل می‌کند، **«بردار جابه‌جایی»** یا **«بردار تغییر مکان»** می‌گوییم و آن را با نماد $\vec{d}$ نشان می‌دهیم. در شکل روبه‌رو نقطهٔ (۱) مکان آغاز حرکت و نقطهٔ (۲) مکان پایان حرکت است.[1] در این شکل به سه چیز توجه کنید:

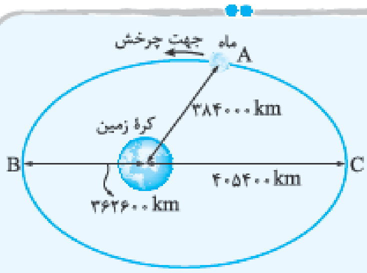
۱. نقطه‌های (۱) و (۲) نقطه‌های آغاز و پایان حرکت‌اند. نقطهٔ آغاز را با بردار $\vec{d}_1$ (مکان اولیه) و نقطهٔ پایان را با بردار $\vec{d}_2$ (مکان نهایی) نشان می‌دهیم.

۲. خط‌چین، مسیر حرکت جسم را نشان می‌دهد.

۳. بردار $\vec{d}$ همان بردار جابه‌جایی یا بردار تغییر مکان است.

حواستون باشه! جابه‌جایی اصلاً به مسیر حرکت ربطی ندارد و فقط نقطهٔ ابتدا را به نقطهٔ انتهای حرکت وصل می‌کند؛ یعنی چیزی که برای ما اهمیت دارد نقطهٔ اولیه و پایانی است.

تست **مطابق شکل مدار چرخش ماه به دور زمین، یک بیضی است. با توجه به این شکل، اندازهٔ بزرگ‌ترین جابه‌جایی که ماه نسبت به کرهٔ زمین دارد، چند کیلومتر است؟**



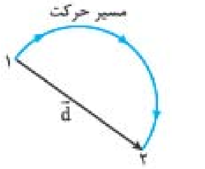
۱) ۸۱۰۸۰۰
۲) ۷۸۹۴۰۰
۳) ۷۶۸۰۰۰
۴) ۴۰۵۴۰۰

پاسخ **گزینهٔ ۳** واضح است که بزرگ‌ترین جابه‌جایی که ماه می‌تواند داشته باشد، از نقطهٔ B تا C یا C تا B است، پس قطر بزرگ بیضی (یعنی طول BC) جواب این مسئله است: $BC = 362600 + 405400 = 768000\ km$

حواستون باشه! در صورت سؤال گفتیم **«جابه‌جایی ماه نسبت به کرهٔ زمین»** یعنی کرهٔ زمین را مبدأ بگیرید و در نتیجه با حرکت ماه در اثر حرکت انتقالی زمین به دور خورشید کاری نداریم.

[1] منظور از مکان آغاز و پایان حرکت، مکان متحرک در لحظهٔ ابتدایی و پایانی بازهٔ زمانی موردنظر ما است؛ یعنی ممکن است متحرک قبل و بعد از آن بازهٔ زمانی هم در حال حرکت باشد ولی موردنظر ما نیست.

تفاوت مسافت پیموده‌شده (l) و جابه‌جایی (d)



به طول مسیری که متحرک می‌پیماید، **مسافت** می‌گوییم و آن را با حرف l نشان می‌دهیم. مثلاً در شکل روبه‌رو، متحرکی بر روی مسیر دایره‌ای‌شکل به شعاع $۱\ m$ حرکت می‌کند. اگر نقطه‌های (۱) و (۲) را ابتدا و انتهای حرکت در نظر بگیریم، مسیر حرکت یک نیم‌دایره است که طول آن برابر می‌شود با: $l = \frac{۱}{۲}(\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \pi r = ۳/۱۴ \times ۱ = ۳/۱۴\ m$ = طول مسیر حرکت

پس طول مسیر حرکت یا مسافتی که این متحرک پیموده، برابر $۳/۱۴\ m$ است، اما اندازهٔ بردار جابه‌جایی ($\vec{d}$) برابر قطر دایره است، یعنی: $d = ۲r = ۲ \times ۱ = ۲\ m$

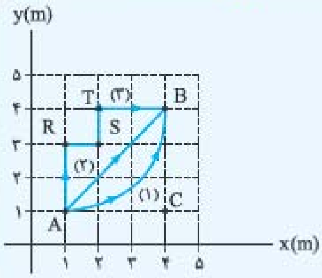
نتیجه این‌که: **«مسافت کاملاً به مسیر حرکت بستگی دارد ولی جابه‌جایی فقط به نقطهٔ آغاز و پایان وابسته است.»**

چندنکته

۱) جابه‌جایی یک کمیت برداری است ولی مسافت یک کمیت نرده‌ای (اسکالر) است.

۲) مقدار جابه‌جایی همیشه کم‌تر یا مساوی مسافت است: $l \geq d$

تست **سه متحرک طی مسیرهای مختلف نشان داده شده در شکل روبه‌رو از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌روند. اختلاف مسافت طولانی‌ترین مسیر و کوتاه‌ترین مسیر و اندازهٔ جابه‌جایی هر یک چند متر است؟ (مسیر (۱) یک ربع دایره است، $\sqrt{۲} = ۱/۴$ ، $\pi = ۳/۱۴$)**



۱) ۴/۲ , ۱/۸

۲) ۴/۷ , ۱/۸

۳) ۴/۲ , ۰/۵

۴) ۴/۷ , ۰/۵

پاسخ **گزینهٔ ۱** متحرک (۱) مسیری به شکل ربع دایره را طی کرده است. با توجه به شکل شعاع این دایره $۳\ m$ است. مسافتی که متحرک (۱) طی کرده، برابر است با:

$$l_۱ = \frac{۱}{۴}(\text{محیط دایره}) = \frac{\pi r}{۲} = \frac{\pi \times ۳}{۲} = \frac{۳/۱۴ \times ۳}{۲} \simeq ۴/۷\ m$$

متحرک (۲) پاره‌خط AB را طی کرده است؛ داریم:

$$l_۲ = \overline{AB} = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = ۳\sqrt{۲}\ m = ۳ \times ۱/۴ = ۴/۲\ m$$

طول پاره‌خط AB را طبق قضیهٔ فیثاغورس $\sqrt{\overline{AC}^۲ + \overline{BC}^۲}$ محاسبه کردیم. متحرک (۳) هم مسافتی برابر با $۶\ m$ را طی می‌کند:

$$l_۳ = \overline{AR} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TB} = ۲ + ۱ + ۱ + ۲ = ۶\ m$$

همین‌طور که می‌بینید طولانی‌ترین مسیر، مسیر (۳) و کوتاه‌ترین مسیر، مسیر (۲) است و اختلاف طولانی‌ترین و کوتاه‌ترین مسیر برابر می‌شود با:

$$l_۳ - l_۲ = ۶ - ۴/۲ = ۱/۸\ m$$

و اما جابه‌جایی!

بردار جابه‌جایی هر سه متحرک برابر است با:

$$\vec{d}_{AB} = \vec{d}_B - \vec{d}_A = (۴,۴) - (۱,۱) = ۳\vec{i} + ۳\vec{j}$$

و اندازهٔ آن برابر است با:

$$|\vec{d}_{AB}| = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = ۳\sqrt{۲}\ m = ۳ \times ۱/۴ = ۴/۲\ m$$

اندازهٔ بردار جابه‌جایی ($|\vec{d}_{AB}|$) تنها وقتی با مسافت (l) برابر است که مسیر حرکت پاره‌خطی باشد که نقطهٔ ابتدای حرکت را به انتهای آن وصل کند. در تست قبل، مسافت مسیر (۲)، برابر اندازهٔ جابه‌جایی هر سه مسیر است.

لحظه، بازهٔ زمانی و نمایش آن‌ها بر روی محور زمان

(الف)

بالأخره هر تغییری، مدت‌زمانی طول می‌کشد. پس زمان، کمیت مهمی است. یکی از روش‌های نمایش زمان، رسم محور زمان است. (شکل الف) جهت مثبت این محور، سپری‌شدن زمان را نشان می‌دهد.

(ب)

نمایش لحظه برروی محور زمان: یک **لحظه** را بر روی محور زمان با یک **نقطه** نشان می‌دهیم. در شکل (ب) لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را مشخص کرده‌ایم.

حواستون‌باشه! *وقتی می‌گیم $t_۱ = ۳\ s$ یعنی یک نقطه روی محور زمان که لحظهٔ $۳\ s$ رو نشون می‌ده. (نگه فکر کنین $t_۱ = ۳\ s$، $۳\ s$ طول کشیده‌ها.) در ضمن مبدأ زمان هم خودش به لحظه است؛ لحظهٔ $t_۰ = ۰$.*

نمایش بازهٔ زمانی بر روی محور زمان: فاصلهٔ زمانی بین دو لحظه را **بازهٔ زمانی** می‌گوییم.

(پ)

مثلاً در شکل (پ)، Δt، بازهٔ زمانی بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ است و برابر است با: $\Delta t = t_۲ - t_۱$

◀ بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ را به صورت $(t_۱ , t_۲)$ هم نشان می‌دهیم. مثلاً وقتی می‌گوییم $(۳\ s , ۱۹\ s)$ یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\ s$ تا $t_۲ = ۱۹\ s$.

حواستون‌باشه! گفتیم جهت مثبت زمان، سپری‌شدن زمان را نشان می‌دهد، پس همیشه بازهٔ زمانی، عددی مثبت است: $\Delta t > ۰$.

مفهوم لحظه: در واقع لحظه، یک بازهٔ زمانی خیلی خیلی خیلی کوچک است.

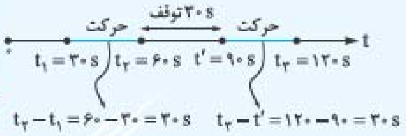
◀ همین‌طور که می‌دانید، ثانیه (s) یکای زمان در SI است. میلی‌ثانیه (ms)، دقیقه (min)، ساعت (h)، روز (day) و ... یکاهای دیگر زمان هستند.

$۱\ h = ۳۶۰۰\ s \quad ; \quad ۱\ min = ۶۰\ s$

حواستون‌باشه! *سال نوری واحد طوله نه واحد زمان!*

تست شخصی حرکت خود را در لحظهٔ $t_1 = 30\,s$ شروع می‌کند و در لحظهٔ $t_2 = 60\,s$ می‌ایستد و پس از $30\,s$ توقف به حرکت خود ادامه می‌دهد. در لحظهٔ $t_3 = 120\,s$ به مقصد می‌رسد. این شخص در مجموع چند ثانیه در حال حرکت بوده است؟

۱) ۳۰　　۲) ۶۰　　۳) ۹۰　　۴) ۱۲۰



پاسخ **گزینهٔ ۲** به محور روبه‌رو نگاه کنید. زمان حرکت این شخص را بر روی محور زمان معلوم کرده‌ایم. این شخص $30\,s$ از t_1 تا t_2 و $30\,s$ هم از t' تا t_3 حرکت کرده است؛ پس در مجموع $60\,s$ حرکت کرده است.

جدول اصطلاحات زمان

اصطلاح	نمایش بر روی محور زمان	توضیح
لحظهٔ $t = 2\,s$	۰ ۱ ۲ t	لحظهٔ $t = 2\,s$ تنها یک نقطه از محور t است.
ثانیهٔ دوم	۰ ۱ ۲ t	یعنی یک بازهٔ زمانی از لحظهٔ $t = 1\,s$ تا لحظهٔ $t = 2\,s$
ابتدای ثانیهٔ دوم حرکت انتهای ثانیهٔ دوم حرکت	ابتدا انتها ۰ ۱ ۲ ۳ t ثانیهٔ دوم	یعنی لحظهٔ $t = 1\,s$ یعنی لحظهٔ $t = 2\,s$
ثانیهٔ nاُم	۰ $n-1$ n	یعنی بازهٔ زمانی از لحظهٔ $n-1\,(s)$ تا $n\,(s)$
۲ ثانیهٔ اول	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ t	یعنی بازهٔ زمانی از لحظهٔ $t_0 = 0$ تا لحظهٔ $t_1 = 2\,s$
۲ ثانیهٔ دوم	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ t	یعنی بازهٔ زمانی از لحظهٔ $t_1 = 2\,s$ تا لحظهٔ $t_2 = 4\,s$
۲ ثانیهٔ nاُم	۰ $2n-2$ $2n$ t	یعنی بازهٔ زمانی از لحظهٔ $(2n-2)\,(s)$ تا $2n(s)$
m ثانیهٔ اول	۰ m $2m$ t	یعنی بازهٔ زمانی از لحظهٔ ۰ تا لحظهٔ $m\,(s)$
m ثانیهٔ دوم	۰ m $2m$ t	یعنی بازهٔ زمانی از لحظهٔ $m\,(s)$ تا لحظهٔ $2m\,(s)$
m ثانیهٔ nاُم	۰ $(n-1)\,m$ nm t	یعنی بازهٔ زمانی از لحظهٔ $(n-1)\,m\,(s)$ تا لحظهٔ $nm\,(s)$

تست ثانیهٔ پنجم در کدام‌یک از بازه‌های زمانی زیر قرار دارد؟

(الف) $t = 5\,s$　　(ب) $(0/9\,s, 10/9\,s)$　　(پ) ۳ ثانیهٔ دوم　　(ت) ۲ ثانیهٔ چهارم

۱) (الف) و (ب)　　۲) (ب) و (پ)　　۳) (پ) و (ت)　　۴) (الف) و (پ)

پاسخ **گزینهٔ ۲** ثانیهٔ پنجم یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = 4\,s$ تا $t_2 = 5\,s$ یا $(4\,s, 5\,s)$. حالا حالت‌های (الف) تا (ت) را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

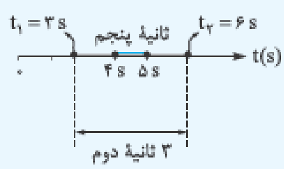
(الف) لحظهٔ $t = 5\,s$ فقط یک لحظه است و قبل و بعد ندارد. می‌دانید که ثانیهٔ پنجم (که خودش یک بازهٔ زمانی است) در یک لحظه نمی‌گنجد!

(الف)

(ب) $(0/9\,s, 10/9\,s)$ یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = 0/9\,s$ تا $t_2 = 10/9\,s$. همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، ثانیهٔ پنجم در بازهٔ $(0/9\,s, 10/9\,s)$ قرار دارد.

(ب)

(پ) ۳ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = 3\,s$ تا $t_2 = 6\,s$. همین‌طور که در شکل (پ) می‌بینید ثانیهٔ پنجم در ۳ ثانیهٔ دوم قرار دارد.



(پ)

(ت) ۲ ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = 6\,s$ تا $t_2 = 8\,s$ و ثانیهٔ پنجم در این بازه قرار ندارد. (شکل ت)

(ت)

۱- گزینهٔ ۱ **بررسی سایر گزینه‌ها:**

(۲) بردار جابه‌جایی، برداری است که مکان آغازین را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند. (**حواستون باشه!** *اگه متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت نکرده باشه، مکان اولیه دیگه، مبدأ مکان نیست.*)

(۳) جابه‌جایی یک متحرک به مسیر حرکت وابسته نیست. مثلاً در شکل زیر متحرک از هر کدام از مسیرها از نقطهٔ A به B برود، جابه‌جایی یکسان است:

(۴) جابه‌جایی یک کمیت برداری است.

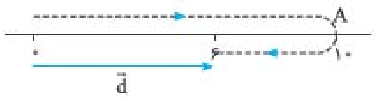
۲- گزینهٔ ۲ وقتی مسیر حرکت خط راست باشد، جابه‌جایی حتماً در راستای مسیر حرکت خواهد بود. در شکل (۲) متحرک روی یک خط راست که نسبت به محور x مایل است، حرکت می‌کند.

۳- گزینهٔ ۴ هیچ‌کدام از عبارت‌ها درست نیست. به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) در یک حرکت رفت و برگشت اندازهٔ جابه‌جایی صفر است و عملاً نسبت مسافت طی‌شده به اندازهٔ جابه‌جایی $(\frac{l}{d})$ تعریف نشده است.

ب) اندازهٔ جابه‌جایی برابر اندازهٔ تفاضل بردارهای مکان نهایی و ابتدایی یعنی $|\vec{d}_۲ - \vec{d}_۱|$ است. این مقدار ($|\vec{d}_۲ - \vec{d}_۱|$) فقط در حالت خاص و نه همیشه با تفاضل اندازه‌ها یعنی $|\vec{d}_۲| - |\vec{d}_۱|$ برابر است. این حالت خاص فقط زمانی رخ می‌دهد که دو بردار **هم‌جهت** باشند.

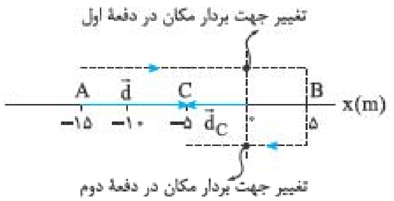
پ) وقتی در حرکت تغییر جهت داریم، مسافت و جابه‌جایی با هم برابر نمی‌شوند. مثلاً در شکل زیر متحرک روی خط راست تا نقطهٔ A می‌رود و سپس برمی‌گردد. در این حالت مسافت طی‌شده برابر ۱۴ m و اندازهٔ جابه‌جایی برابر ۶ m است.



۴- گزینهٔ ۳ اندازهٔ بردار مکان در ابتدای حرکت $|\vec{d}_A| = ۲۰\,m$ و در انتهای حرکت $|\vec{d}_B| = ۱۵\,m$ است. از طرفی متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؛ پس اندازهٔ بردار مکان همواره در حال کاهش است.

۵- گزینهٔ ۲ عبارت‌های پ و ت درست هستند. به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) جهت بردار مکان، زمانی عوض می‌شود که متحرک از مبدأ عبور کند و از یک طرف آن به طرف دیگر برود. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، متحرک دو بار از مبدأ عبور کرده است؛ بنابراین دو بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد (نادرست‌بودن عبارت الف).



ب) متحرک در انتهای حرکت در نقطهٔ C قرار می‌گیرد؛ پس مطابق شکل روبه‌رو جهت بردار مکان نهایی در خلاف جهت محور x است $\vec{d}_C = (-۵m\,\vec{i})$ و از طرفی متحرک به مقدار $\vec{d} = (۱۰\,m\vec{i})$ جابه‌جا می‌شود. پس بردار جابه‌جایی در جهت محور x و در خلاف جهت بردار مکان نهایی است (نادرست‌بودن عبارت «ب»).

پ) متحرک از B تا C در خلاف جهت محور x حرکت کرده است و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\vec{d}_{BC} = \vec{d}_C - \vec{d}_B = (-۵\vec{i} - (۵\vec{i}))m = (-۱۰\vec{i})m \Rightarrow d_{BC} = ۱۰\,m$$

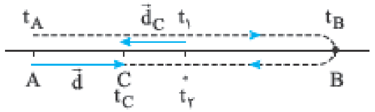
(درست‌بودن عبارت «پ»)

ت) مسافت پیموده‌شده برابر مجموع اندازهٔ جابه‌جایی‌ها از A تا B و B تا C است: $l = d_{AB} + d_{BC} = |۵ - (-۱۵)| + |-۵ - ۵| = ۲۰ + ۱۰ = ۳۰\,m$

پس با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی برابر $d = ۱۰\,m$ است، داریم: $\frac{l}{d} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳$

(درست‌بودن عبارت «ت»)

۶- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم در ابتدا متحرک در قسمت منفی محور قرار دارد؛ پس متحرک به صورت زیر حرکت می‌کند. $\vec{d}_C$ بردار مکان نهایی و $\vec{d}$ بردار جابه‌جایی است:



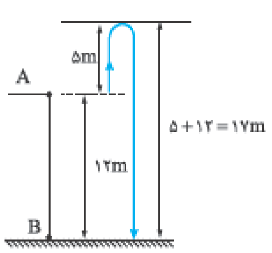
همان‌طور که می‌بینید متحرک دو بار از مبدأ مکان عبور می‌کند که به معنی ۲ بار تغییرکردن جهت بردار مکان است. بردار مکان متحرک در بازهٔ $(t_A, t_۱)$ در جهت منفی محور x بوده است و سپس در بازهٔ $(t_۱, t_۲)$ در جهت محور بوده و پس از آن دوباره در بازهٔ $(t_۲, t_C)$ در خلاف جهت محور بوده است. (رد (۲) و (۴))

از طرفی با توجه به شکل دو بردار $\vec{d}_C$ و $\vec{d}$ در خلاف جهت هم هستند که بیانگر نادرست‌بودن (۱) است؛ پس پاسخ (۳) است.

اگر فرض اولیه را هم تغییر دهیم و بگوییم متحرک در ابتدا در قسمت مثبت محور است هم به همین گزینه می‌رسیم که بررسی آن را به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم.

۷- گزینهٔ ۳ به شکل روبه‌رو توجه کنید. توپ از نقطهٔ A حرکت کرده، در نهایت به نقطهٔ B رسیده است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی ۱۲ m است. اما در مورد مسافت قضیه فرق می‌کند. مطابق شکل توپ ۵ m بالا می‌رود و ۱۷ m پایین می‌آید:

$$\text{مسافت پیموده‌شده} = ۵ + (۵ + ۱۲) = ۲۲\,m$$



۸- گزینهٔ ۲ بردار جابه‌جایی کل حرکت برابر با جمع برداری جابه‌جایی‌هایی است که متحرک انجام می‌دهد: $\vec{d} = \vec{d}_۱ + \vec{d}_۲ = ۳\vec{j} + (-۴\vec{j}) = -۱\vec{j} = -\vec{j}$

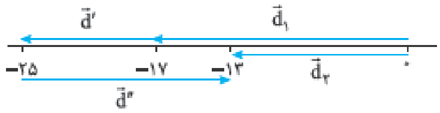
۹- گزینهٔ ۱ **گام اول:** جابه‌جایی‌ها را در هر مرحله مشخص می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: به اندازهٔ ۸ m **در خلاف جهت محور** x ⟵ $\vec{d}' = (-۸\,m)\vec{i}$ **مرحلهٔ دوم:** به اندازهٔ ۱۲ m **در جهت محور** x ⟵ $\vec{d}' = (۱۲\,m)\vec{i}$

گام دوم: بردار مکان نهایی $(\vec{d}_2)$ در SI به صورت زیر به دست می‌آید:

در شکل روبه‌رو هم این موضوع را بهتر می‌بینید:

$$\vec{d}_2 = \vec{d}_1 + \vec{d}' + \vec{d}'' = -17\vec{i} + (-8\vec{i}) + 12\vec{i} = -13\vec{i}$$



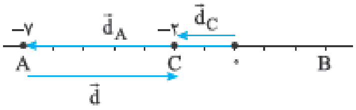
گام سوم: بردار جابه‌جایی برابر با جمع برداری جابه‌جایی‌های متوالی است؛ بنابراین برحسب متر داریم:

$$\vec{d} = \vec{d}' + \vec{d}'' = (-8\vec{i}) + (12\vec{i}) = 4\vec{i}$$

گام چهارم: مسافت طی‌شده برابر مجموع **اندازهٔ** جابه‌جایی‌های متوالی است:

$$\begin{cases} d' = 8\,m \\ d'' = 12\,m \end{cases} \Rightarrow l = d' + d'' = 8 + 12 = 20\,m$$

۱۰- **گزینهٔ ۳** بردار مکان اولیه را با $\vec{d}_A$ نشان می‌دهیم که از مبدأ به مکان اولیه وصل می‌شود. به همین ترتیب و با توجه به این‌که متحرک در انتهای حرکت در نقطهٔ C قرار دارد، بردار مکان نهایی را با $\vec{d}_C$ نشان می‌دهیم. بردار جابه‌جایی هم برداری است که مکان اولیه را به مکان نهایی وصل می‌کند که آن را با $\vec{d}$ نشان می‌دهیم:



بردار مکان اولیه: $\vec{d}_A = -7\vec{i}$

بردار مکان نهایی: $\vec{d}_C = -2\vec{i}$

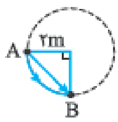
بردار جابه‌جایی: $\vec{d}_C - \vec{d}_A = -2\vec{i} - (-7\vec{i}) = 5\vec{i}$

۱۱- **گزینهٔ ۱** مسافت پیموده‌شده طول مسیر AB است. این مسیر ربع دایره‌ای به شعاع ۲ m است:

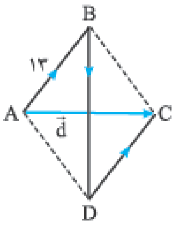
$$\text{مسافت پیموده‌شده} = \frac{\text{محیط دایره}}{4} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi(2)}{4} = \pi\,m$$

اندازهٔ جابه‌جایی برابر طول برداری است که A را به B وصل می‌کند. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، این بردار وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با ساق‌هایی به طول ۲ m است:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\,m$$

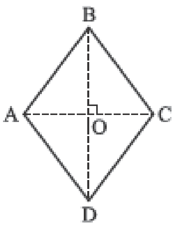


۱۲- **گزینهٔ ۲** **گام اول:** متحرک مسافت $l_{AB} + l_{BD} + l_{DC} = 50\,m$ را طی کرده است. با توجه به این‌که در لوزی ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است، مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$l_{AB} + l_{BD} + l_{DC} = 50\,m \Rightarrow 13 + l_{BD} + 13 = 50 \Rightarrow l_{BD} = 50 - 26 = 24\,m$$

گام دوم: در لوزی قطرها بر هم عمود هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس:



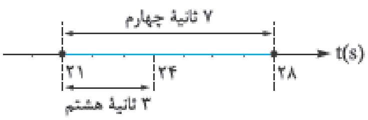
$$\left.\begin{matrix} OB = 12 \\ AB = 13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 13^2 = OA^2 + 12^2 \Rightarrow OA^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow OA = 5\,m$$

گام سوم: همان‌طور که در شکل گام اول دیدید، اندازهٔ جابه‌جایی برابر اندازهٔ قطر کوچک است:

$$d = 2OA = 2 \times 5 = 10\,m$$

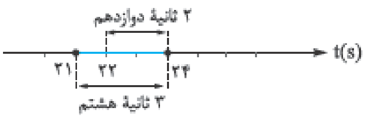
۱۳- **گزینهٔ ۱** ۳ ثانیهٔ هشتم یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = (8-1) \times 3 = 21\,s$ تا $t_2 = 8 \times 3 = 24\,s$ یا $(21\,s, 24\,s)$. حالا بازه‌های زمانی «الف» تا «ت» را با ۳ ثانیهٔ هشتم مقایسه می‌کنیم:

الف) ۷ ثانیهٔ چهارم یعنی $t_1 = (4-1) \times 7 = 21\,s$ تا $t_2 = 4 \times 7 = 28\,s$ یا $(21\,s, 28\,s)$. همین‌طور که در شکل (الف) می‌بینید ۳ ثانیهٔ هشتم در ۷ ثانیهٔ چهارم قرار دارد.



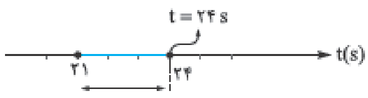
(الف)

ب) ۲ ثانیهٔ دوازدهم یعنی $t_1 = (12-1) \times 2 = 22\,s$ تا $t_2 = 12 \times 2 = 24\,s$ یا $(22\,s, 24\,s)$. در شکل (ب) نشان داده‌ایم که ۳ ثانیهٔ هشتم از بازهٔ ۲ثانیهٔ دوازدهم بزرگ‌تر است (در کل هر ۳ ثانیه‌ای از هر ۲ ثانیه‌ای بزرگ‌تر است!)



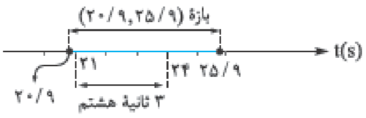
(ب)

پ) $t = 24\,s$ فقط یک لحظه است و هیچ بازهٔ زمانی‌ای در یک لحظه جا نمی‌شود! (شکل پ)



(پ)

ت) بازهٔ $20/9\,s$ تا $25/9\,s$ را بر روی محور ببینید (شکل ت). ۳ ثانیهٔ هشتم در داخل این بازه قرار دارد.

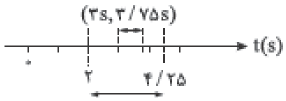


(ت)

۱۴- گزینهٔ ۲ پنجمین بازهٔ ۰/۷۵ ثانیه‌ای یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = (5-1)\times 0/75 = 3\,s$ تا $t_2 = 5\times 0/75 = 3/75\,s$ که همان $(3s\,,3/75s)$ است.

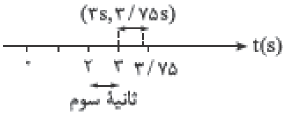
حالا بازهٔ زمانی ۱ تا ۴ را با این بازهٔ زمانی مقایسه می‌کنیم.

۱ همان‌طور که در شکل (الف) می‌بینید، بازهٔ زمانی $(3s\,,3/75\,s)$ در بازهٔ زمانی $(2\,s\,,4/25\,s)$ قرار دارد.



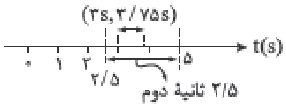
(الف)

۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی $(2s\,,3\,s)$. در شکل (ب) مشاهده می‌کنید که بازهٔ زمانی $(3s\,,3/75\,s)$ در این بازهٔ زمانی قرار ندارد.



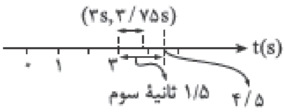
(ب)

۳ ۲/۵ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1 = (2-1)\times 2/5 = 2/5\,s$ و $t_2 = 2\times 2/5 = 5s$. همان‌طور که شکل (پ) نشان می‌دهد، بازهٔ زمانی $(3s\,,3/75s)$ در این بازه قرار دارد.



(پ)

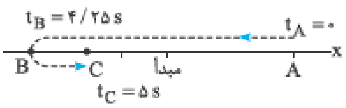
۴ ۱/۵ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1 = (3-1)\times 1/5 = 3\,s$ و $t_2 = 3\times 1/5 = 4/5\,s$. در شکل (ت) نشان می‌دهیم که بازهٔ زمانی $(3s\,,3/75s)$ در این بازهٔ زمانی قرار دارد.



(ت)

۱۵- گزینهٔ ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

لحظه (s)	۰	۲/۲۵	۲/۵	۳/۲۵	۴/۲۵	۵
مکان (m)	۵	۰	−۱	−۴	−۵	−۳



۱ ۲/۵ ثانیهٔ دوم یعنی از $t = 2/5\,s$ تا $t = 5\,s$. با توجه به شکل بالا می‌بینیم که متحرک در $t = 4/25\,s$ تغییر جهت می‌دهد. از آن‌جا که این لحظه در بازهٔ زمانی ۲/۵ ثانیهٔ دوم است، این گزینه درست است.

یادآوری: شاید بپرسید که بازه‌های زمانی مثل ۲/۵ ثانیهٔ دوم را چه‌طور تعیین کنیم؟ ما هم می‌گوییم به کمک عبارت m ثانیهٔ nاُم که در درس‌نامه خوانده‌اید. در درس‌نامه دیدید که m ثانیهٔ nاُم یعنی بازهٔ زمانی‌ای که از لحظهٔ $(n-1)m$ ثانیه شروع می‌شود و تا لحظهٔ nm ثانیه ادامه دارد. این‌جا $m = 2/5$ و $n = 2$ است و داریم: $t_1 = (2-1)(2/5\,s) = 2/5\,s$ $\quad t_2 = (2)(2/5\,s) = 5\,s$

۲ ۰/۵ ثانیهٔ پنجم یعنی بازهٔ $(2\,s\,,2/5\,s)$. **بردار مکان** در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ عبور می‌کند. همان‌طور که در جدول بالا می‌بینید متحرک در $t = 2/25\,s$ از مبدأ عبور می‌کند که این لحظه در بازهٔ ۰/۵ ثانیهٔ پنجم (یعنی $(2\,s\,,2/5\,s)$) قرار دارد.

۳ بردار جابه‌جایی در ۲/۵ ثانیهٔ اول برابر است با: $\vec{d}' = \vec{d}_{2/5} - \vec{d}_0 = (-1\vec{i}) - (5\vec{i}) = -6\vec{i}$

بردار مکان در لحظهٔ $t = 2\,s$ را نمی‌دانیم ولی به کمک جهت و شکل بالا می‌فهمیم که بردار مکان در تمام لحظه‌های قبل از $t = 2/25\,s$ مثبت است.

۴ ۱/۵ ثانیهٔ آخر حرکت یعنی از $t = 3/5\,s$ تا $t = 5\,s$؛ متحرک در این بازهٔ زمانی از مکانی بین $-4\,m$ و $-5\,m$ حرکت کرده است و در نهایت به مکان $-3\,m$ می‌رود؛ پس جابه‌جایی‌اش مثبت است.

درس ۲
سرعت متوسط و تندی متوسط

سرعت و تندی تلفیق کمیت‌های جابه‌جایی و مسافت با زمان است.

اگر Δt بازهٔ زمانی حرکت باشد، سرعت متوسط و تندی متوسط به صورت زیر تعریف می‌شوند[1]:

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

یکای سرعت و تندی در SI، متر بر ثانیه (m/s) است.

تفاوت سرعت و تندی مثل تفاوت جابه‌جایی و مسافت است.

۱- av همه‌جا اختصار واژهٔ average به معنی متوسط است.

چندنکته

۱) سرعت یک کمیت برداری و تندی یک کمیت نرده‌ای است.

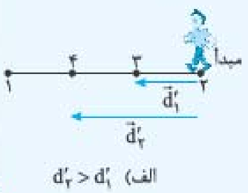
۲) اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا مساوی تندی متوسط است: $v_{av} \le s_{av}$.

حتماً می‌دانید که اگر مسیر حرکت مستقیم باشد و جهت حرکت تغییر نکند، اندازهٔ سرعت متوسط مساوی تندی متوسط می‌شود.

تست **شخصی در حال پیاده‌روی در یک مسیر مستقیم است. این شخص مطابق شکل روبه‌رو از مکان (۱) شروع به حرکت کرده و پس از رسیدن به مکان (۲) از همان مسیر برمی‌گردد. در مسیر بازگشت، اندازهٔ کدام‌یک از کمیت‌های زیر الزاماً در حال کم‌شدن است؟**

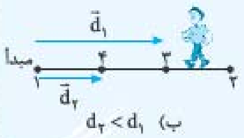
۱) تندی متوسطِ مسیر بازگشت ۲) تندی متوسط کل مسیر ۳) سرعت متوسطِ مسیر بازگشت ۴) سرعت متوسطِ کل مسیر

پاسخ **گزینهٔ ۴** **گام اول:** تندی متوسط با فرمول $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ تغییر می‌کند. چه در مسیر برگشت و چه در کل مسیر، مسافت (l) و بازهٔ زمانی حرکت (Δt) هر دو در حال افزایش‌اند. اما این‌که نسبت $\frac{l}{\Delta t}$ چه‌طور تغییر می‌کند، بسته به شرایط متفاوت است. (پس تا این‌جا ۱ و ۲ نادرست‌اند.)



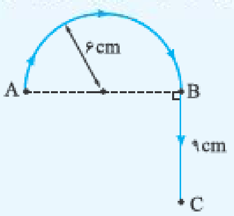
گام دوم: اندازهٔ سرعت متوسط از فرمول $v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$ حساب می‌شود؛ یعنی تغییر v_{av} به دو کمیت مقدار جابه‌جایی (d) و زمان حرکت (Δt) بستگی دارد. اگر مقدار سرعت متوسط را فقط برای مسیر بازگشت بخواهیم، نقطهٔ (۲) مبدأ حرکت محسوب می‌شود و با حرکت شخص به طرف نقطهٔ (۱) اندازهٔ جابه‌جایی (d) لحظه به لحظه زیاد می‌شود (شکل الف)؛ پس:

در این حالت، هم d در حال زیادشدن است و هم Δt و این‌جا هم نمی‌توانیم بگوییم که نسبت $\frac{d}{\Delta t}$ در حال زیادشدن است یا کم‌شدن. (۳ هم مرخصه.)



گام سوم: به شکل (ب) نگاه کنید. اگر بخواهیم کل حرکت را بررسی کنیم، باید نقطهٔ (۱) را مبدأ فرض کنیم. در این صورت با گذشت زمان (افزایش Δt) و نزدیک‌شدن شخص به نقطهٔ (۱)، مقدار جابه‌جایی کل ($d_{کل}$) در حال کم‌شدن است؛ پس مقدار سرعت متوسط کل مسیر (یعنی $\frac{d_{کل}}{\Delta t}$) در هنگام بازگشت شخص الزاماً در حال کم‌شدن است.

تست **مطابق شکل روبه‌رو مورچه‌ای در مدت Δt ابتدا مسیر نیم‌دایرهٔ AB به شعاع ۶ cm و سپس در همان مدت مسیر مستقیم BC به طول ۹ cm را می‌پیماید. اگر تندی متوسط مورچه در مسیر نیم‌دایره ۳ cm / s باشد، تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسطش در کل مسیر به ترتیب از راست به چپ، چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ ($\pi \simeq 3$)**



۱) ۱/۲۵ ـ ۲/۲۵

۲) ۲/۲۵ ـ ۱/۲۵

۳) ۱/۷۵ ـ ۲/۲۵

۴) ۱/۲۵ ـ ۱/۷۵

پاسخ **گزینهٔ ۱** **گام اول:** برای محاسبهٔ Δt، تندی متوسط در مسیر نیم‌دایرهٔ AB را داریم و مسافت طی‌شده در این مسیر (طول نیم‌دایره) را می‌توانیم حساب کنیم؛ یعنی:

$$l_{AB} = \frac{\text{محیط دایره}}{۲} = \frac{۲\pi r}{۲} = \pi r = ۳ \times ۶ = ۱۸ \text{ cm}$$

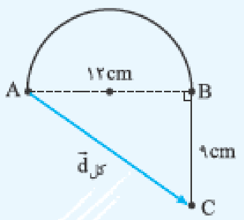
$$s_{av_{AB}} = \frac{l_{AB}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{l_{AB}}{s_{av_{AB}}} = \frac{۱۸}{۳} = ۶ \text{ s}$$

گام دوم: صورت سؤال می‌گوید مورچه مسیر BC را هم در همین مدت (یعنی ۶ s) پیموده است، پس زمان کل حرکت $۲\Delta t$ است و داریم:

$$s_{av_{کل}} = \frac{l_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{l_{AB} + l_{BC}}{۲\Delta t} = \frac{۱۸ + ۹}{۲ \times ۶} = ۲/۲۵ \text{ cm/s}$$

(تا این‌جا یا ۱ درست است یا ۳)

گام سوم: برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط باید اندازهٔ جابه‌جایی کل یعنی طول AC را داشته باشیم.



با توجه به شکل داریم:

$$d = \sqrt{۱۲^۲ + ۹^۲} = ۱۵ \text{ cm}$$

$$v_{av_{کل}} = \frac{d_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{۱۵}{۱۲} = ۱/۲۵ \text{ cm/s}$$

تست **متحرکی در مدت ۴ s از مکان $\vec{d}_1 = ۳\vec{i} - ۴\vec{j}$ به مکان $\vec{d}_2 = -۵\vec{i} + ۲\vec{j}$ می‌رود. به ترتیب از راست به چپ اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط این متحرک چند متر بر ثانیه است؟ (بردارها در SI می‌باشند.)**

۱) ۲/۵، اطلاعات برای محاسبهٔ تندی کافی نیست. ۲) ۱/۲۵، اطلاعات برای محاسبهٔ تندی کافی نیست.

۳) ۲/۵، ۳/۵ ۴) ۱/۲۵، ۳/۵

پاسخ گزینهٔ۱ اول این را بگوییم که چون مسیر حرکت معلوم نیست، تندی را نمی‌توانیم حساب کنیم؛ ولی سرعت متوسط را با فرمول $\vec{v}_{av}=\dfrac{\vec{d}}{\Delta t}$ حساب می‌کنیم:

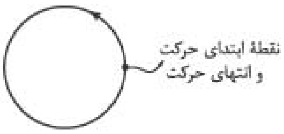
$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}_۲-\vec{d}_۱}{\Delta t}=\frac{(-۵\vec{i}+۲\vec{j})-(۳\vec{i}-۴\vec{j})}{۴}=\frac{-۸\vec{i}+۶\vec{j}}{۴}=-۲\vec{i}+۱/۵\vec{j}$$

$$|\vec{v}_{av}|=\sqrt{(-۲)^۲+(۱/۵)^۲}=۲/۵\ m/s$$

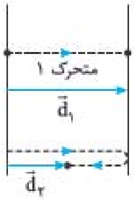
۱۶- گزینهٔ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) وقتی تندی متوسط صفر است، یعنی مسافت طی‌شده توسط متحرک صفر است، یعنی متحرک اصلاً حرکت نکرده است. همان‌طور که می‌دانید سرعت متوسط متحرکی که حرکت نکرده باشد، صفر است.

(۲) متحرک می‌تواند مانند شکل روبه‌رو مسیری را طی کرده باشد و دوباره به مکان اولیه برگردد. در این حالت، سرعت متوسط صفر است ولی تندی متوسط صفر نیست.



(۳) دو متحرک زیر را در نظر بگیرید. جابه‌جایی متحرک «۱» از جابه‌جایی متحرک «۲» بیشتر است. اما اگر این دو متحرک کل مسیر حرکتشان را در زمان‌های مساوی طی کنند، تندی متحرک «۲» بیشتر می‌شود:



$$\begin{cases}\Delta t_۱=\Delta t_۲\\ l_۱<l_۲\end{cases}\Rightarrow s_{av,۱}<s_{av,۲}$$

(۴) وقتی متحرک روی خط راست حرکت کند و تغییر جهت ندهد، تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط برابر می‌شود.

۱۷- گزینهٔ۱ فقط عبارت «الف» درست است. به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) سرعت متوسط کمیتی برداری و تندی متوسط کمیتی نرده‌ای است.

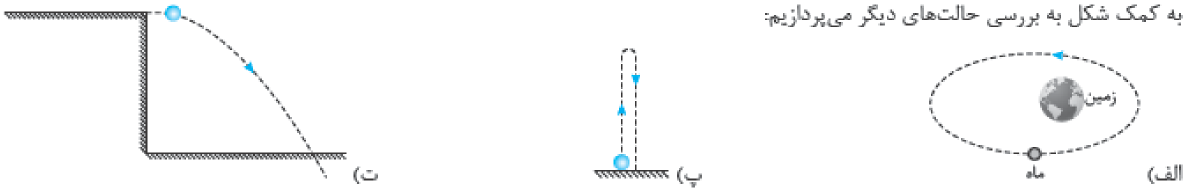
ب) تندی متوسط اصلاً جهت ندارد که بخواهد با جابه‌جایی هم‌جهت باشد.

پ) سرعت متوسط برابر با **جابه‌جایی** تقسیم بر مدت‌زمان لازم برای **جابه‌جایی** است.

ت) اگر متحرک روی خط راست حرکت کند ولی تغییر جهت بدهد، اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط با هم برابر نمی‌شود.

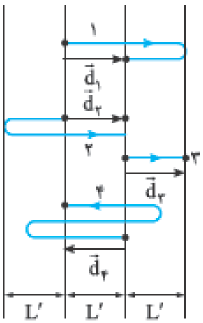
۱۸- گزینهٔ۱ فقط در حالت مطرح‌شده در عبارت «ب» تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. چون فقط در این حالت حرکت متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت است.

به کمک شکل به بررسی حالت‌های دیگر می‌پردازیم:



۱۹- گزینهٔ۳ در این گزینه متحرک تغییر جهت داده است؛ پس تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط آن با هم برابر نیست.

۲۰- گزینهٔ۴ به کمک شکل روبه‌رو و با توجه به این‌که $\Delta t_۱=\Delta t_۲=\Delta t_۳=\Delta t_۴$ است، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



اندازهٔ جابه‌جایی هر سه متحرک با هم برابر است، ولی جهت بردار $\vec{d}_۴$ در خلاف جهت بردارهای دیگر است.

$$\vec{d}_۱=\vec{d}_۲=\vec{d}_۳=-\vec{d}_۴\Rightarrow d_۱=d_۲=d_۳=d_۴=L'$$

$$\Rightarrow\frac{d_۱}{\Delta t_۱}=\frac{d_۲}{\Delta t_۲}=\frac{d_۳}{\Delta t_۳}=\frac{d_۴}{\Delta t_۴}\Rightarrow v_{av,۱}=v_{av,۲}=v_{av,۳}=v_{av,۴}$$

پس (۱) و (۳) درست هستند.

در شکل بالا کاملاً مشخص است که $l_۱=l_۲=۳L'$ و $l_۳=L'$ است. اما در مورد متحرک (۴) باید دقت کنیم که متحرک مسافتی بیش از $۳L'$ را طی کرده است و داریم: $l_۴>۳L'$

با توجه به این موضوع می‌توانیم بفهمیم که $l_۳<l_۱=l_۲<l_۴$ است و (۴) **نادرست است**. حالا به سراغ (۲) می‌رویم. زمان‌های حرکت با هم برابر و مثبت است؛ پس:

$$l_۴>l_۱=l_۲>l_۳\xrightarrow{\Delta t_۱=\Delta t_۲=\Delta t_۳=\Delta t_۴}\frac{l_۴}{\Delta t_۴}>\frac{l_۱}{\Delta t_۱}=\frac{l_۲}{\Delta t_۲}>\frac{l_۳}{\Delta t_۳}\Rightarrow S_{av,۴}>S_{av,۱}=S_{av,۲}>S_{av,۳}$$

۲۱- گزینهٔ۱ سرعت متوسط برابر با جابه‌جایی تقسیم بر مدت زمان جابه‌جایی است؛ پس:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۱۶-۸}{۱۰-۲}=\frac{-۲۴}{۸}=-۳\ m/s$$

۲۲- گزینهٔ۱ سرعت متوسط کل حرکت برابر جابه‌جایی کل تقسیم بر کل زمان حرکت است؛ پس:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x_{AO}+\Delta x_{OB}}{\Delta t_{AO}+\Delta t_{OB}}=\frac{۳۰۰+۵۰۰}{۳۰+۲۰}=\frac{۸۰۰}{۵۰}=۱۶\ m/s$$

۲۳- گزینهٔ «۳» به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) بازیکن «الف» از $x=-۶\,m$ به $x=۸\,m$ رفته و در این نقطه تغییر جهت داده است و به $x=۴\,m$ بازگشته است؛ پس مسافت طی‌شده توسط این بازیکن به صورت زیر است:

$$l_{الف}=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=|۸-(-۶)|+|۴-۸|=۱۴+۴=۱۸\,m$$

به همین ترتیب برای بازیکن «ب» داریم:

$$l_{ب}=|\Delta x'_۱|+|\Delta x'_۲|=|۲-۱۴|+|۴-۲|=۱۲+۲=۱۴\,m \Rightarrow l_{الف}-l_{ب}=۱۸-۱۴=۴\,m$$

(۲) ابتدا جابه‌جایی‌های دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{الف}=۴-(-۶)=۱۰\,m \Rightarrow |\Delta x_{الف}|=۱۰\,m$$

$$\Delta x_{ب}=۴-۱۴=-۱۰\,m \Rightarrow |\Delta x_{ب}|=۱۰\,m$$

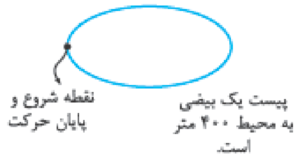
حالا سرعت متوسط دو متحرک را تعیین می‌کنیم. چون اندازهٔ جابه‌جایی دو متحرک و زمان لازم برای این جابه‌جایی یکسان است، داریم:

$$v_{av,الف}=v_{av,ب}=\frac{|\Delta x_{الف}|}{\Delta t}=\frac{|\Delta x_{ب}|}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۵}=۲\,m/s$$

(۳) چون در بازهٔ $(۰,۵\,s)$ مسافت‌ها با هم برابر نیستند، تندی متوسط دو بازیکن برابر نیست.

(۴) بازیکن «ب» همواره در قسمت مثبت محور x است؛ پس جهت بردار مکان آن تغییر نکرده است.

۲۴- گزینهٔ «۴» با توجه به شکل روبه‌رو، رودیشا برای این‌که $۸۰۰\,m$ را طی کند، ۲ بار بیضی را دور زده است و به جای اول خودش برگشته است؛ پس جابه‌جایی‌اش صفر شده و بنابراین سرعت متوسط آن هم صفر است:



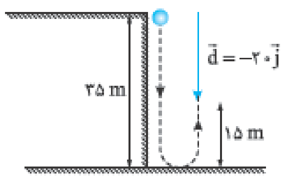
$$\Delta x=۰ \Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰}{۱۰۰\,s}=۰$$

(رکورد دقیق رودیشا ۱ دقیقه و ۴۰ ثانیه و ۹۱ صدم ثانیه است. گفتم شاید دوست داشته باشید بدونید!)

۲۵- گزینهٔ «۳» این دفعه تندی متوسط را خواسته‌ایم نه سرعت متوسط؛ پس باید مسافت پیموده‌شده را تقسیم بر زمان طی مسافت کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۰۰}{۵۰}=۲\,m/s$$

۲۶- گزینهٔ «۳» به شکل روبه‌رو نگاه کنید. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، گلوله ابتدا $۳۵\,m$ به سمت پایین حرکت کرده و سپس $۱۵\,m$ به سمت بالا حرکت کرده است؛ بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی (d) و مسافت طی‌شده توسط آن (l) برابر است با:



$$d=۲۰\,m\,,\,l=۳۵+۱۵=۵۰\,m$$

پس با توجه به این‌که $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$ و $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}$ است، داریم:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{d}{\Delta t}}=\frac{l}{d}=\frac{۵۰}{۲۰}=۲/۵$$

۲۷- گزینهٔ «۲» **گام اول:** زمان طی مسافت را برای هر قسمت به دست می‌آوریم:

$$\text{رفت}: \Delta t_۱=\frac{l}{s_{av_۱}}=\frac{۳۶۰\,km}{۳۰\,m/s}=\frac{۳۶۰۰۰۰\,m}{۳۰\,m/s}=۱۲۰۰۰\,s \qquad \text{برگشت}: \Delta t_۲=\frac{l}{s_{av_۲}}=\frac{۳۶۰\,km}{۷۲\,km/h}=۵\,h=۱۸۰۰۰\,s$$

گام دوم: تندی متوسط کل حرکت برابر با مسافت طی‌شده در رفت و برگشت تقسیم بر زمان کل است:

$$\text{تندی متوسط کل}=\frac{\text{مسافت پیموده‌شدهٔ کل}}{\text{زمان کل}}=\frac{۳۶۰۰۰۰\times ۲}{۱۲۰۰۰+۱۸۰۰۰}=۲۴\,m/s$$

۲۸- گزینهٔ «۳» زمان‌ها را برحسب فاصلهٔ بین دو شهر (l) به دست می‌آوریم. چون فاصلهٔ دو شهر را برحسب کیلومتر می‌خواهیم، سرعت‌ها را برحسب کیلومتر بر ساعت و زمان را برحسب ساعت در معادله قرار می‌دهیم:

$$\Delta t_۲-\Delta t_۱=\frac{۳۶}{۶۰}=۰/۶\,h \xrightarrow{\Delta t=\frac{l}{s_{av}}} \frac{l}{۷۵}-\frac{l}{۹۰}=۰/۶ \Rightarrow \frac{۶l-۵l}{۴۵۰}=۰/۶ \Rightarrow l=۴۵۰\times ۰/۶=۲۷۰\,km$$

۲۹- گزینهٔ «۲» با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}_۲-\vec{d}_۱}{\Delta t} \Rightarrow ۲\vec{j}=\frac{\vec{d}_۲-(-۴\vec{j})}{۱۱-۴} \Rightarrow ۲\vec{j}=\frac{\vec{d}_۲+۴\vec{j}}{۷} \Rightarrow ۱۴\vec{j}=\vec{d}_۲+۴\vec{j} \Rightarrow \vec{d}_۲=۱۰\vec{j}$$

۳۰- گزینهٔ «۳» به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) برای این‌که بفهمیم $t_۲-t_۱$ چه‌قدر است، باید از رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}_۲-\vec{d}_۱}{t_۲-t_۱}$ کمک بگیریم. اندازهٔ سرعت متوسط $۲\,m/s$ و جهت حرکت در خلاف جهت محور y است؛ پس $\vec{v}_{av}=(-۲\,m/s)\vec{j}$ است:

$$-۲\,m/s\,\vec{j}=\frac{(-۵\,km)\vec{j}-(۴\,km)\vec{j}}{t_۲-t_۱}=\frac{(-۹۰۰۰\,m)\vec{j}}{t_۲-t_۱} \Rightarrow t_۲-t_۱=۴۵۰۰\,s$$

ب) در مورد تندی متوسط نمی‌توانیم چیزی بگوییم، چون نمی‌دانیم که حرکت متحرک در این $۴۵۰۰\,s$ تغییر جهت داشته است یا نه؛ در نتیجه نمی‌دانیم که مسافت طی‌شده توسط متحرک چه‌قدر است. پس عبارت «ب» می‌تواند درست باشد و یا این‌که درست نباشد.

پ) برای بررسی این عبارت باید $\vec{v}_{av}=(-۲\,m/s)\vec{j}$ را برحسب کیلومتر بر ساعت بنویسیم:

$$\vec{v}_{av}=(-۲\,m/s)\vec{j}=(-۲\times ۳/۶\,km/h)\vec{j}=(-۷/۲\,km/h)\vec{j}$$

با توجه به توضیحات بالا می‌فهمیم دو عبارت قطعاً درست هستند.

۳۱- گزینهٔ «۱» **گام اول:** مکان اولیهٔ دو متحرک را تعیین می‌کنیم:

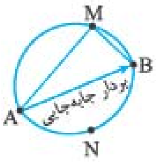
$$\vec{v}_{av,A}=\frac{\vec{d}_A}{\Delta t}=\frac{\vec{y}_{۲A}-\vec{y}_{۱A}}{\Delta t} \Rightarrow -۲\vec{j}=\frac{۲\vec{j}-\vec{y}_{۱A}}{۲} \Rightarrow -۴\vec{j}=۲\vec{j}-\vec{y}_{۱A} \Rightarrow \vec{y}_{۱A}=۶\vec{j}$$

$$\vec{v}_{av,B}=\frac{\vec{d}_B}{\Delta t}=\frac{\vec{y}_{۲B}-\vec{y}_{۱B}}{\Delta t} \Rightarrow ۲\vec{j}=\frac{-۲\vec{j}-\vec{y}_{۱B}}{۲} \Rightarrow ۴\vec{j}=-۲\vec{j}-\vec{y}_{۱B} \Rightarrow ۶\vec{j}=-\vec{y}_{۱B} \Rightarrow \vec{y}_{۱B}=-۶\vec{j}$$

گام دوم: فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=۰$ برابر است با:

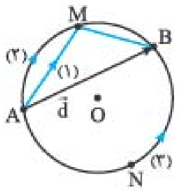
$$|\vec{y}_{۱A}-\vec{y}_{۱B}|=|۶\vec{j}-(-۶\vec{j})|=|۱۲\vec{j}|=۱۲\,m$$

۳۲- گزینهٔ ۴ اندازهٔ سرعت متوسط به صورت اندازهٔ جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی تعریف می‌شود. با توجه به این‌که در این سؤال جابه‌جایی $(\overline{AB})$ و مدت زمان جابه‌جایی $(۱۰\ \text{min})$ در سه مسیر با هم برابر است، سرعت متوسط هم در هر سه مسیر یکسان است.



۳۳- گزینهٔ ۱ **گام اول:** با توجه به شکل روبه‌رو و این‌که $\widehat{ANB} > \widehat{AMB}$ است، می‌فهمیم که در مورد مسافت‌ها، نامساوی $l_۳ > l_۲ > l_۱$ برقرار است.

چون تندی متوسط متحرک‌ها برابر است، داریم:



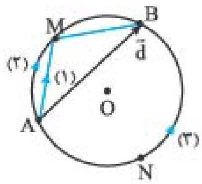
$$\left.\begin{array}{l} l_۳ > l_۲ > l_۱ \\ s_{av,۳} = s_{av,۲} = s_{av,۱} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تندی همواره مثبت است.}} \frac{l_۳}{s_{av,۳}} > \frac{l_۲}{s_{av,۲}} > \frac{l_۱}{s_{av,۱}} \Rightarrow \Delta t_۳ > \Delta t_۲ > \Delta t_۱ \qquad (I)$$

گام دوم: همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید جابه‌جایی هر سه متحرک $\vec{d}$ است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی این سه متحرک برابر با d است. $d_۱ = d_۲ = d_۳ = d$ است.

از طرفی بر اساس نامساوی (I) و مثبت‌بودن بازه‌های زمانی داریم:

$$\Delta t_۳ > \Delta t_۲ > \Delta t_۱ \Rightarrow \frac{۱}{\Delta t_۳} < \frac{۱}{\Delta t_۲} < \frac{۱}{\Delta t_۱} \xrightarrow{\times d} \frac{d}{\Delta t_۳} < \frac{d}{\Delta t_۲} < \frac{d}{\Delta t_۱} \Rightarrow v_{av,۳} < v_{av,۲} < v_{av,۱}$$

۳۴- گزینهٔ ۳ در شکل روبه‌رو می‌بینید که جابه‌جایی‌های هر سه متحرک با هم برابر است؛ پس با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:



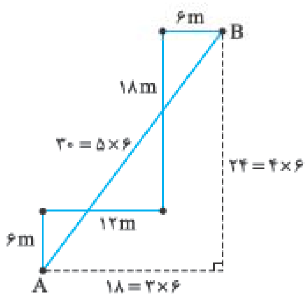
$$v_{av,۱} = v_{av,۲} = v_{av,۳} \Rightarrow \frac{\vec{d}_۱}{\Delta t_۱} = \frac{\vec{d}_۲}{\Delta t_۲} = \frac{\vec{d}_۳}{\Delta t_۳} \xrightarrow{\text{جابه‌جایی‌ها برابر } \vec{d} \text{ است}} \frac{\vec{d}}{\Delta t_۱} = \frac{\vec{d}}{\Delta t_۲} = \frac{\vec{d}}{\Delta t_۳}$$

$$\Rightarrow \Delta t_۱ = \Delta t_۲ = \Delta t_۳$$

حالا که فهمیدیم زمان‌های حرکت برای سه متحرک مساوی است، مشخص‌کردن این‌که تندی متوسط کدام متحرک بیشتر است، اصلاً کاری ندارد. چون $\widehat{ANB} > \widehat{AMB}$ است و پاره‌خط‌های AM و MB به ترتیب وترهای کمان‌های $\widehat{AM}$ و $\widehat{MB}$ هستند، داریم:

$$l_۱ < l_۲ < l_۳ \xrightarrow{\Delta t_۱ = \Delta t_۲ = \Delta t_۳} \frac{l_۱}{\Delta t_۱} < \frac{l_۲}{\Delta t_۲} < \frac{l_۳}{\Delta t_۳} \Rightarrow s_{av,۱} < s_{av,۲} < s_{av,۳}$$

۳۵- گزینهٔ ۳ برای این‌که سرعت متوسط را به دست آوریم، ابتدا باید به سراغ جابه‌جایی برویم. برای این کار نقطهٔ A را به B وصل می‌کنیم و طول AB را محاسبه می‌کنیم.



$$AB = \sqrt{۱۸^۲ + ۲۴^۲} = ۳۰\ m$$

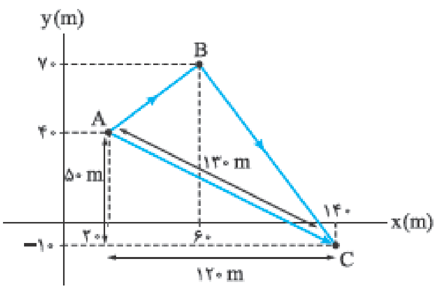
بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳\ m/s = ۳\times ۳/۶\ km/h = ۱۰/۸\ km/h$$

محاسبهٔ تندی که خیلی راحت است. کافی است طول‌ها را با هم جمع کنیم تا مسافت به دست آید و این مقدار را تقسیم بر زمان طی مسافت کنیم:

$$s_{av} = \frac{۶+۱۲+۱۸+۶}{۱۰} = \frac{۴۲}{۱۰} = ۴/۲\ m/s = ۴/۲\times ۳/۶\ km/h = ۱۵/۱۲\ km/h$$

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا مطابق شکل مقابل نقطهٔ A را به C وصل می‌کنیم و جابه‌جایی را به دست می‌آوریم؛ سپس مقدار جابه‌جایی را تقسیم بر زمان می‌کنیم تا اندازهٔ سرعت متوسط به دست آید:



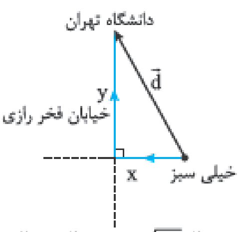
$$d = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۵۰^۲ + ۱۲۰^۲} = ۱۳۰\ m \Rightarrow v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۱۳۰}{۱۰} = ۱۳\ m/s$$

حالا مسافت و در ادامه تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم. برای به دست آوردن مسافت باید طول‌های AB و BC را به دست آوریم:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(۶۰-۲۰)^۲ + (۷۰-۴۰)^۲} = \sqrt{۱۶۰۰+۹۰۰} = \sqrt{۲۵۰۰} = ۵۰\ m \\ BC = \sqrt{(۱۴۰-۶۰)^۲ + (۷۰-(-۱۰))^۲} = \sqrt{۲\times ۸۰^۲} = ۸۰\sqrt{۲} = ۱۱۲\ m \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\text{زمان}} = \frac{۵۰+۱۱۲}{۱۰} = \frac{۱۶۲}{۱۰} = ۱۶/۲\ m/s$$

۳۷- گزینهٔ ۲ مسیر حرکت مانند شکل روبه‌رو دو پاره‌خط عمود بر هم به طول‌های x و y است. ما در این تست مقدار x را می‌خواهیم. برای محاسبهٔ مقدار x در اولین قدم اندازهٔ $\vec{d}$ را به دست می‌آوریم:



$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = ۴\ \text{min}} \frac{\sqrt{۵۸}}{۸} = \frac{d}{۴\times ۶۰} \Rightarrow d = ۳۰\sqrt{۵۸}\ m$$

از فیثاغورس می‌دانیم $x^۲ + y^۲ = d^۲$ است؛ پس:

$$x^۲ + y^۲ = (۳۰\sqrt{۵۸})^۲ = ۵۲۲۰۰ \quad (I)$$

از طرفی چون طول مسیر $x+y=۳۰۰$ است، داریم:

$$x^{۲}+y^{۲}+۲xy=(۳۰۰)^{۲}=۹۰۰۰۰ \ (II)$$

از معادله‌های (I) و (II) داریم:

$$(x^{۲}+y^{۲}+۲xy)-(x^{۲}+y^{۲})=۹۰۰۰۰-۵۲۲۰۰=۳۷۸۰۰ \Rightarrow ۲xy=۳۷۸۰۰$$

حالا با داشتن $x^{۲}+y^{۲}$ و $۲xy$ مقدار $y-x$ را به دست می‌آوریم:

$$y>x \Rightarrow (y-x)^{۲}=y^{۲}+x^{۲}-۲xy=۵۲۲۰۰-۳۷۸۰۰=۱۴۴۰۰ \Rightarrow y-x=۱۲۰$$

با حل دو معادله ـ دو مجهول $\begin{cases} y+x=۳۰۰ \\ y-x=۱۲۰ \end{cases}$ مقدار x را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} y+x=۳۰۰ \\ y-x=۱۲۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۳۰۰-۱۲۰ \Rightarrow ۲x=۱۸۰ \Rightarrow x=۹۰\,m$$

۳۸- گزینهٔ۲ متحرک با اندازهٔ سرعت متوسط $۴\,m/s$ در خلاف جهت محور y حرکت می‌کند؛ پس بردار سرعت متوسط متحرک در SI به صورت $\vec{v}_{av}=-۴\vec{j}$ می‌شود. براساس تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t} \Rightarrow -۴\vec{j}=\frac{\vec{d}}{۴} \Rightarrow \vec{d}=-۱۶\vec{j} \Rightarrow \vec{y}_{۲}-\vec{y}_{۱}=-۱۶\vec{j} \Rightarrow \vec{y}_{۲}-(-۸\vec{j})=-۱۶\vec{j} \Rightarrow \vec{y}_{۲}=-۲۴\vec{j}$$

۳۹- گزینهٔ۳ **گام اول:** سرعت متوسط دو متحرک با هم برابر است؛ پس با به دست آوردن سرعت متوسط متحرک A سرعت متوسط متحرک B را هم داریم:

$$\vec{v}_{av,B}=\vec{v}_{av,A}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{-۵\vec{i}-(-۱۰\vec{i})}{۲/۵}=\frac{۵\vec{i}}{۲/۵}=(۲\,m/s)\,\vec{i}$$

گام دوم: با استفاده از سرعت متوسط، مکان نهایی جسم B را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{v}_{av,B}=\frac{\vec{d}_{B}}{\Delta t} \Rightarrow ۲\vec{i}=\frac{\vec{d}_{۲,B}-\vec{d}_{۱,B}}{۲/۵} \Rightarrow ۵\vec{i}=\vec{d}_{۲,B}-(-۳\vec{i}) \Rightarrow ۵\vec{i}=\vec{d}_{۲,B}+۳\vec{i} \Rightarrow \vec{d}_{۲,B}=۲\vec{i}$$

گام سوم: در این گام باید مسافت طی‌شده توسط متحرک B را محاسبه کنیم. این متحرک روی خط راست ابتدا از مکان $-۳\vec{i}$ به مکان $۴/۵\vec{i}$ می‌رود و سپس تغییر جهت می‌دهد و به مکان $۲\vec{i}$ می‌رود؛ پس مسافت طی‌شده برابر است با:

$$l_{B}=|\Delta x_{۱}|+|\Delta x_{۲}|=|۴/۵-(-۳)|+|۲-(۴/۵)|=۷/۵+۲/۵=۱۰\,m$$

گام چهارم: حالا با داشتن مسافت، تندی متوسط متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$s_{av,B}=\frac{l_{B}}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۲/۵}=۴\,m/s$$

۴۰- گزینهٔ۴ سرعت متوسط متحرک A را حساب می‌کنیم:

$$\vec{v}_{av,A}=\frac{\vec{d}_{A}}{\Delta t_{۱}}=\frac{-۴\vec{i}-(-۱۲\vec{i})}{۵}=\frac{۸\vec{i}}{۵}=(۱/۶\,m/s)\vec{i}$$

پس (۱) درست است.

حالا به سراغ تندی متوسط متحرک A می‌رویم. متحرک A در مبدأ تغییر جهت داده است؛ پس از مکان $-۱۲\vec{i}$ به مبدأ رفته و سپس تغییر جهت داده و به مکان $-۴\vec{i}$ بازگشته است. با توجه به این موضوع مسافت طی‌شده برابر است با:

$$l_{A}=|\Delta x_{۱,A}|+|\Delta x_{۲,A}|=|۰-(-۱۲)|+|(-۴)-۰|=۱۲+۴=۱۶\,m$$

در نتیجه تندی متوسط برابر با $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲\,m/s$ است و (۳) درست است.

چون تندی متوسط دو متحرک با هم برابر است، مسافت طی‌شده توسط دو متحرک هم برابر است. از آن‌جایی که هر دو متحرک فقط یک بار و در مبدأ تغییر جهت داده‌اند، متحرک B از $\vec{d}_{۱,B}=۹\vec{i}$ به مبدأ و پس از تغییر جهت در مبدأ به نقطهٔ $\vec{d}_{۲,B}$ رفته است. با توجه به این‌که مسافت طی‌شده در این حرکت ۱۶ m است، داریم:

$$l_{B}=|\Delta x_{۱,B}|+|\Delta x_{۲,B}| \xrightarrow{l_{A}=l_{B}} ۱۶=|۰-۹|+|x_{۲}-۰| \Rightarrow ۱۶=۹+x_{۲} \Rightarrow x_{۲}=۷\,m \Rightarrow \vec{d}_{۲,B}=۷\vec{i}$$

پس (۲) درست است. حالا به سراغ این‌که چرا (۴) نادرست است، می‌رویم:

$$\vec{v}_{av,B}=\frac{\vec{d}_{B}}{\Delta t}=\frac{۷\vec{i}-۹\vec{i}}{۵}=\frac{-۲\vec{i}}{۵}=(-۰/۴\,m/s)\vec{i}$$

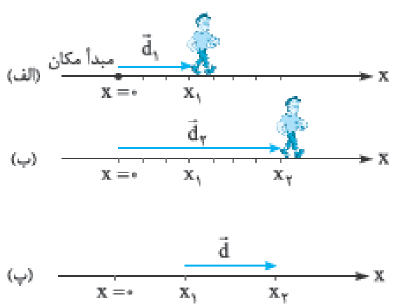
(درس۳)

حرکت در راستای خط راست

حرکت می‌تواند در یک راستا (یک‌بُعدی) یا در یک صفحه (دوبُعدی) یا در فضا (سه‌بُعدی) باشد که کتاب درسی فقط حرکت در یک راستا را بررسی کرده است. ما هم سعی می‌کنیم از چارچوب کتاب درسی خارج نشویم.

در حرکت‌های راست‌خط، محوری را منطبق بر مسیر حرکت (مانند محور x) و یک نقطه را به عنوان **مبدأ مکان** انتخاب می‌کنیم.

حواستون باشه! نقطهٔ **مبدأ مکان** لزوماً نقطهٔ شروع حرکت (یا **مبدأ حرکت**) نیست.



واضح است که بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان به محل قرارگرفتن جسم کشیده می‌شود.

فرض کنید دونده‌ای در لحظهٔ $t_{۱}$ در مکان $x_{۱}$ (شکل الف) و در لحظهٔ $t_{۲}$ در مکان $x_{۲}$ (شکل ب) قرار دارد. در این صورت بردار مکان این دونده در دو لحظهٔ $t_{۱}$ و $t_{۲}$ برحسب بردار یکهٔ $\vec{i}$ به این صورت است:

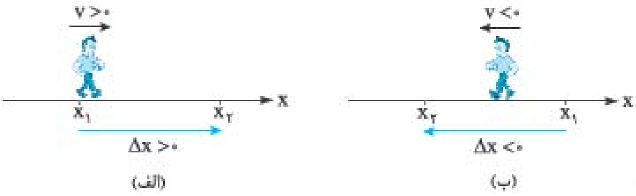
$$\vec{d}_{۲}=x_{۲}\vec{i} \quad , \quad \vec{d}_{۱}=x_{۱}\vec{i}$$

پس بردار جابه‌جایی این دونده (شکل پ) در بازهٔ زمانی $t_{۱}$ تا $t_{۲}$ برابر می‌شود با:

$$\vec{d}=\vec{d}_{۲}-\vec{d}_{۱}=x_{۲}\vec{i}-x_{۱}\vec{i}=\Delta x\vec{i}$$

در حرکت‌های یک‌بُعدی در فرمول‌ها برای نشان‌دادن جابه‌جایی، از $\vec{d}$ (به عنوان نماد کلی جابه‌جایی) کم‌تر استفاده می‌کنیم و چون متحرک بیشتر روی محور x حرکت می‌کند، جابه‌جایی را با Δx نشان می‌دهیم.

در کمیت‌های برداری (مثل جابه‌جایی و سرعت) علامت مثبت یا منفی نشان‌دهندهٔ جهت حرکت است؛ پس اگر $\Delta x > ۰$ یا $v > ۰$ باشد، یعنی متحرک در جهت مثبت محور x جابه‌جا شده است (شکل الف) و اگر $\Delta x < ۰$ یا $v < ۰$ باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است (شکل ب).



(الف) (ب)

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت راست‌خط

ما باید بتوانیم مکان جسم را در هر لحظهٔ دلخواه مشخص کنیم. یکی از راه‌های تعیین مکان جسم در هر لحظه «**معادلهٔ مکان ـ زمان**» یا «**معادلهٔ $x - t$**» است. این معادله، مکان جسم را به صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد:

$$x = f(t)$$

مثلاً $x = ۲t^۲ - ۴t + ۲$ می‌تواند معادلهٔ مکان ـ زمان یک حرکت راست‌خط برحسب یکاهای SI باشد. در این صورت متحرک در لحظه‌هایی مثل $t_۰ = ۰$، $t_۱ = ۱s$، $t_۲ = ۲s$ و $t_۳ = ۳s$ در مکان‌های $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ قرار دارد:

$$t_۰ = ۰ \Rightarrow x_۰ = ۲(۰)^۲ - ۴(۰) + ۲ = ۲\,m \qquad t_۲ = ۲s \Rightarrow x_۲ = ۲(۲)^۲ - ۴(۲) + ۲ = ۲\,m$$

$$t_۱ = ۱s \Rightarrow x_۱ = ۲(۱)^۲ - ۴(۱) + ۲ = ۰\,m \qquad t_۳ = ۳s \Rightarrow x_۳ = ۲(۳)^۲ - ۴(۳) + ۲ = ۸\,m$$

لحظه	$t_۰ = ۰$	$t_۱ = ۱s$	$t_۲ = ۲s$	$t_۳ = ۳s$
مکان	$x_۰ = ۲\,m$	$x_۱ = ۰\,m$	$x_۲ = ۲\,m$	$x_۳ = ۸\,m$

به مکان جسم در مبدأ زمان ($t_۰ = ۰$) **مکان اولیه** می‌گوییم. مثلاً در نمونهٔ بالا، مکان اولیه برابر $x_۰ = ۲\,m$ است.

تست معادلهٔ مکان ـ زمان جسمی در SI به صورت $x = t^۲ - ۵t + ۴$ است. اندازهٔ جابه‌جایی این متحرک در ثانیهٔ سوم چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۱ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۳s$. مکان جسم را در این دو لحظه حساب می‌کنیم:

$$t_۱ = ۲s \Rightarrow x_۱ = (۲)^۲ - ۵(۲) + ۴ = -۲\,m \;,\; t_۲ = ۳s \Rightarrow x_۲ = (۳)^۲ - ۵(۳) + ۴ = -۲\,m$$

در نتیجه جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ سوم برابر است با:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = -۲ - (-۲) = ۰$$

اگر در معادلهٔ مکان ـ زمان به جای x، مکان معینی را قرار دهیم و سپس معادلهٔ حاصل را حل کنیم، tهای به دست آمده، لحظه‌های عبور متحرک از آن مکان معین را نشان می‌دهند. تست زیر را ببینید:

تست معادلهٔ مکان زمان متحرکی در SI، $x = t^۳ - ۴t$ است. به‌جز مبدأ زمان ($t_۰ = ۰$) در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، این متحرک در حال عبور از مبدأ مکان است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ کافی است به جای x، صفر بگذاریم و معادله را حل کنیم.

$$x = ۰ \Rightarrow t^۳ - ۴t = ۰ \Rightarrow t(t^۲ - ۴) = ۰ \begin{cases} t = ۰ \\ t^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow t^۲ = ۴ \Rightarrow t = \pm ۲\,s \end{cases}$$

زمان منفی معنی ندارد، پس می‌ماند $t = ۲s$.

در حرکت راست‌خط، با داشتن معادلهٔ مکان ـ زمان می‌توانیم بگوییم که متحرک در چه لحظه‌ای **تغییر جهت** می‌دهد. برای این کار باید لحظه‌ای را که x در آن بیشینه یا کمینه است، محاسبه کنیم. در درس ریاضی یاد گرفته‌اید که اگر معادله از نوع درجهٔ ۲ (یعنی به صورت $x = At^۲ + Bt + C$) باشد، در لحظهٔ $t = \frac{-B}{۲A}$، مقدار x اکسترمم (بیشینه یا کمینه) است.

این را هم اضافه کنیم که در لحظهٔ تغییر جهت، سرعت جسم برابر صفر است.

(تعیین لحظهٔ تغییر جهت برای معادله‌های مکان ـ زمان درجهٔ ۳ یا بالاتر، خارج از محدودهٔ کتاب درسی است که البته ما در تست‌های سری Z به آن اشاره‌ای می‌کنیم.)

تست معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = ۴t^۲ + ۸t - ۲۱$ است. این متحرک در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳/۵ ۴) این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

پاسخ گزینهٔ ۴ گفتیم اگر معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ ۲ باشد، متحرک در لحظهٔ $t = \frac{-B}{۲A}$ تغییر جهت می‌دهد، پس داریم:

$$t = \frac{-۸}{۲ \times ۴} = -۱s$$

منفی‌شدن t یعنی این متحرک قبل از مبدأ زمان، تغییر جهت داده است که قابل‌قبول نیست؛ بنابراین متحرک پس از شروع حرکت (مبدأ زمان) تغییر جهت نمی‌دهد.

تست معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - 6t + 5$ است. این متحرک در چه بازهٔ زمانی در جهت منفی محور x حرکت کرده است؟

۱) $(1s, 5s)$ ۲) $(3s, 5s)$ ۳) $(0, 3s)$ ۴) $(5s, \infty)$

پاسخ **گزینهٔ ۳** **گام اول:** لحظهٔ تغییر جهت متحرک (یا نقطهٔ اکسترمم تابع) را حساب می‌کنیم، چون معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ ۲ است؛ پس داریم:

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-6)}{2\times 1} = 3\,s$$

گام دوم: چون ضریب t^2 مثبت است، x در لحظهٔ $t = 3\,s$ کمینه یا مینیمم است؛ پس، از لحظهٔ $t = 0$ تا $t = 3\,s$ متحرک در جهت منفی حرکت کرده است.
برای آن‌که خیالتان راحت شود، مکان متحرک را در چند لحظه قبل و بعد از $t = 3\,s$ در جدول آورده‌ایم:

t (s)	0	1	2	3	4	5	6
x (m)	5	0	-3	-4	-3	0	5

حرکت در جهت منفی محور x — لحظهٔ تغییر جهت — حرکت در جهت مثبت محور x

تست معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI، به صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است. این متحرک چند ثانیه در قسمت منفی محور x در حرکت بوده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ ۲** با یک سؤال ریاضی طرف هستیم.

گام اول: می‌خواهیم بدانیم چه مدت $x < 0$ بوده است؛ یعنی:

$$t^2 - 4t + 3 < 0$$

پس باید معادلهٔ $x = t^2 - 4t + 3$ را تعیین علامت کنیم و برای این کار اول باید ریشه‌های معادله را به ازای $x = 0$ حساب کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1\,s \\ t_2 = 3\,s \end{cases}$$

در معادله‌هایی که به شکل $y = ax^2 + bx + c$ هستند، اگر $a + b + c = 0$ باشد، ریشه‌های معادله $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ خواهد بود.

گام دوم: می‌دانیم که علامت عبارت درجهٔ ۲ (مانند $x = At^2 + Bt + C$) بین دو ریشه، مخالف علامت A است؛ پس داریم:

t	0		1		3		$+\infty$
x		+	0	−	0	+	

یعنی در بازهٔ $(1s, 3s)$ متحرک در مکان‌های منفی است، پس این اتفاق ۲ s طول می‌کشد.

۴۱- **گزینهٔ ۲** برای به دست آوردن بردار مکان اولیه تنها کافی است $t = 0$ را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار دهیم:

$$x = 3\cos \pi t + 5t^2 - 7 \xrightarrow{t=0} 3\cos \pi(0) + 5(0) - 7 \Rightarrow x = 3 + 0 - 7 = -4 \Rightarrow \vec{d} = -4\vec{i}$$

۴۲- **گزینهٔ ۱** مبدأ مکان یعنی $x = 0$ و مبدأ زمان یعنی $t = 0$. برای حل این تست کافی است در معادلهٔ مکان ـ زمان یعنی $x(t) = t^4 - 2t + 2$، یک بار $t = 0$ و یک بار $t = 2s$ را قرار دهیم:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x_0 = (0)^4 - 2(0) + 2 = 2\,m \\ t = 2\,s \Rightarrow x_2 = (2)^4 - 2(2) + 2 = 16 - 4 + 2 = 14\,m \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2}{x_0} = \frac{d}{d_0} = \frac{14}{2} = 7$$

۴۳- **گزینهٔ ۳** متحرک در لحظه‌هایی که x در معادلهٔ مکان ـ زمان صفر می‌شود (ریشه‌های معادلهٔ مکان ـ زمان) از مبدأ عبور می‌کند؛ پس:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = (t-2)(t+3)(t+4) \Rightarrow t = \begin{cases} -4s \text{ (غ ق ق)} \\ -3s \text{ (غ ق ق)} \\ 2s \text{ ق ق} \end{cases}$$

حواستان باشد که زمان نمی‌تواند منفی باشد و فقط $t = 2s$ قابل قبول است.

۴۴- **گزینهٔ ۱** لحظه‌هایی که x صفر می‌شود، متحرک در مبدأ مکان قرار دارد؛ پس کافی است در معادلهٔ مکان ـ زمان x را مساوی صفر قرار دهیم تا به جواب تست برسیم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = (t-4)(t^2 - 6t + 5) = (t-4)(t-5)(t-1) \Rightarrow \begin{cases} t = 1\,s \\ t = 4\,s \\ t = 5\,s \end{cases}$$

بنابراین در این لحظه‌ها متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند و بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

۴۵- **گزینهٔ ۴** بردار مکان در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ عبور کند و از یک طرف به طرف دیگر آن برود. این حالت در ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان رخ می‌دهد؛ پس باید ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $x = t^2 - 6t + 10$ را به دست آوریم. در قدم اول به سراغ به دست آوردن دلتای معادله $(\Delta = b^2 - 4ac)$ می‌رویم که ببینیم معادله ریشه دارد یا نه:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = -4$$

دلتا منفی است. همان‌طور که می‌دانید وقتی Δ منفی است، معادلهٔ درجهٔ ۲، ریشه ندارد؛ پس بردار مکان متحرکی با معادلهٔ $x = t^2 - 6t + 10$ **تغییر جهت نمی‌دهد.**

۴۶- **گزینهٔ ۴** در تست قبل گفتیم که جهت بردار مکان فقط در ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان تغییر جهت می‌دهد؛ پس برای حل این تست هم باید مثل تست قبل ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان را تعیین کنیم. چون معادله برحسب t از درجهٔ ۳ است از تجزیه کمک می‌گیریم:

$$0 = t^3 - 4t^2 + 4t = t(t^2 - 4t + 4) = t(t-2)^2 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \text{ (ریشهٔ ساده)} \\ 2 \text{ (ریشهٔ مضاعف)} \end{cases}$$

$t = 2\,s$ که ریشهٔ مضاعف است و به کار ما نمی‌آید، می‌ماند $t = 0$. در $t = 0$ متحرک در مبدأ قرار دارد ولی قبل از آن زمان منفی است و جزو بررسی ما محسوب نمی‌شود و در نتیجه با این‌که بردار مکان در $t = 0$ ریشهٔ ساده است، اما در این لحظه بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد. در واقع چون قبل از $t = 0$ در حرکت ما وجود ندارد، تغییر جهتی در بردار مکان نمی‌بینیم.

۴۷- گزینهٔ۳ می‌خواهیم بدانیم در چه لحظه‌ای متحرک برای دومین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ بنابراین باید بفهمیم کی $y=0$ می‌شود:

$$y=0 \Rightarrow 0=-t^2+8t-15 \Rightarrow 0=-(t-3)(t-5) \Rightarrow \begin{cases} t=3\,s \\ t=5\,s \end{cases}$$

بنابراین متحرک در $t=3\,s$ و $t=5\,s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. در تست، فاصلهٔ زمانی مبدأ زمان با لحظه‌ای که متحرک برای دومین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند، خواسته شده است. چون در $t=5\,s$ جسم برای دومین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ پاسخ تست ۳ است.

۴۸- گزینهٔ۲ **حواستان باشد که** وقتی در سؤال گفته می‌شود متحرک در ۲ متری مبدأ مختصات قرار دارد، یعنی متحرک می‌تواند در $x=+2\,m$ یا $x=-2\,m$ باشد. با توجه به این نکته، به سراغ حل تست می‌رویم. بهترین روش برای حل این است که زمان‌های داده‌شده در هر گزینه را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار دهیم و ببینیم برای کدام گزینه x برابر ۲ یا ۲- می‌شود. معادلهٔ مکان ـ زمان $x=t^3-t^2+2t-10$ است:

$$t_1=1\,s \Rightarrow x_1=1^3-1^2+2(1)-10=-8\,m \qquad t_2=2\,s \Rightarrow x_2=2^3-2^2+2(2)-10=-2\,m$$

$$t_3=3\,s \Rightarrow x_3=3^3-3^2+2(3)-10=14\,m \qquad t_4=4\,s \Rightarrow x_4=4^3-4^2+2(4)-10=46\,m$$

با توجه به مقدارهای به دست آمده، انتخاب ۲ یعنی $t=2\,s$ کار خیلی راحتی است.

۴۹- گزینهٔ۴ کافی است $t_0=0$ و $t_1=2\,s$ را در معادلهٔ حرکت قرار دهیم و x_0 و x_1 را به دست آوریم:

$$\begin{cases} t_0=0 \Rightarrow x_0=2(0)^3+6(0)-2=-2\,m \\ t_1=2\,s \Rightarrow x_1=2(2)^3+6(2)-2=26\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_1-x_0=26-(-2)=28\,m$$

۵۰- گزینهٔ۳ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $t_1=1\,s$ تا $t_2=2\,s$؛ ابتدا $t_1=1\,s$ را در معادلهٔ مکان ـ زمان یعنی $x=2t^2-4$ قرار می‌دهیم و x_1 را به دست می‌آوریم:

$$x=2t^2-4 \xrightarrow{t_1=1s} x_1=2(1)^2-4=2-4=-2\,m$$

حالا $t_2=2\,s$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$x=2t^2-4 \xrightarrow{t_2=2\,s} x_2=2(2)^2-4=8-4=4\,m$$

جابه‌جایی برابر با x_2-x_1 است؛ پس داریم:

$$\Delta x=x_2-x_1=4-(-2)=6\,m \text{ :جابه‌جایی}$$

۵۱- گزینهٔ۳ **گام اول:** ابتدا جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم یعنی از $t_1=4\,s$ تا $t_2=6\,s$ را به دست می‌آوریم. برای این کار باید مقدار t_1 و t_2 را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار دهیم:

$$x=t^3-2t^2+t+1 \xrightarrow{t_1=4\,s} x_1=(4)^3-2(4)^2+4+1=64-32+4+1=37\,m$$

$$x=t^3-2t^2+t+1 \xrightarrow{t_2=6\,s} x_2=(6)^3-2(6)^2+6+1=216-72+6+1=151\,m$$

بنابراین جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم برابر است با:

$$\Delta x_1=x_2-x_1=151-37=114\,m$$

گام دوم: حالا جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ دوم یعنی از $t'_1=3\,s$ تا $t_2=6\,s$ را به دست می‌آوریم. مکان جسم در $t_2=6\,s$ را که در بالا محاسبه کردیم. پس یک راست سراغ مکان در $t'_1=3\,s$ می‌رویم:

$$x=t^3-2t^2+t+1 \xrightarrow{t'_1=3\,s} x'_1=(3)^3-2(3)^2+3+1=27-18+3+1=13\,m$$

با داشتن مکان در $t_2=6\,s$، جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ دوم را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta x'=x_2-x'_1=151-13=138\,m$$

گام سوم: با به دست آوردن نسبت Δx به $\Delta x'$ کار را تمام می‌کنیم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'}=\frac{114}{138}=\frac{57}{69}$$

۵۲- گزینهٔ۱ برای به دست آوردن جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $(1s, 2s)$ تنها کافی است، مکان متحرک در $t=2s$ را منهای مکان متحرک در $t=1s$ کنیم:

$$y=5\sin\frac{\pi t}{2}+3t-4 \Rightarrow \begin{cases} y_1=5\sin(\frac{\pi(1)}{2})+3(1)-4=4m \\ y_2=5\sin(\frac{\pi(2)}{2})+3(2)-4=2\,m \end{cases} \Rightarrow \vec{d}=(y_2-y_1)\vec{j}=(2-4)\vec{j}=(-2)\vec{j}=-2\vec{j}$$

۵۳- گزینهٔ۲ **گام اول:** ۲ ثانیهٔ اول حرکت یعنی از $t_0=0$ تا $t_1=2\,s$؛ پس برای به دست آوردن جابه‌جایی با توجه به معادلهٔ $x=3t^2-6t$، داریم:

$$\begin{cases} t_0=0 \Rightarrow x_0=3(0)^2-6(0)=0 \\ t_1=2\,s \Rightarrow x_1=3(2)^2-6(2)=12-12=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_1-x_0=0$$

گام دوم: سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0}{2}=0$$

۵۴- گزینهٔ۲ **گام اول:** ۲ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $t_1=2\,s$ تا $t_2=4\,s$. در این بازه جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$x=t^3-3t-8 \Rightarrow \begin{cases} t_1=2\,s \Rightarrow x_1=2^3-3(2)-8=8-6-8=-6\,m \\ t_2=4\,s \Rightarrow x_2=4^3-3(4)-8=64-12-8=44\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_2-x_1=44-(-6)=50\,m$$

گام دوم: حالا سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{50}{2}=25\,m/s$$

۵۵- گزینهٔ۱ لحظه‌ای سرعت متوسط متحرک صفر می‌شود که جابه‌جایی متحرک صفر شود؛ پس کافی است معادله را از مکان ـ زمان به جابه‌جایی ـ زمان تبدیل کنیم:

$$x=t^2-t\underbrace{-12}_{x_0} \Rightarrow x-x_0=t^2-t \Rightarrow \Delta x=t(t-1) \xrightarrow{\Delta x=0} \begin{cases} t=0 \\ t=1s \end{cases}$$

$t=0$ که همان مبدأ زمان است و ما کاری با آن نداریم. در نتیجه $t=1s$ همان لحظه‌ای است که سرعت متوسط متحرک در کل حرکت صفر می‌شود.

۵۶- گزینهٔ ۲ در درس‌نامه توضیح دادیم که اگر معادلهٔ مکان ـ زمان از نوع درجهٔ ۲ (یعنی به صورت $x = At^2 + Bt + C$) باشد، در لحظهٔ $t = \frac{-B}{2A}$، مقدار x بیشینه یا کمینه است و در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد. پس داریم:

$$t_{\text{تغییر جهت}} = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-9)}{2\times 3} = \frac{9}{6} = 1/5\,s$$

اینم جایزهٔ دوستایی که پاسخ این تست رو خوندن و حالا می‌خوان تست بعدی رو پاسخ بدن:

چون ضریب t^2 مثبت است، x در لحظهٔ $t = 1/5\,s$ کمینه یا مینیمم است. یعنی متحرک قبل از $t = 1/5\,s$ در جهت منفی محور x و بعد از آن در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند.

۵۷- گزینهٔ ۲ **گام اول:** لحظهٔ تغییر جهت متحرک را حساب می‌کنیم. چون معادلهٔ مکان ـ زمان از نوع درجهٔ ۲ است داریم:

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-24}{2(-4)} = 3\,s$$

گام دوم: چون ضریب t^2 منفی است، x در لحظهٔ $t = 3\,s$ بیشینه است. پس از لحظهٔ $t = 0$ تا $t = 3\,s$، x در حال زیادشدن است؛ یعنی متحرک در جهت مثبت حرکت می‌کند و پس از $t = 3\,s$ جهت حرکت متحرک عوض می‌شود.

۵۸- گزینهٔ ۲ **گام اول:** باید تشخیص بدهیم چند ثانیه علامت x مثبت ($x > 0$) بوده است؛ یعنی:

$$-3t^2 + 15t - 18 > 0$$

پس ریشه‌های معادلهٔ $x = -3t^2 + 15t - 18$ را به ازای $x = 0$ پیدا می‌کنیم و بعد معادله را تعیین علامت می‌کنیم:

$$-3t^2 + 15t - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2\,s \\ t_2 = 3\,s \end{cases}$$

گام دوم: در ریاضی خوانده‌اید که علامت عبارت درجهٔ ۲ (مثل $x = At^2 + Bt + C$) بین دو ریشه، مخالف علامت A است؛ پس داریم:

t(s)	0		2		3		$+\infty$
x		−	0	+	0	−	

یعنی در بازهٔ $(2\,s, 3\,s)$ متحرک در مکان‌های مثبت است. پس در کل متحرک $1\,s$ در طرف مثبت محور x است.

(این تست رو با رسم نمودار مکان ـ زمان هم می‌تونید جواب بدید.)

۵۹- گزینهٔ ۲ در این‌گونه تست‌ها باید علاوه بر به دست آوردن مکان اولیه، مکان در دو لحظهٔ دیگر را هم به دست آوریم؛ این لحظات، لحظهٔ تغییر جهت و لحظهٔ پایان بازه (این‌جا $t = 4\,s$) است. به همین خاطر اول به سراغ تعیین لحظهٔ تغییر جهت می‌رویم. همان‌طور که در درس‌نامه دیدید، اگر معادلهٔ مکان ـ زمان از درجهٔ ۲ باشد، متحرک در $t = -\frac{B}{2A}$ تغییر جهت می‌دهد:

$$t = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-6)}{2(1)} = 3s$$

حالا مقدارهای 0، 3s و 4s را در معادلهٔ $x = t^2 - 6t + 8$ قرار می‌دهیم و مکان متحرک را در این لحظه‌ها به دست می‌آوریم:

$t = 0 \Rightarrow x_0 = (0)^2 - 6(0) + 8 = 8$ (مکان اولیهٔ متحرک)

$t = 3\,s \Rightarrow x_3 = (3)^2 - 6(3) + 8 = -1$ (مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت)

$t = 4\,s \Rightarrow x_4 = (4)^2 - 6(4) + 8 = 0$ (مکان متحرک در انتهای بازه)

همان‌طور که می‌بینید در بازهٔ زمانی $(0, 4s)$ متحرک در لحظهٔ تغییر جهت بیشترین فاصله را از مکان اولیه‌اش دارد که این فاصله برابر است با:

$$|x_3 - x_0| = |-1 - 8| = |-9| = 9m$$

۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ را پیدا می‌کنیم:

$$x = t^2 - 6t + 5 \Rightarrow x = (t-1)(t-5) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \\ t_2 = 5s \end{cases}$$

پس متحرک در لحظه‌های $1\,s$ و $5\,s$ از مبدأ عبور کرده است. هم‌چنین متحرک در لحظهٔ وسطِ بازهٔ t_1 تا t_2 (یعنی $\frac{t_1 + t_2}{2}$) تغییر جهت داده است. *(البته لحظهٔ تغییر جهت رو با رابطهٔ $t' = \frac{-B}{2A}$ هم می‌تونید حساب کنید.)*

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1+5}{2} = 3\,s$$

t(s)	0		1		3		5	
x(m)	5	+	0	−	−4	−	0	+
	در حال نزدیک‌شدن به مبدأ		در حال دورشدن از مبدأ		در حال نزدیک‌شدن به مبدأ		در حال دورشدن از مبدأ	

پس می‌توانیم بگوییم متحرک قبل از $t_1 = 1s$ در حال نزدیک‌شدن به مبدأ بوده؛ در بازهٔ $t_1 = 1s$ تا $t' = 3\,s$ از مبدأ دور شده؛ در بازهٔ $t' = 3\,s$ تا $t_2 = 5\,s$ به سمت مبدأ رفته و بعد از $t_2 = 5\,s$ از مبدأ فاصله گرفته است.

از بین گزینه‌ها $t = 4/5\,s$ در بازهٔ $(3\,s, 5\,s)$ قرار دارد.

جدول تعیین علامت رو هم بکشیم تا خیالمون راحت بشه. این تست رو می‌تونید با رسم نمودار هم جواب بدید، ولی ما دوست داشتیم شما این روش رو هم تمرین کنید.

۶۱- گزینهٔ ۲ **گام اول:** معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک به صورت $x = t^2 + Bt + C$ است؛ پس مکان اولیهٔ متحرک برابر است با:

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = (0)^2 + B(0) + C = C$$

گام دوم: در درس‌نامه دیدید که اگر معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی برحسب t از درجهٔ ۲ باشد، متحرک در $t = -\frac{B}{2A}$ تغییر جهت می‌دهد. در این تست مقدار $A = 1$ است. با توجه به این موضوع مکان در لحظهٔ تغییر جهت را تعیین می‌کنیم:

$$t = \frac{-B}{2A} = -\frac{B}{2} \Rightarrow x_1 = (-\frac{B}{2})^2 + B(-\frac{B}{2}) + C = \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{2} + C = -\frac{B^2}{4} + C$$

گام سوم: جابه‌جایی برابر با $\Delta\vec{x} = (x_1 - x_0)\vec{i}$ است؛ پس:

$$(-6/25)\vec{i} = (x_1 - x_0)\vec{i} \Rightarrow -6/25 = x_1 - x_0$$

$$\Rightarrow (-\frac{B^2}{4} + C) - C = -6/25 \Rightarrow -\frac{B^2}{4} = -6/25 \Rightarrow B^2 = 4\times 6/25 = 25 \Rightarrow B = \begin{cases} 5 \ (\text{غ ق ق}) \\ -5 \ (\text{ق ق}) \end{cases}$$

حتماً برایتان سؤال ایجاد شده است که چرا $B = 5$ غیر قابل قبول است. این موضوع به خاطر این است که اگر B را مساوی ۵ قرار دهیم، لحظهٔ تغییر جهت $(-\frac{B}{2A})$ منفی می‌شود که این موضوع غیر قابل قبول است.

۶۲- گزینهٔ ۲ در بازهٔ زمانی‌ای که تغییر جهت داشته باشیم؛ مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی با هم برابر نیست پس لحظهٔ تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

$$t=-\frac{B}{۲A}=\frac{-(-۹)}{۲\times۶}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵\,s$$

این لحظه در بازهٔ $(۰/۵s,۱s)$ است؛ بنابراین در بازهٔ ذکرشده در ۲ مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی با هم برابر نیستند.

۶۳- گزینهٔ ۲ اگر به معادلهٔ $x=t^۳+۴t+۱$ دقت کنید، می‌بینید که با افزایش t، همواره x افزایش می‌یابد؛ یعنی متحرک به یک سمت حرکت می‌کند و جابه‌جایی و مسافت پیموده‌شده برابر است. ثانیهٔ سوم حرکت هم یعنی از $t=۲s$ تا $t=۳s$؛ پس:

$$x=t^۳+۴t+۱\xrightarrow{t=۲s}x_۲=(۲)^۳+۴(۲)+۱=۱۷\,m$$

$$x=t^۳+۴t+۱\xrightarrow{t=۳s}x_۳=(۳)^۳+۴(۳)+۱=۴۰\,m\Rightarrow l=\Delta x=x_۳-x_۲=۴۰-۱۷=۲۳\,m$$

۶۴- گزینهٔ ۴ مسافت طی‌شده برابر با مجموع اندازهٔ جابه‌جایی قبل و بعد از تغییر جهت است؛ پس ابتدا لحظهٔ تغییر جهت را تعیین می‌کنیم:

$$t=-\frac{B}{۲A}=\frac{-(-۲۴)}{۲\times۶}=\frac{۲۴}{۱۲}=۲s$$

حالا اندازهٔ جابه‌جایی را در دو بازهٔ زمانی $(۰,۲s)$ و $(۲s,۳s)$ محاسبه می‌کنیم:

بازهٔ زمانی $(۰,۲s)$: $|\Delta x_۱|=|x_۲-x_۰|=|(۶(۲)^۲-۲۴(۲)+۱۸)-(۶(۰)^۲-۲۴(۰)+۱۸)|=|-۲۴|=۲۴\,m$

بازهٔ زمانی $(۲s,۳s)$: $|\Delta x_۲|=|x_۳-x_۲|=|(۶(۳)^۲-۲۴(۳)+۱۸)-(۶(۲)^۲-۲۴(۲)+۱۸)|=|۶|=۶\,m$

بنابراین مسافت طی‌شده برابر است با:

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=۲۴+۶=۳۰\,m$$

۶۵- گزینهٔ ۱ **گام اول:** باید لحظهٔ تغییر جهت را تعیین کنیم:

$$t=-\frac{B}{۲A}=\frac{-۱}{۲(۱)}=-\frac{۱}{۲}\ (\text{غ‌ق‌ق})$$

با توجه به محاسبات بالا متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و در نتیجه در دو ثانیهٔ اول حرکت مسافت طی‌شده برابر با اندازهٔ جابه‌جایی است:

$$l=|\Delta x|=|x_۲-x_۰|=|(۴+۲-۲)-(۰+۰-۲)|=۶\,m$$

۶۶- گزینهٔ ۴ جابه‌جایی را در ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۲s$ به دست می‌آوریم:

$$x=t^۲-۳t+۲\xrightarrow{t_۱=۱s}x_۱=(۱)^۲-۳(۱)+۲=۱-۳+۲=۰$$

$$x=t^۲-۳t+۲\xrightarrow{t_۲=۲s}x_۲=(۲)^۲-۳(۲)+۲=۴-۶+۲=۰$$

در هر دو لحظه مکان جسم صفر است؛ پس جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم صفر است. با توجه به این‌که جابه‌جایی صفر است، دیگر لازم نیست مسافت پیموده‌شده را به دست آوریم، چون نسبت $\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{مسافت پیموده‌شده}}$ برابر صفر خواهد بود. *(البته ما مطمئنیم شما بلدید مسافت طی‌شده رو حساب کنید!)*

۶۷- گزینهٔ ۳ **گام اول:** بردار مکان متحرک در لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ عبور می‌کند و از یک طرف به طرف دیگر آن می‌رود، تغییر جهت می‌دهد. این لحظه‌ها ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان است؛ به کمک تجزیه داریم:

$$x=۲t^۲-۱۶t+۲۴=۲(t-۲)(t-۶)\xrightarrow{x=۰}۰=۲(t-۲)(t-۶)\Rightarrow t=\begin{cases}۲s\\۶s\end{cases}$$

گام دوم: برای به دست آوردن مقدار مسافت طی‌شده به لحظهٔ تغییر جهت نیاز داریم:

$$t=\frac{-B}{۲A}=\frac{-(-۱۶)}{۲(۲)}=۴\,s$$

گام سوم: اگر جابه‌جایی از $t=۲s$ تا $t=۴s$ را $\Delta x_۱$ و جابه‌جایی از $t=۴s$ تا $t=۶s$ را $\Delta x_۲$ بگیریم، داریم:

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=|(x_۴-x_۲)|+|(x_۶-x_۴)|$$

$$=|(۲(۴)^۲-۱۶(۴)+۲۴)-(۲(۲)^۲-۱۶(۲)+۲۴)|+|(۲(۶)^۲-۱۶(۶)+۲۴)-(۲(۴)^۲-۱۶(۴)+۲۴)|=|(-۸)-(۰)|+|۰-(-۸)|=۱۶\,m$$

۶۸- گزینهٔ ۱ **گام اول:** اندازهٔ جابه‌جایی را در ۴ ثانیهٔ اول تعیین می‌کنیم:

$$|\Delta x_T|=|x_۴-x_۰|=|(-(۴)^۲+۶(۴)+x_۰)-(-(۰)^۲+۶(۰)+x_۰)|=|(-۱۶+۲۴+x_۰)-x_۰|=|-۱۶+۲۴|=۸\,m$$

گام دوم: لحظهٔ تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

$$t=-\frac{B}{۲A}=\frac{-۶}{۲(-۱)}=۳\,s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر با مجموع اندازهٔ جابه‌جایی قبل و بعد از تغییر جهت است:

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=|(x_۳-x_۰)|+|(x_۴-x_۳)|$$

$$=|(-(۳)^۲+۶(۳)+x_۰)-(-(۰)^۲+۶(۰)+x_۰)|+|(-(۴)^۲+۶(۴)+x_۰)-(-(۳)^۲+۶(۳)+x_۰)|$$

$$=|(۹+x_۰)-x_۰|+|(۸+x_۰)-(۹+x_۰)|=|۹|+|-۱|=۱۰\,m$$

گام چهارم: به کمک $|\Delta x_T|=۸\,m$ و $l=۱۰\,m$ داریم:

$$l-|\Delta x_T|=۱۰-۸=۲\,m$$

۶۹- گزینهٔ ۳ **گام اول:** ابتدا باید ببینیم که متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه:

$$t=-\frac{B}{۲A}=\frac{-(-۴)}{۲(۴)}=\frac{۱}{۲}s$$

پس متحرک در $t=\frac{۱}{۲}s$ تغییر جهت می‌دهد.

گام دوم: مسافت طی‌شده برابر با اندازهٔ جابه‌جایی در بازهٔ $(۰, \frac{۱}{۲}s)$ به اضافهٔ اندازهٔ جابه‌جایی در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}s, ۲s)$ است:

$$l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = |(x_{\frac{۱}{۲}} - x_۰)| + |(x_۲ - x_{\frac{۱}{۲}})| = |(۴(\frac{۱}{۲})^۲ - ۴(\frac{۱}{۲}) + ۱) - (۴(۰) - ۴(۰) + ۱)| + |(۴(۲)^۲ - ۴(۲) + ۱) - (۴(\frac{۱}{۲})^۲ - ۴(\frac{۱}{۲}) + ۱)|$$

$$= |(۰) - (۱)| + |(۹) - (۰)| = ۱ + ۹ = ۱۰\,m$$

گام سوم: تندی متوسط برابر $\frac{l}{\Delta t}$ است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۰}{۲} = ۵\,m/s$$

۷۰- **گزینهٔ ۱** **گام اول:** جابه‌جایی را در بازهٔ $(۰, ۵s)$ حساب می‌کنیم و به کمک آن مقدار B را تعیین می‌کنیم. با استفاده از این‌که اندازهٔ سرعت متوسط $۴\,m/s$ است، داریم:

$$\Delta x = v_{av}\Delta t = ۴ \times ۵ = ۲۰\,m \quad (I)$$

از طرفی می‌دانیم $\Delta x = x_۵ - x_۰$ است:

$$\Delta x = x_۵ - x_۰ = ((۵)^۲ + B(۵) - ۲) - ((۰)^۲ + B(۰) - ۲) = ۲۵ + ۵B \quad (II)$$

$$I, II: ۲۰ = ۲۵ + ۵B \Rightarrow -۵ = ۵B \Rightarrow B = -۱$$

گام دوم: لحظهٔ تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۱)}{۲(۱)} = \frac{۱}{۲}s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در بازهٔ $(۰, ۵s)$ برابر است با:

$$l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = |(x_{\frac{۱}{۲}} - x_۰)| + |(x_۵ - x_{\frac{۱}{۲}})|$$

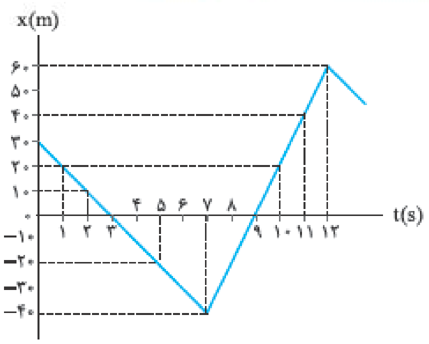
$$= |(\frac{۱}{۲})^۲ + (-۱)(\frac{۱}{۲}) - ۲) - (-۲)| + |((۵)^۲ + (-۱)(۵) - ۲) - ((\frac{۱}{۲})^۲ + (-۱)(\frac{۱}{۲}) - ۲)|$$

$$= |((\frac{۱}{۴}) - \frac{۱}{۲} - ۲) + ۲| + |(۲۵ - ۵ - ۲ - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + ۲)| = |-۰/۲۵| + |۲۰/۲۵| = ۲۰/۵\,m$$

گام چهارم: مسافت طی‌شده برابر $l = ۲۰/۵\,m$ و مدت‌زمان طی مسافت $\Delta t = ۵s$ است؛ پس تندی برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۲۰/۵}{۵} = ۴/۱\,m/s$$

(درس ۴) نمودار مکان ـ زمان در حرکت راست خط



یک روش برای مشخص‌کردن مکان متحرک در هر لحظه، رسم نمودار مکان ـ زمان آن است. (در واقع نمودار مکان ـ زمان، همان معادلهٔ مکان ـ زمان است ولی به صورت نمودار!)

محور قائم این نمودار، محور مکان (x) است (که هم جهت منفی دارد و هم مثبت) و محور افقی این نمودار، محور زمان (t) است. (که فقط مقدار مثبت دارد.)

مثلاً شکل روبه‌رو، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند.

آن‌چه از نمودار مکان ـ زمان می‌توانیم بفهمیم

نمودار مکان ـ زمان همهٔ اطلاعات حرکت جسم را در خود دارد که ما بعضی از آن‌ها را الان می‌گوییم:

۱) هر نقطه از نمودار نشان می‌دهد که متحرک در هر لحظه در کجای محور x است. مثلاً در نمودار روبه‌رو متحرک در لحظهٔ $t = ۳\,s$ و $t = ۹\,s$ در حال عبور از مبدأ مکان $(x = ۰)$ است و در لحظهٔ $t = ۲\,s$ در مکان $x = ۱۰\,m$ و در لحظهٔ $t = ۷\,s$ در مکان $x = -۴۰\,m$ و در لحظهٔ $t = ۱۱\,s$ در مکان $x = ۴۰\,m$ است.

۲) در هر بازهٔ زمانی دلخواه می‌توانیم تشخیص دهیم که متحرک چه‌قدر جابه‌جا شده است. مثلاً در نمودار بالا، متحرک در بازهٔ زمانی $(۲\,s, ۱۱\,s)$ از مکان $x_۲ = ۱۰\,m$ به مکان $x_{۱۱} = ۴۰\,m$ رفته است.

پس جابه‌جایی آن در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\Delta x = x_{۱۱} - x_۲ = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰\,m$$

۳) نقطه‌های اکسترمم (بیشینه و کمینهٔ) نمودار نشان‌دهندهٔ لحظه‌های تغییر جهت متحرک است. مثلاً در نمودار بالا، متحرک در لحظهٔ $t = ۷\,s$ در مکان $x_۷ = -۴۰\,m$ و در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ در مکان $x_{۱۲} = ۶۰\,m$ تغییر جهت داده است.

۴) با توجه به مکان‌های تغییر جهت متحرک، می‌توانیم مسافت طی‌شده را برای هر بازهٔ زمانی دلخواه حساب کنیم. مثلاً این متحرک در بازهٔ زمانی $(۲\,s, ۱۱\,s)$ ابتدا از مکان $x_۲ = ۱۰\,m$ در جهت منفی محور x به مکان $x_۷ = -۴۰\,m$ و سپس در جهت مثبت محور x از مکان $x_۷ = -۴۰\,m$ به مکان $x_{۱۱} = +۴۰\,m$ رفته است؛ یعنی $۵۰\,m$ در جهت منفی و $۸۰\,m$ در جهت مثبت پیموده است که جمعاً می‌شود $۱۳۰\,m$:

$$l = |x_۷ - x_۲| + |x_{۱۱} - x_۷| = |-۴۰ - ۱۰| + |۴۰ - (-۴۰)| \Rightarrow l = ۵۰ + ۸۰ = ۱۳۰\,m$$

۵) با داشتن جابه‌جایی و مسافت برای هر بازهٔ زمانی دلخواه، می‌توانیم اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط را هم حساب کنیم. مثلاً برای بازهٔ زمانی $t_۲ = ۲\,s$ تا $t_{۱۱} = ۱۱\,s$ در نمودار بالا داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳۰}{۱۱ - ۲} = \frac{۳۰}{۹} = \frac{۱۰}{۳}\,m/s$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۳۰}{۱۱ - ۲} = \frac{۱۳۰}{۹}\,m/s$$

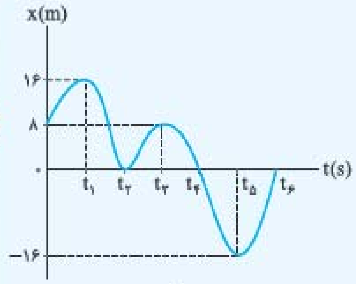
حواستون باشه! اگه علامت جابه‌جایی و سرعت متوسط منفی بشه یعنی متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده.

۶) هر جا که شیب نمودار مثبت (نمودار رو به بالا) باشد، یعنی متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و هر جا شیب نمودار منفی (نمودار رو به پایین) باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. مثلاً در نمودار صفحهٔ قبل، متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا ۷ s در جهت منفی و در بازهٔ زمانی ۷ s تا ۱۲ s در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

۷) در لحظه‌ای که نمودار بیشترین فاصله را از محور t دارد، متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد. مثلاً در نمودار صفحهٔ قبل، در لحظهٔ t = ۱۲ s متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ مکان است.

حالا وقتشه چندتا تست خوب دربارهٔ نکته‌های بالا ببینیم:

تست نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام بازهٔ زمانی، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک بیشینه است و در این بازه متحرک چند متر پیموده است؟

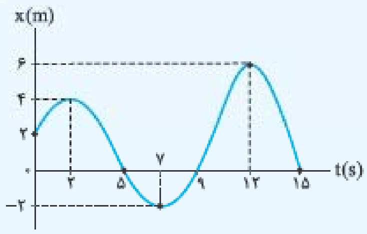


۱) ۴۸ ـ (t_1, t_5)
۲) ۳۲ ـ (t_1, t_5)
۳) ۷۲ ـ $(0, t_6)$
۴) ۸ ـ $(0, t_6)$

پاسخ گزینهٔ۱ **گام اول:** متحرک در لحظهٔ t_1 در بیشترین فاصله از مبدأ در طرف مثبت و در لحظهٔ t_5 در بیشترین فاصله از مبدأ در طرف منفی محور x است؛ پس بیشترین جابه‌جایی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5 اتفاق افتاده است.

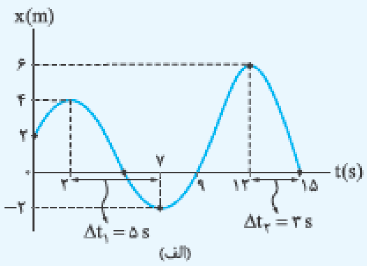
گام دوم: وقتی سؤال می‌پرسد «متحرک چند متر پیموده است؟» شما باید مسافت پیموده‌شده را حساب کنید. با توجه به نمودار، این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 ، ۱۶ m در جهت منفی، در بازهٔ t_2 تا t_3 ، ۸ m در جهت مثبت، در بازهٔ t_3 تا t_4 ، ۸ m در جهت منفی و در بازهٔ t_4 تا t_5 هم ۱۶ m در جهت منفی پیموده است؛ پس جمعاً می‌شود: $l = 16 + 8 + 8 + 16 = 48\,m$

تست نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. این متحرک به ترتیب از راست به چپ مجموعاً چند ثانیه در جهت منفی محور x حرکت کرده است و چند ثانیه در طرف مثبت محور x بوده است؟



۱) ۱۱ ـ ۸
۲) ۱۱ ـ ۴
۳) ۵ ـ ۸
۴) ۵ ـ ۴

پاسخ گزینهٔ۱ **حواستون باشه!** این سؤال دو چیز مختلف را پرسیده؛ اول این‌که متحرک چند ثانیه در جهت منفی محور x حرکت کرده است؟ برای جواب‌دادن این بخش سؤال باید ببینیم در چه بازهٔ زمانی، شیب نمودار مکان ـ زمان منفی است (یعنی نمودار رو به پایین است).



(الف)

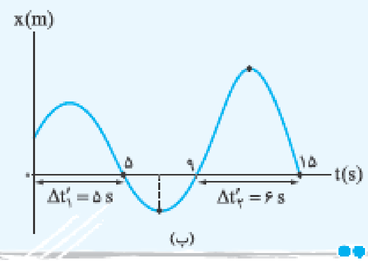
همین‌طور که در شکل (الف) نشان داده‌ایم، در بازهٔ زمانی (۲ s , ۷ s) و همچنین (۱۲ s , ۱۵ s) شیب نمودار منفی و متحرک در جهت منفی محور x حرکت کرده است؛ پس داریم:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = (7-2) + (15-12) = 5 + 3 = 8\,s$$

(۲ و ۴ غلط‌اند.)

قسمت دوم سؤال می‌پرسد که متحرک چند ثانیه در طرف مثبت محور x بوده است؟ باید دقت کنید که این‌جا جهت حرکت متحرک را نخواسته بلکه جمع زمان‌هایی که نمودار بالای محور t است را خواسته است. در شکل (ب) می‌بینید که متحرک در دو بازهٔ زمانی $\Delta t'_1$ و $\Delta t'_2$ در طرف مثبت محور x حرکت می‌کند:

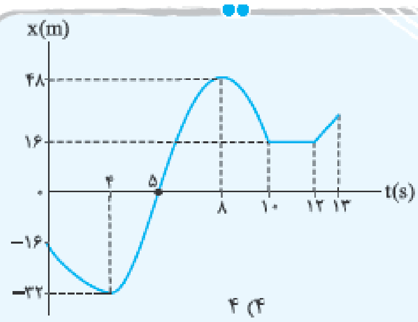
$$\Delta t'_1 + \Delta t'_2 = (5-0) + (15-9) = 5 + 6 = 11\,s$$



(ب)

(می‌تونستید بگید کل حرکت ۱۵ s است و متحرک ۴ s در طرف منفی محور x بوده، پس ۱۱ = ۴ − ۱۵ ثانیه در طرف مثبت حرکت کرده.)

تست نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. چندتا از عبارت‌های زیر دربارهٔ وضعیت حرکت این متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۳ s نادرست است؟



الف) دو بار تغییر جهت داده است.
ب) در لحظهٔ t = ۱۳ s بیشترین فاصله از مبدأ مکان را دارد.
پ) در بازهٔ زمانی (۸ s , ۱۲ s) مسافت پیموده‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است.
ت) در طول مسیر، ۲ s به طور کامل توقف کرده است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

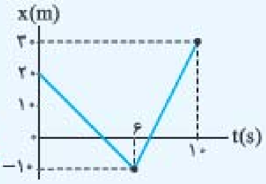
پاسخ گزینهٔ ۲ نمودار در لحظهٔ $t=۸\,s$ بیشترین فاصله را از محور t دارد؛ یعنی در این لحظه متحرک در دورترین فاصله از مبدأ مکان است. (پس عبارت (ب) نادرست است.)

برای تشخیص تغییر جهت متحرک باید به نقطه‌هایی نگاه کنیم که جهت حرکت جسم از مثبت به منفی یا بالعکس تغییر کرده. متحرک سه بار در لحظه‌های ۴s، ۸s و ۱۲s تغییر جهت داده است. (پس عبارت (الف) نادرست است.) اما بررسی عبارت‌های درست:

پ) در بازهٔ زمانی ۸s تا ۱۲s متحرک تغییر جهت نداده است، پس در این بازهٔ زمانی اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت برابر است.

ت) در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۱۲s متحرک به طور کامل متوقف شده است. (البته دو بار هم در لحظه‌های $t=۴\,s$ و $t=۸\,s$ فقط برای یک لحظه متوقف شده و تغییر جهت داده است.)

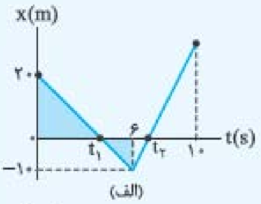
تست **نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. بازهٔ زمانی بین دو عبور متوالی متحرک از مبدأ مکان چند ثانیه است؟**



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

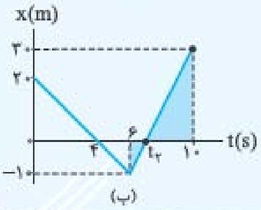
پاسخ گزینهٔ ۲ به نمودار روبه‌رو نگاه کنید.

متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 از مبدأ مکان عبور کرده است؛ پس باید این لحظه‌ها را پیدا کنیم. یکی از روش‌های حل این سؤال، کمک‌گرفتن از تشابه مثلث‌ها است.



دو مثلث رنگی در شکل (الف) متشابه‌اند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۲۰}{t_1-۰}=\frac{|-۱۰|}{۶-t_1} \Rightarrow ۱۰t_1=۱۲۰-۲۰t_1 \Rightarrow t_1=\frac{۱۲۰}{۳۰}=۴\,s$$



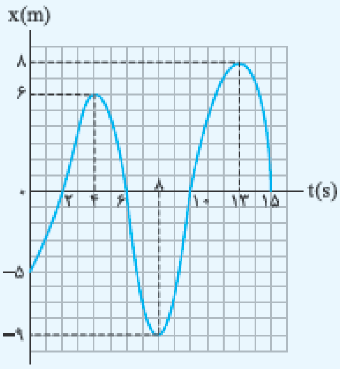
با همین روش لحظهٔ t_2 را هم حساب می‌کنیم. در شکل (ب) نسبت تشابه دو مثلث رنگی را می‌نویسیم:

$$\frac{۳۰}{۱۰-t_2}=\frac{|-۱۰|}{t_2-۶} \Rightarrow ۳۰t_2-۱۸۰=۱۰۰-۱۰t_2 \Rightarrow ۴۰t_2=۲۸۰ \Rightarrow t_2=۷\,s$$

حالا که t_1 و t_2 را داریم، می‌توانیم بازهٔ زمانی بین دو عبور متوالی از مبدأ مکان را هم حساب کنیم:

$$\Delta t=t_2-t_1=۷-۴=۳\,s$$

تست **نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک بیشینه می‌شود، به ترتیب از راست به چپ، چند متر بر ثانیه است؟**



۱) ۰/۳ ـ ۲/۷
۲) ۱ ـ ۲/۷
۳) ۰/۳ ـ ۳/۳
۴) ۱ ـ ۳/۳

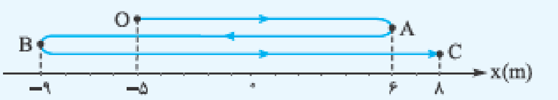
پاسخ گزینهٔ ۴ **گام اول:** مکان اولیهٔ متحرک $x_0=-۵\,m$ است و وقتی که متحرک در بیشترین فاصله از این نقطه قرار می‌گیرد، جابه‌جایی‌اش بیشینه می‌شود. از روی نمودار مشخص است که در لحظهٔ $t=۱۳\,s$ متحرک در مکان $x=۸\,m$ و در بیشترین فاصله از $x_0=-۵\,m$ قرار دارد؛ پس باید اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط را در بازهٔ $(۰,۱۳\,s)$ حساب کنیم.

گام دوم: ابتدا اندازهٔ سرعت متوسط را (که راحت‌تره) حساب می‌کنیم:

$$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{|x_{۱۳}-x_0|}{۱۳-۰}=\frac{|۸-(-۵)|}{۱۳}=۱\,m/s$$

(پس قطعاً ۱ و ۳ نادرست‌اند.)

گام سوم: برای محاسبهٔ تندی متوسط اول باید مسافت را در بازهٔ $(۰,۱۳\,s)$ مشخص کنیم و برای این کار باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌هایی تغییر جهت داده است. با توجه به نمودار، متحرک در بازهٔ $(۰,۴\,s)$ از مکان $x_0=-۵\,m$ به مکان $x_4=۶\,m$ و در بازهٔ $(۴\,s,۸\,s)$ از مکان $x_4=۶\,m$ به مکان $x_8=-۹\,m$ و در بازهٔ $(۸\,s,۱۳\,s)$ از مکان $x_8=-۹\,m$ به مکان $x_{۱۳}=۸\,m$ رفته است (*در شکل مقابل این رفت و برگشت‌ها رو روی محور نشون داریم*)؛ پس مسافت کل در بازهٔ زمانی $(۰,۱۳\,s)$ برابر می‌شود با:

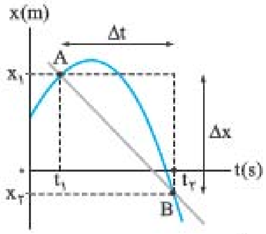


$$l=|x_4-x_0|+|x_8-x_4|+|x_{۱۳}-x_8|=|۶-(-۵)|+|-۹-۶|+|۸-(-۹)|=۱۱+۱۵+۱۷=۴۳\,m$$

حالا می‌توانیم تندی متوسط را هم محاسبه کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۴۳}{۱۳-۰}=\frac{۴۳}{۱۳}\,m/s\simeq ۳/۳\,m/s$$

سرعت متوسط و مفهوم شیب خط



شکل روبه‌رو نمودار مکان ـ زمان یک متحرک است. می‌دانید که سرعت متوسط این متحرک در جابه‌جایی جسم از لحظهٔ t_1 تا t_2 برابر است با:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

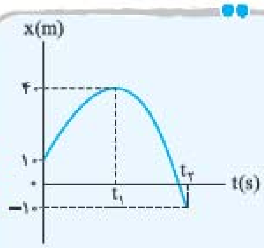
یادآوری ریاضی:

در یک نمودار، محور قائم، محور تابع و محور افقی محور متغیر است و شیب خط عبارت است از نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر.

با توجه به این یادآوری در نمودار مکان ـ زمان، مکان (x) تابع و زمان (t) متغیر است. شیب خطی که نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند (مثل خط AB در نمودار بالا) برابر می‌شود با $\frac{\Delta x}{\Delta t}$؛ یعنی شیب خطی که نمودار مکان ـ زمان را در دو نقطه قطع می‌کند، همان سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است.

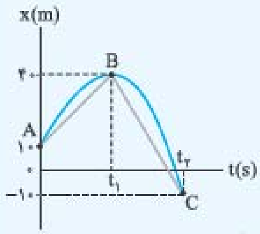
حواستون باشه! *علامت شیب می‌تونه مثبت یا منفی باشه که نشون می‌ده جهت جابه‌جایی متحرک مثبته یا منفی.*

تست شکل روبه‌رو نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در t_1 ثانیهٔ اول برابر با اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 باشد، نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ کدام است؟



۱) $\frac{8}{3}$
۲) $\frac{3}{8}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ **گزینهٔ ۲** **گام اول:** متحرک در t_1 ثانیهٔ اول از مکان $x_0 = 10\ m$ به مکان $x_1 = 40\ m$ رفته است:



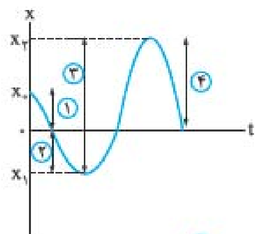
$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 40 - 10 = 30\ m$$

و در بازهٔ t_1 تا t_2 از مکان $x_1 = 40\ m$ به مکان $x_2 = -10\ m$ جابه‌جا شده است:

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = -10 - 40 = -50\ m$$

گام دوم: صورت سؤال می‌گوید اندازهٔ سرعت متوسط در t_1 ثانیهٔ اول برابر با مقدار سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 است. (یعنی شیب خط AB برابر با قدرمطلق شیب خط BC است.)

$$v_{av_{AB}} = |v_{av_{BC}}| \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{t_1 - 0} = \frac{|\Delta x_2|}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{30}{t_1} = \frac{50}{t_2 - t_1} \Rightarrow 3t_2 - 3t_1 = 5t_1 \Rightarrow 3t_2 = 8t_1 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{3}{8}$$

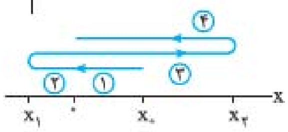


۷۱- گزینهٔ ۴ قسمت شمارهٔ (۱): با توجه به نمودار $x - t$ متحرک از نقطهٔ x_0 که در طرف **مثبت** محور x هاست، شروع به حرکت می‌کند و **به سمت مبدأ می‌رود** (رد ۱ و ۲).

قسمت شمارهٔ (۲): متحرک پس از عبور از مبدأ در خلاف جهت محور x به حرکت خود ادامه می‌دهد و در x_1 که در طرف منفی محور xها است، تغییر جهت می‌دهد.

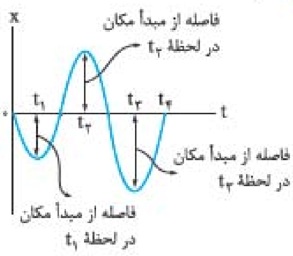
قسمت شمارهٔ (۳): متحرک پس از تغییر جهت در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند و **به مبدأ می‌رسد و پس از عبور از مبدأ** در x_2 که **مثبت** است لحظه‌ای متوقف می‌شود و تغییر جهت می‌دهد (رد ۳).

قسمت شمارهٔ (۴): متحرک پس از تغییر جهت دوباره به سمت مبدأ برمی‌گردد.

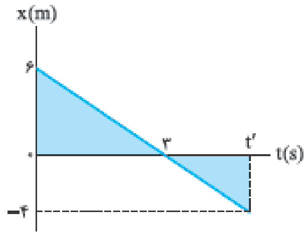


۷۲- گزینهٔ ۱ نمودار مکان ـ زمان باید یک تابع باشد، یعنی به ازای هر t فقط باید یک x یا y وجود داشته باشد (*البته اگه به ازای یک x یا y چند t باشه، اشکالی نداره*). در عمل هم امکان ندارد یک جسم در یک لحظه در بیش از یک مکان حضور داشته باشد. با این استدلال ۲، ۳ و ۴ نادرست‌اند.

۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل می‌بینید که فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در t_3 بیشترین مقدار است.

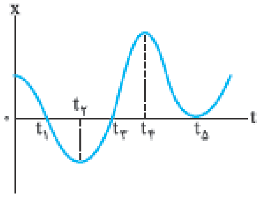


۷۴- گزینهٔ ۳ مسافت طی‌شده توسط متحرک در یک بازهٔ زمانی همواره بزرگ‌تر مساوی صفر است (رد ۱ و ۴). از طرفی مسافت طی‌شده با گذشت زمان هیچ‌گاه کاهش پیدا نمی‌کند (رد ۲). **حواستان باشد** کاهش مسافت به معنی این است که تندی متوسط منفی است که این موضوع امکان‌پذیر نیست.

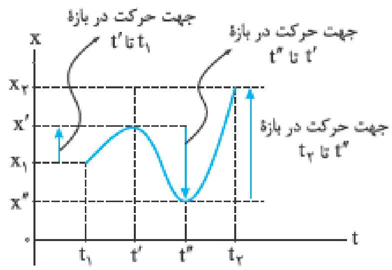


۷۵- گزینهٔ ۱ بردار مکان در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ پس در شکل روبه‌رو محل تقاطع نمودار مکان ـ زمان با محور زمان $t=۳s$ است. ما لحظه‌ای را می‌خواهیم که بردار مکان $\vec{x}=-۴\vec{i}$ باشد. با توجه به شکل روبه‌رو و تشابه دو مثلث رنگ شده داریم:

$$\frac{۶}{|-۴|}=\frac{۳}{t'-۳} \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{۳}{t'-۳} \Rightarrow t'-۳=۲ \Rightarrow t'=۵\,s$$



۷۶- گزینهٔ ۲ بردار مکان در لحظه‌هایی تغییر جهت می‌دهد که نمودار مکان ـ زمان محور t را قطع کند و علامت x تغییر کند. با توجه به شکل روبه‌رو این اتفاق در دو نقطهٔ t_1 و t_3 رخ می‌دهد و بردار مکان در این دو نقطه تغییر جهت می‌دهد. **باید حواستان باشد که** درست است که مقدار x در t_5 صفر می‌شود ولی چون علامت x قبل و بعد از این لحظه تغییر نمی‌کند، جهت بردار مکان تغییر نمی‌کند.



۷۷- گزینهٔ ۳ به نمودار روبه‌رو توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید از t_1 تا t' متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت بوده است و از x_1 به x' رفته است $(x_1<x')$. بعد از آن از t' تا t'' متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و از x' به x'' می‌رود $(x'>x'')$؛ بنابراین در t' یک بار جهت حرکت عوض می‌شود. هم‌چنین در ادامه یعنی در بازهٔ t'' تا t_2 متحرک از x'' شروع به حرکت می‌کند و در جهت مثبت محور x به سمت x_2 می‌رود. بنابراین در t'' نیز متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد. با توجه به آن‌چه گفتیم متحرک از t_1 تا t_2 دو بار تغییر جهت می‌دهد.

تکنیک به تعداد نقطه‌های اکسترمم (بیشینه و کمینه) در نمودار مکان ـ زمان، متحرک تغییر جهت داده است. در این‌جا دو نقطهٔ اکسترمم داریم و متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است.

۷۸- گزینهٔ ۴ در نمودار $x-t$ تغییر جهت زمانی رخ می‌دهد که در یک بازهٔ زمانی مقدار x بیشینه یا کمینه شود؛ پس با توجه به شکل روبه‌رو متحرک در $x=۸\,m$ برای بار اول و در $x=-۶\,m$ برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد. در این تست بردار جابه‌جایی از لحظهٔ شروع حرکت $(x_\circ=۵\,m)$ تا لحظه‌ای که متحرک برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد $(x=-۶\,m)$ را می‌خواهیم:

$$\Delta x=(x-x_\circ)\vec{i}=(-۶-۵)\vec{i}=-۱۱\vec{i}$$

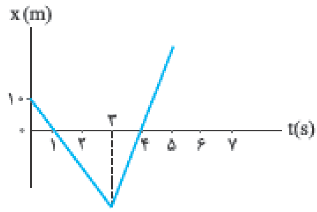
۷۹- گزینهٔ ۱ **گام اول:** ابتدا معادلهٔ خط را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب}=\frac{\circ-(-۲)}{۲-\circ}=\frac{۲}{۲}=۱ \qquad \text{عرض از مبدأ}=-۲ \qquad \text{معادلهٔ خط}: x=۱(t)+(-۲)=t-۲$$

گام دوم: جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم یعنی از $t=۴\,s$ تا $t=۶\,s$ را باید به دست آوریم:

$$\begin{cases}x_4=۴-۲=۲\,m\\ x_6=۶-۲=۴\,m\end{cases} \Rightarrow \Delta x=۴-۲=۲\,m$$

تاکتیک بدون حل و فقط به کمک نمودار می‌توانستیم به سؤال پاسخ دهیم. چون نمودار یک خط راست است، جابه‌جایی در تمام ۲ ثانیه‌ها برابر است و فرقی نمی‌کند ۲ ثانیهٔ اول باشد یا سوم. با توجه به نمودار می‌بینیم که جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول $۲\,m$ است؛ پس جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم هم $۲\,m$ است.



۸۰- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را برای قسمت اول حرکت به دست می‌آوریم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، نمودار مکان ـ زمان قسمت اول حرکت یک خط راست است؛ پس معادلهٔ x برحسب t به صورت زیر می‌شود:

$$x-x_\circ=\frac{x_1-x_\circ}{t_1-t_\circ}(t-t_\circ)\xrightarrow{x_\circ=۱۰\,m,x_1=\circ,t_1=۱\,s,t_\circ=\circ} x-۱۰=\frac{\circ-۱۰}{۱-\circ}(t-\circ)$$

$$\Rightarrow x-۱۰=-۱۰t \Rightarrow x=-۱۰t+۱۰$$

حالا مکان متحرک را در $t_2=۲\,s$ تعیین می‌کنیم:

$$t_2=۲\,s \Rightarrow x_2=-۱۰(۲)+۱۰=-۲۰+۱۰=-۱۰\,m$$

با داشتن مکان اولیه و نهایی، جابه‌جایی در بازهٔ زمانی ۲ ثانیهٔ اول را محاسبه می‌کنیم:

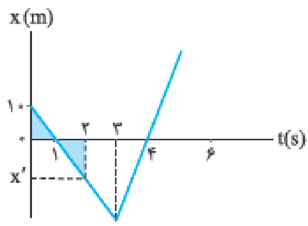
$$\Delta x_1=x_2-x_\circ=-۱۰-۱۰=-۲۰\,m \Rightarrow |\Delta x_1|=۲۰\,m$$

برای به دست آوردن جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ دوم لازم نیست کار خاصی انجام بدهیم، چون در ابتدای این بازه متحرک در $x_2=-۱۰\,m$ قرار دارد و در انتهای بازه با توجه به شکل در $x_4=\circ$ قرار دارد؛ پس:

$$\Delta x_2=x_4-x_2=\circ-(-۱۰)=۱۰\,m \Rightarrow |\Delta x_2|=۱۰\,m$$

حالا که اندازهٔ جابه‌جایی در دو بازه را داریم، فقط کافی است، یک نسبت ساده را حساب کنیم تا به پاسخ تست برسیم:

$$\frac{|\Delta x_1|}{|\Delta x_2|}=\frac{۲۰}{۱۰}=۲$$



تکنیک در این تست برای به دست آوردن x_2 هم لازم نبود معادلهٔ خط را به دست آوریم، چون با توجه به تقارن $x_\circ$ و x_2 نسبت به نقطهٔ برخورد خط و محور زمان، $x_2=-۱۰\,m$ است. *(در این فصل حواستون به تقارن‌ها و تشابه‌ها باشه!)*

تکنیک برای به دست آوردن مکان در $t=۲\,s$ می‌توانیم از تشابه هم استفاده کنیم. دو مثلث رنگی متشابه هستند، پس:

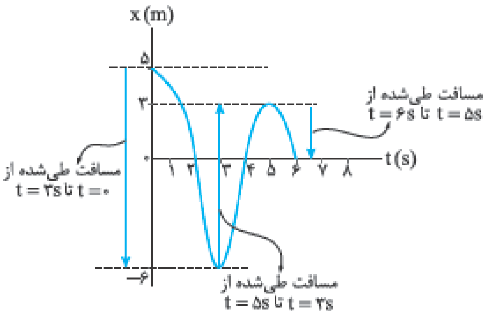
$$\frac{۱۰}{|x'|}=\frac{۱-\circ}{۲-۱} \Rightarrow |x'|=۱۰ \Rightarrow x'=-۱۰\,m$$

۸۱- گزینهٔ ۱ مکان اولیه و نهایی دو متحرک یکسان است؛ بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی‌های دو متحرک برابر است. از طرفی چون حرکت دو متحرک تغییر جهت نداشته است، مسافت طی‌شده توسط آن‌ها برابر اندازهٔ جابه‌جایی‌های آن‌ها است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d_A = l_A \\ d_B = l_B \\ d_A = d_B \end{array}\right\} \Rightarrow l_A = l_B$$

۸۲- گزینهٔ ۱ **گام اول:** جابه‌جایی که می‌شود مکان نهایی منهای مکان اولیه (مکان نهایی را $x_۶$ و مکان اولیه را $x_۰$ می‌گیریم):

$$\Delta x = x_۶ - x_۰ = ۰ - ۵ = -۵\ m \Rightarrow |\Delta x| = ۵\ m$$



گام دوم: چون متحرک ۲ بار تغییر جهت می‌دهد، برای به دست آوردن مسافت پیموده‌شده باید طول تمام مسیری را که متحرک طی کرده است با هم جمع کنیم. برای این کار ابتدا قسمت به قسمت مسافت پیموده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$(۰, ۳s): l = |x_۳ - x_۰| = |-۶ - ۵| = ۱۱\ m$$

$$(۳s, ۵s): l' = |x_۵ - x_۳| = |۳ - (-۶)| = ۹\ m$$

$$(۵s, ۶s): l'' = |x_۶ - x_۵| = |۰ - ۳| = ۳\ m$$

در نتیجه مسافت کل پیموده‌شده برابر می‌شود با:

$$l_T = l + l' + l'' = ۱۱ + ۹ + ۳ = ۲۳\ m$$

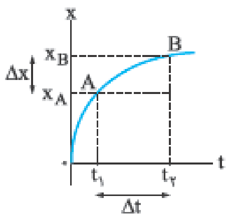
گام سوم: نسبت اندازهٔ جابه‌جایی به مسافت خواسته شده است؛ پس داریم:

$$\frac{|\Delta x|}{l_T} = \frac{۵}{۲۳}$$

حواستان باشد که هیچ‌گاه جابه‌جایی بزرگ‌تر از مسافت طی‌شده نمی‌شود، پس ۴ رد است.

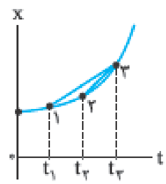
۳ هم به راحتی می‌توانستید رد کنید؛ چون وقتی جابه‌جایی با مسافت برابر می‌شود که تغییر جهت حرکت نداشته باشیم اما این‌جا داریم.

۸۳- گزینهٔ ۳ همان‌طور که می‌دانید، شیب یک خط راست برابر تغییرات در راستای **عمودی** (این‌جا x) تقسیم بر تغییرات در راستای افقی (این‌جا t) است. مطابق با آن‌چه که در شکل روبه‌رو می‌بینید، در این تست تغییرات در راستای عمودی همان Δx و تغییرات در راستای افقی همان Δt است؛ پس شیب خط AB برابر با **سرعت متوسط** از $t_۱$ تا $t_۲$ است:



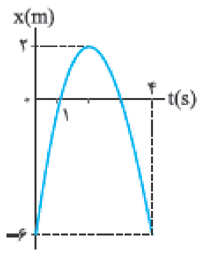
$$\text{شیب خط } AB = \frac{\text{تغییرات در راستای عمودی نمودار}}{\text{تغییرات در راستای افقی نمودار}} = \frac{x_B - x_A}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{av}$$

۸۴- گزینهٔ ۳ برای حل این تست باید به دقت نقطه‌هایی را که سرعت متوسط در آن بازه‌ها خواسته شده است، به هم وصل کنیم. شیب این خط‌ها سرعت متوسط را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، اگر این کار را انجام دهیم، شیب خطی که دو نقطهٔ (۲) و (۳) را به هم وصل می‌کند، بیشتر است؛ پس سرعت متوسط در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ بیشتر است.



۸۵- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار روبه‌رو در $t_۱ = ۱s$، متحرک در $x_۱ = ۰$ و در $t_۲ = ۴\ s$ متحرک در $x_۲ = -۶\ m$ قرار دارد؛ پس:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۶ - ۰}{۴ - ۱} = -۲\ m/s$$

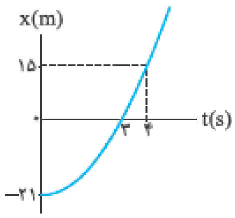


۸۶- گزینهٔ ۴ حرکت متحرک تغییر جهت نداشته است؛ پس مسافت طی‌شده توسط آن و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر است. با توجه به نمودار روبه‌رو داریم:

$$l = |\Delta x| = |x_۲ - x_۱| = |۱۵ - (-۲۱)| = ۳۶\ m$$

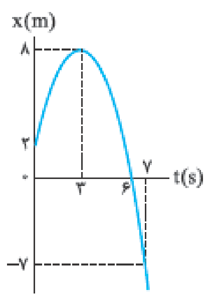
تندی متوسط برابر با $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۳۶}{۴} = ۹\ m/s = (۹ \times ۳/۶)\ km/h = ۳۲/۴\ km/h$$



۸۷- گزینهٔ ۲ مطابق شکل روبه‌رو متحرک از $t = ۳s$ تا $t = ۷s$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و از $x = ۸\ m$ به $x = -۷\ m$ می‌رود. چون در این مدت تغییر جهت نداشته است، داریم:

$$l = |\Delta x| \Rightarrow s_{av} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|x_۲ - x_۱|}{t_۲ - t_۱} = \frac{|-۷ - ۸|}{۷ - ۳} = \frac{|-۱۵|}{۴} = ۳/۷۵\ m/s$$



۸۸- گزینهٔ ۳ **گام اول:** متحرک در t ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از لحظهٔ t تا $۲t$ از مکان $x_۰$ به $x_۱$ رفته است. بنابراین سرعت متوسط آن در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۱-x_۰}{۲t-t}=\frac{x_۱-x_۰}{t}$$

گام دوم: متحرک در $۲t$ ثانیهٔ اول حرکت یعنی از لحظهٔ ۰ تا $۲t$ از مکان $x_۰$ به $x_۱$ رفته است. سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $(۰\,,۲t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x'}{\Delta t}=\frac{x_۱-x_۰}{۲t-۰}=\frac{x_۱-x_۰}{۲t}$$

گام سوم: حالا نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{\dfrac{x_۱-x_۰}{t}}{\dfrac{x_۱-x_۰}{۲t}}=۲$$

۸۹- گزینهٔ ۲ تندی متوسط دو متحرک در دو بازهٔ زمانی $(۰,۲s)$ و $(۲s,۶s)$ برابر است؛ پس:

$$s_{av,۱}=s_{av,۲}\Rightarrow \frac{l_۱}{\Delta t_۱}=\frac{l_۲}{\Delta t_۲}\Rightarrow \frac{x'-۴}{۲-۰}=\frac{x'-(-۵)}{۶-۲}\Rightarrow \frac{x'-۴}{۲}=\frac{x'+۵}{۴}\Rightarrow ۲x'-۸=x'+۵\Rightarrow x'=۱۳$$

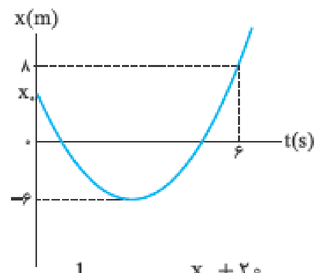
۹۰- گزینهٔ ۴ اول ببینیم رقیب مسافت $۳۰۰۰\,m$ را در چه مدت می‌پیماید:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta x}{v'_{av}}=\frac{۳۰۰۰}{۴}=۷۵۰\,s$$

دوندهٔ ما $۱۲۰۰\,m$ اول را در مدت $۴۰۰\,s$ پیموده و $۱۰۰\,s$ هم (در بازهٔ $۴۰۰\,s$ تا $۵۰۰\,s$) ایستاده است. یعنی در لحظهٔ $t=۵۰۰\,s$ در ۱۸۰۰ متری خط پایان قرار دارد و رقیبش $۲۵۰\,s$ دیگر به خط پایان می‌رسد. پس برای این‌که رقیبش را پشت سر بگذارد، باید $۱۸۰۰\,m$ باقی‌مانده را در کم‌تر از $۲۵۰\,s$ بدود، یعنی:

$$v_{av,\,min}=\frac{۱۸۰۰}{۲۵۰}=۷/۲\,m/s$$

۹۱- گزینهٔ ۴ **گام اول:** مسافت طی‌شده برابر با مجموع جابه‌جایی‌های قبل و بعد از تغییر جهت است. اگر مکان اولیه را $x_۰$ بگیریم، داریم:



$$l=|-۶-x_۰|+|۸-(-۶)|$$

از آن‌جایی که $x_۰$ مثبت است، قرینهٔ عبارت داخل قدرمطلق از آن خارج می‌شود:

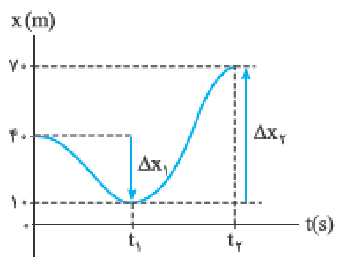
$$l=x_۰+۶+۱۴=x_۰+۲۰$$

گام دوم: تندی متوسط متحرک در بازهٔ $(۰,۶s)$ برابر $۴\,m/s$ است؛ پس:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow ۴=\frac{x_۰+۲۰}{۶}\Rightarrow ۲۴=x_۰+۲۰\Rightarrow x_۰=۴\Rightarrow \vec{d}_۰=(x_۰)\vec{i}=۴\vec{i}$$

۹۲- گزینهٔ ۲ قبل از حل سؤال توجه شما را به قسمت دوم سؤال جلب می‌کنیم. *(شبیه اقبار شما)* در قسمت دوم سؤال، تندی متوسط در $t_۲$ ثانیهٔ اول یعنی از صفر تا $t_۲$ داده شده است، (نه از $t_۱$ تا $t_۲$؛ پس لطفاً در دام تست نیفتید.) حالا به سراغ حل تست می‌رویم:

$$|v_{av_۱}|=\left|\frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱}\right|\Rightarrow ۱۰=\left|\frac{۱۰-۴۰}{t_۱-۰}\right|\Rightarrow ۱۰=\frac{۳۰}{t_۱}\Rightarrow t_۱=\frac{۳۰}{۱۰}=۳\,s$$

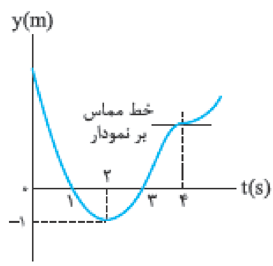


برای به دست آوردن تندی متوسط در $t_۲$ ثانیهٔ اول، ابتدا باید مسافت‌های طی‌شده در این بازهٔ زمانی را به دست آوریم. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، از صفر تا $t_۱$ متحرک در جهت منفی محور x و از $t_۱$ تا $t_۲$ در جهت مثبت آن حرکت کرده است؛ بنابراین باید اندازهٔ جابه‌جایی‌ها را با هم جمع کنیم تا مقدار مسافت طی‌شده تعیین شود:

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=|۱۰-۴۰|+|۷۰-۱۰|=|-۳۰|+|۶۰|\Rightarrow l=۳۰+۶۰=۹۰\,m$$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t_۲}\Rightarrow ۱۵=\frac{۹۰}{t_۲-۰}\Rightarrow t_۲=\frac{۹۰}{۱۵}=۶\,s$$

۹۳- گزینهٔ ۱ **گام اول:** با توجه به شکل روبه‌رو متحرک در $t=۲s$ تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین سرعت متوسط از $t=۰$ تا $t=۲s$ برابر است با:



$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow -۴\vec{j}=\frac{(-۱-x_۰)\vec{j}}{۲}\Rightarrow -۴=\frac{(-۱-x_۰)}{۲}$$

$$\Rightarrow -۸=-۱-x_۰\Rightarrow -۷=-x_۰\Rightarrow x_۰=۷\,m$$

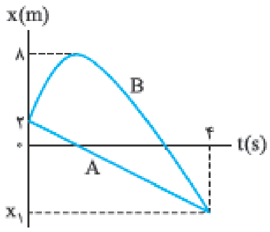
گام دوم: همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید متحرک دومین بار در $t=۳\,s$ از مبدأ عبور می‌کند. مسافت طی‌شده از مبدأ زمان $(t=۰)$ تا این لحظه برابر با مجموع اندازهٔ جابه‌جایی در بازه‌های $(۰,۲s)$ و $(۲s,۳s)$ است:

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=|-۱-۷|+|۰-(-۱)|=۸+۱=۹\,m$$

گام سوم: حالا *وقتش رسیده که* با محاسبهٔ تندی متوسط به کمک رابطهٔ $s_{av}=\dfrac{l}{\Delta t}$ کار را تمام کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۹}{۳}=۳\,m/s$$

۹۴- گزینهٔ ۲ **گام اول:** به کمک نمودار روبه‌رو و سرعت متوسط متحرک A، مکان نهایی هر دو متحرک را تعیین می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}|v_{av}|=۳/۵\,m/s\\ \text{جهت حرکت A در خلاف جهت محور x است.}\end{array}\right\}\Rightarrow v_{av}=-۳/۵\,m/s\ (I)$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{I}-۳/۵=\frac{x_۱-۲}{۴-۰}\Rightarrow(-۳/۵)\times۴=x_۱-۲\Rightarrow x_۱=-۱۲\,m$$

گام دوم: مسافت طی‌شده توسط متحرک B برابر است با:

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=|۸-۲|+|-۱۲-۸|=۶+۲۰=۲۶\,m$$

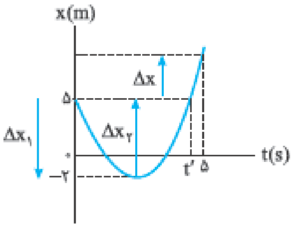
گام سوم: مسافت طی‌شده توسط متحرک B برابر $۲۶\,m$ است؛ پس تندی متوسط این متحرک در بازهٔ $(۰,۴s)$ برابر است با:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۲۶}{۴}=۶/۵\,m/s$$

۹۵- گزینهٔ ۴ تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط در بازه‌های زمانی‌ای که متحرک تغییر جهت نداشته باشد، با هم برابر هستند. در بازه‌های $(۰,t_۱)$، $(t_۱,t_۲)$ و $(t_۱,t_۲)$ متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و تندی در این بازه‌ها با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. اما در بازهٔ $(۰,t_۴)$ متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ در این بازه سرعت متوسط صفر است اما تندی متوسط صفر نیست.

توجه کنید که در بازهٔ $(t_۱,t_۲)$ چون نمودار $x-t$ موازی محور است، متحرک ایستاده است و سرعت متوسط و تندی متوسط در این بازهٔ زمانی صفر است.

۹۶- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل روبه‌رو می‌فهمیم که جابه‌جایی متحرک به اندازهٔ $|\Delta x|$ بوده است و اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در مدت $۵s$ برابر $v_{av}=\frac{|\Delta x|}{۵}$ است.



توجه کنید که جابه‌جایی در بازهٔ $t=۰$ تا $t=t'$ صفر است. از طرفی مسافت طی‌شده در بازهٔ $(۰,۵s)$ برابر با اندازهٔ جابه‌جایی از $t=۰$ تا لحظهٔ تغییر جهت حرکت ($|\Delta x_۱|$) به اضافهٔ اندازهٔ جابه‌جایی از لحظهٔ تغییر جهت تا t' ($|\Delta x_۲|$) به اضافهٔ جابه‌جایی از t' تا $t=۵\,s$ است ($|\Delta x|$):

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|+|\Delta x|=|(-۲-۵)|+|(۵-(-۲))|+|\Delta x|=۷+۷+|\Delta x|=۱۴+|\Delta x|$$

پس تندی در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۴+|\Delta x|}{۵}=۲/۸+\frac{|\Delta x|}{۵}$$

حالا که تندی و اندازهٔ سرعت را داریم به راحتی می‌توانیم اختلاف این دو را به دست آوریم:

$$s_{av}-v_{av}=۲/۸+\frac{|\Delta x|}{۵}-\frac{|\Delta x|}{۵}=۲/۸\,m/s$$

۹۷- گزینهٔ ۲ بررسی گزینه‌ها:

(۱) سرعت متوسط برابر با جابه‌جایی تقسیم بر زمان است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۲-۰}{۸-۰}=\frac{۱}{۴}\,m/s=۰/۲۵\,m/s$$

(۴) برای به دست آوردن تندی متوسط ابتدا مسافت طی‌شده توسط متحرک را به دست می‌آوریم:

$l=|$ جابه‌جایی از صفر تا ۲ ثانیه $|+|$ جابه‌جایی از ۲ s تا ۸ s $|$

$$l=|(-۴)-۰|+|۲-(-۴)|=|-۴|+|۶|=۴+۶=۱۰\,m$$

حالا تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۸}=۱/۲۵\,m/s$$

(۳) با توجه به نمودار مشخص است که متحرک فقط یک بار و در $t=۲\,s$ جهت حرکت خود را تغییر داده است. قبل از این لحظه متحرک در جهت منفی محور **x** و پس از آن در جهت مثبت محور **x** حرکت می‌کند.

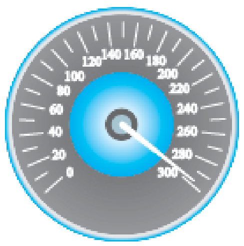
(۲) همان‌طور که در بررسی (۱) و (۴) دیدیم، جابه‌جایی برابر $۲\,m$ و مسافت طی‌شده برابر $۱۰\,m$ است؛ پس مسافت طی‌شده $۱۰-۲=۸\,m$ از اندازهٔ جابه‌جایی بیشتر است.

درس ۵
تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

گفتیم لحظه، بازهٔ زمانی خیلی خیلی خیلی کوچک است. متحرک در یک لحظهٔ معین در یک نقطه از مسیر قرار دارد؛ بنابراین **تندی لحظه‌ای** یعنی تندی متحرک در یک لحظه از زمان یا یک نقطه از مسیر. **سرعت لحظه‌ای** هم به همین صورت تعریف می‌شود؛ به سرعت متحرک در یک لحظه از زمان یا یک نقطه از مسیر، **سرعت لحظه‌ای** می‌گوییم.

مقایسهٔ تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای:

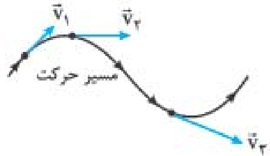
سرعت لحظه‌ای یک کمیت برداری است؛ یعنی هم مقدار دارد و هم جهت و تندی لحظه‌ای چیزی نیست جز مقدار سرعت لحظه‌ای (یعنی سرعت بدون در نظر گرفتن جهت آن).



احتمالاً برای شما هم تندی‌سنج خودروها جذاب است. عقربهٔ تندی‌سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نمایش می‌دهد.
(مثلاً در لحظه‌ای که تصویر روبه‌رو گرفته شده تندی خودرو $۲۹۸\,km/h$ بوده است.)
اما وقتی می‌خواهیم سرعت خودرو را بگوییم، علاوه بر تندی باید جهت آن را هم مشخص کنیم. مثلاً بگوییم سرعت اتومبیل $۲۹۸\,km/h$ به سمت شمال غربی است.

حواستون باشه! *هر جا فقط از واژهٔ سرعت (یا تندی) به تنهایی استفاده کردن، منظورشون سرعت (یا تندی) لحظه‌ایه.*

چندنکته



۱) بردار سرعت (لحظه‌ای) همواره **در جهت حرکت** بوده و **بر مسیر حرکت مماس** است. مثلاً شکل روبه‌رو مسیر حرکت یک متحرک است که در چند نقطه از مسیر، بردار سرعت (لحظه‌ای) آن را رسم کرده‌ایم.

۲) طول بردار سرعت بیانگر مقدار آن (یعنی تندی) است. در شکل بالا طول بردار سرعت در طول مسیر افزایش یافته؛ یعنی تندی در حال افزایش است.

۳) علامت سرعت بیانگر جهت حرکت است؛ اگر $v > 0$ باشد، یعنی متحرک در جهت مثبت محور و اگر $v < 0$ باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت مثبت محور در حال حرکت است.

حواستون باشه! در کمیت‌های برداری مثل سرعت، منفی‌بودن نشان‌دهنده کوچک‌بودن نیست. مثلاً سرعت $-20\,m/s$ از $10\,m/s$ بیشتر است و فقط جهتش برعکس است. (ولی در کمیت‌های نرده‌ای این‌جوری نیست. مثلاً *دمای $-20\,^\circ C$ حتماً از دمای $10\,^\circ C$ کم‌تره.*)

۴) اگر در طول مسیر اندازهٔ سرعت افزایش یابد، نوع حرکت **تندشونده** و اگر اندازهٔ سرعت کاهش یابد، نوع حرکت **کندشونده** و اگر اندازهٔ سرعت تغییر نکند، نوع حرکت **یکنواخت** است.

معادلهٔ سرعت ـ زمان

یکی از راه‌های نشان‌دادن سرعت یک جسم در هر لحظه، نوشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان (یا $v-t$) است. در این معادله اگر به جای t، لحظهٔ موردنظرمان را بگذاریم، می‌توانیم سرعت متحرک در آن لحظه را حساب کنیم. مثلاً $v = 3t^2 - 18$ یک معادلهٔ سرعت ـ زمان است که با قراردادن لحظهٔ دلخواه در آن می‌توانیم سرعت در آن لحظه را حساب کنیم. حالا شما بگویید طبق این معادله سرعت اولیه و سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 2\,s$ چند متر بر ثانیه است؟

- به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان نمی‌توانیم مکان اولیهٔ جسم را مشخص کنیم.
- به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان می‌توانیم تشخیص دهیم که یک متحرک چه زمانی تغییر جهت می‌دهد. برای آن‌که متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، تغییر جهت بدهد، باید دو اتفاق بیفتد:

۱) سرعتش صفر شود (متوقف شود). ۲) علامت سرعتش تغییر کند.

تست **معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t^2 - 81$ است. این متحرک در چه لحظه‌ای و چگونه تغییر جهت می‌دهد؟**

۱) این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

۲) در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ از جهت منفی محور به جهت مثبت تغییر جهت می‌دهد.

۳) در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ از جهت مثبت محور به جهت منفی تغییر جهت می‌دهد.

۴) در لحظه‌های $t = 4/5\,s$ و $t = 9\,s$ دو بار تغییر جهت می‌دهد.

پاسخ **گزینهٔ ۲** اول ببینیم سرعت این متحرک در چه لحظه یا لحظه‌هایی صفر می‌شود:

$$v = 0 \Rightarrow 4t^2 - 81 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow t = \pm\frac{9}{2}s = \pm 4/5\,s$$

($-4/5\,s$ که قبل از مبدأ زمان است و قابل‌قبول نیست.)

حالا باید ببینیم که آیا در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ علامت سرعت تغییر کرده است یا نه. برای این کار دو لحظهٔ $t_1 = 4\,s$ و $t_2 = 5\,s$ (یکی قبل از $4/5\,s$ و یکی بعد از آن) را در معادلهٔ سرعت امتحان می‌کنیم. اگر علامتشان مختلف بود، یعنی متحرک در لحظهٔ $4/5\,s$ تغییر جهت داده است.

$$\begin{cases} v_1 = 4(4)^2 - 81 = -17\,m/s \\ v_2 = 4(5)^2 - 81 = +19\,m/s \end{cases} \Rightarrow$$ متحرک در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ از جهت منفی به مثبت تغییر جهت داده است.

این هم جدول تغییرات سرعت:

t (s)	۰		۴/۵	
v (m/s)	−۸۱	(−)	۰	(+)

لحظهٔ تغییر جهت

تست **معادلهٔ مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 18t + 36$ و $v = t^2 - 9t + 18$ است. این متحرک در بازهٔ زمانی بین دو توقف چند متر و در چه جهتی جابه‌جا شده است؟**

۱) $4/5\,m$ در خلاف جهت محور x ۲) $4/5\,m$ در جهت محور x ۳) $3\,m$ در خلاف جهت محور x ۴) $3\,m$ در جهت محور x

پاسخ **گزینهٔ ۱** **گام اول:** باید معادلهٔ سرعت ـ زمان را برابر صفر قرار دهیم و ریشه‌های آن را حساب کنیم. ریشه‌های این معادله لحظه‌هایی هستند که در آن متحرک متوقف شده است.

$$v = t^2 - 9t + 18 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-6) = 0 \Rightarrow t_1 = 3\,s, t_2 = 6\,s$$

گام دوم: حالا باید ببینیم که متحرک در این لحظه‌ها کجای محور x قرار داشته است:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{9}{2}(3)^2 + 18(3) + 36 = 58/5\,m \\ x_2 = \frac{1}{3}(6)^3 - \frac{9}{2}(6)^2 + 18(6) + 36 = 54\,m \end{cases}$$

و اما جابه‌جایی متحرک در بازهٔ $(3\,s, 6\,s)$ برابر می‌شود با:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 54 - 58/5 = -4/5\,m$$

جابه‌جایی منفی است، پس متحرک در این مدت، $4/5\,m$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است.

اگر مسافت پیموده‌شده توسط یک متحرک را از ما بخواهند، باید حواسمان را جمع کنیم که آیا متحرک در آن بازهٔ زمانی تغییر جهت داده است یا نه. برای همین باید لحظه‌های تغییر جهت متحرک را کنترل کنیم.

تست معادلهٔ مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = 2t^2 - 20t + 5$ و $v = 4t - 20$ است. این متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکتش، چه مسافتی را برحسب متر می‌پیماید؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۲- ۳) ۶۸- ۴) ۶۸

پاسخ **گزینهٔ ۴** باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌ای سرعتش صفر شده و تغییر جهت داده است، پس v را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v = 0 \Rightarrow 4t - 20 = 0 \Rightarrow t = 5\,s$$

تعیین علامت هم می‌کنیم تا مطمئن بشویم متحرک در لحظهٔ $t = 5\,s$ تغییر جهت داده:

t (s)	۰		۵ (لحظهٔ تغییر جهت)	
v (m/s)	۲۰-	(−)		(+)

پس این متحرک در ۸ ثانیهٔ اول، ۵ s در خلاف جهت محور x و ۳ s در جهت محور x حرکت کرده است، یعنی باید جابه‌جایی‌های صفر تا ۵ s و ۵ s تا ۸ s را جداجدا حساب کنیم:

$$\Delta x_1 = x_5 - x_0 = [2(5)^2 - 20(5) + 5] - [2(0)^2 - 20(0) + 5] = -50\,m$$

$$\Delta x_2 = x_8 - x_5 = [2(8)^2 - 20(8) + 5] - [2(5)^2 - 20(5) + 5] = +18\,m$$

یعنی این متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکتش، ۵۰ m در خلاف جهت محور x و در ۳ ثانیهٔ بعد از آن ۱۸ m در جهت مثبت محور حرکت کرده است. حالا می‌توانیم مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را در ۸ ثانیهٔ اول حساب کنیم:

$$l_8 = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 50 + 18 = 68\,m$$

تست معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی در SI به صورت $v = 3t - 12$ است. در کدام بازهٔ زمانی حرکت متحرک کُندشونده است و در این مدت متحرک در چه جهتی حرکت می‌کند؟

۱) ۰ تا $t = 4\,s$، در جهت منفی
۲) ۰ تا $t = 4\,s$، در جهت مثبت
۳) از لحظهٔ $t = 4\,s$ به بعد، در جهت منفی
۴) از لحظهٔ $t = 4\,s$ به بعد، در جهت مثبت

پاسخ **گزینهٔ ۱** لحظه‌ای را که متحرک تغییر جهت می‌دهد، حساب می‌کنیم و بعد معادلهٔ $v = 3t - 12$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$v = 0 \Rightarrow 3t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{3} = 4\,s$$

t (s)	۰		۴ (لحظهٔ تغییر جهت)	
v (m/s)	۱۲-	(−)		(+)

برای آن‌که متحرک بتواند تغییر جهت بدهد، باید لحظه‌ای متوقف شود؛ بنابراین قبل از این لحظه حرکتش کُند می‌شود تا بایستد. در این‌جا هم قبل از لحظهٔ $t = 4\,s$ حرکت کُندشونده است. (۳ و ۴ نادرست‌اند). در جدول تعیین علامت هم می‌بینید که قبل از لحظهٔ $t = 4\,s$ علامت سرعت منفی است؛ پس متحرک در بازهٔ $(0, 4\,s)$ در جهت منفی محور حرکت می‌کند، یعنی ۱ را علامت می‌زنیم.

۹۸- گزینهٔ ۲ تندی‌سنج **تندی لحظه‌ای** خودرو را نشان می‌دهد (نه تندی متوسط!).

۹۹- گزینهٔ ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۲ سرعت متوسط هیچ اطلاعاتی در مورد نحوهٔ حرکت و توقف‌کردن یا توقف‌نکردن نمی‌دهد. شاید اتومبیل برای مدتی در بین مسیر متوقف شده باشد یا حتی به عقب برگردد. سرعت متوسط یعنی کل جابه‌جایی تقسیم بر کل زمان که ربطی به جزئیات حرکت ندارد؛ پس متحرک در بین مسیر امکان دارد بایستد یا با سرعت بیش از $60\,km/h$ و کم‌تر از آن حرکت کند.

۳ به عنوان مثال نقض اگر فاصلهٔ دو شهر ۱۲۰ km باشد و مدت زمان حرکت ۲ h باشد، باز هم سرعت متوسط برابر $60\,km/h$ می‌شود. $v_{av} = \frac{120\,km}{2\,h} = 60\,km/h$

۴ سرعت متحرک حداقل یک بار باید $60\,km/h$ باشد. فرض کنید این‌گونه نباشد؛ پس یا همواره سرعت آن بیشتر از $60\,km/h$ بوده است یا کم‌تر از $60\,km/h$. اگر همواره سرعت لحظه‌ای بیشتر از $60\,km/h$ باشد، حتماً مسیر حرکت را با سرعت متوسط بیشتر از $60\,km/h$ طی می‌کند و اگر سرعت لحظه‌ای همواره کم‌تر از $60\,km/h$ باشد، حتماً مسیر حرکت را با سرعت متوسط کم‌تر از $60\,km/h$ طی می‌کند.

۱۰۰- گزینهٔ ۳ **گام اول**: سه ثانیهٔ دوم یعنی از $t = 3\,s$ تا $t = 6\,s$؛ بنابراین داریم:

$$v_3 = -(3)^3 + 4(3)^2 + 5 = -27 + 36 + 5 = 14\,m/s$$

$$v_6 = -(6)^3 + 4(6)^2 + 5 = -216 + 144 + 5 = -67\,m/s$$

گام دوم: اختلاف **اندازهٔ** سرعت‌ها را می‌خواهیم:

$$|v_6| - |v_3| = |-67| - |14| = 67 - 14 = 53\,m/s$$

۱۰۱- گزینهٔ ۴ در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، دو اتفاق برای سرعت می‌افتد:

۱ سرعت صفر می‌شود. ۲ سرعت تغییر علامت می‌دهد.

پس باید لحظهٔ صفرشدن سرعت را پیدا کنیم و مطمئن شویم سرعت در این لحظه تغییر علامت داده است:

$$v = 0 \Rightarrow 5t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5}\,s = 0/4\,s$$

سرعت اولیهٔ متحرک (سرعت در لحظهٔ $t = 0$) برابر $-2\,m/s$ است و علامت سرعت بعد از $0/4\,s$ مثبت است. پس می‌توانیم بگوییم علامت سرعت تغییر کرده است.

t (s)	۰		۰/۴		$+\infty$
v (m/s)	۲-	−		+	

لحظهٔ تغییر جهت سرعت

۱۰۲- **گزینهٔ ۳** در هر یک از گزینه‌ها سرعت اولیه (v_0) و لحظهٔ تغییر جهت (یا همان لحظهٔ صفرشدن سرعت) را بررسی می‌کنیم.

(۱) $v_0 = -5\ m/s$ است؛ پس ابتدا متحرک در جهت منفی محور x در حال حرکت است و در لحظهٔ $t = \frac{5}{2}\ s$ تغییر جهت می‌دهد:

$$v = 0 \Rightarrow 2t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{2}\ s$$

(۲) $v_0 = 4/5\ m/s$ است. یعنی ابتدا متحرک در جهت مثبت محور x در حال حرکت است، اما لحظهٔ تغییر جهت منفی می‌شود یعنی این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد:

$$v = 0 \Rightarrow 3t + 4/5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4/5}{3} = -1/5\ s \text{ (غ‌ق‌ق)}$$

(۳) $v_0 = 3/5\ m/s$ است و متحرک در ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. اگر معادلهٔ سرعت ـ زمان را برابر صفر قرار دهیم می‌بینیم که در لحظهٔ $t = \frac{1}{2}\ s$ تغییر جهت می‌دهد:

$$v = 0 \Rightarrow -7t + 3/5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3/5}{-7} = \frac{1}{2}\ s \text{ (گزینهٔ درست همین است.)}$$

(۴) $v_0 = -12/5\ m/s$ است و متحرک در ابتدا در حال حرکت در جهت منفی محور x است. با صفر قراردادن معادلهٔ سرعت ـ زمان می‌فهمیم که این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد چون t منفی می‌شود:

$$v = 0 \Rightarrow -5t - 12/5 = 0 \Rightarrow t = \frac{12/5}{-5} = -2/5\ s \text{ (غ‌ق‌ق)}$$

۱۰۳- **گزینهٔ ۲** گفتیم که هر وقت متحرک تغییر جهت بدهد برای یک لحظه سرعتش صفر می‌شود و علامت سرعتش تغییر می‌کند. پس لحظه‌های تغییر علامت سرعت، یعنی ریشه‌های معادلهٔ سرعت به ازای $v = 0$ را حساب می‌کنیم.

$$t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1\ s \\ t_2 = 3\ s \end{cases}$$

جدول تغییرات سرعت را می‌کشیم تا مطمئن شویم علامت سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 1\ s$ و $t_2 = 3\ s$ تغییر کرده است:

t (s)	۰		۱		۳		$+\infty$
v (m/s)	۳	+	۰	−	۰	+	

لحظه‌های تغییر جهت سرعت

۱۰۴- **گزینهٔ ۲** تغییر جهت حرکت زمانی اتفاق می‌افتد که سرعت صفر شود و علامت آن تغییر کند. چون دو تغییر جهت متوالی را می‌خواهیم، داریم:

$$v = 0 \Rightarrow 0 = -5\sin 10\pi t \Rightarrow 10\pi t = n\pi \Rightarrow \begin{cases} n = 1 : 10\pi t_1 = \pi \\ n = 2 : 10\pi t_2 = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{10}s \\ t_2 = \frac{2}{10}s \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}s = 0/1\ s$$

در معادله‌های سینوسی نیازی به تعیین علامت سرعت نیست؛ چرا که در این معادلات متحرک در لحظه‌هایی که سرعت صفر می‌شود، حتماً تغییر جهت می‌دهد.
(با مفاهیم فصل نوسان این تست راحت‌تر حل می‌شه که بعداً توی فصل ۳ می‌بینید.)

۱۰۵- **گزینهٔ ۴** متحرک در ریشه‌هایی از معادلهٔ سرعت ـ زمان تغییر جهت می‌دهد که قبل و بعد از آن‌ها علامت سرعت عوض شود؛ پس برای حل این سؤال باید معادلهٔ سرعت ـ زمان را تعیین علامت کنیم:

$$v = t^3 - 4t^2 + 4t = t(t^2 - 4t + 4) = t(t-2)^2$$

t (s)	۰		۲		$+\infty$
v	۰	+	۰	+	

همان‌طور که می‌بینید در $t = 2s$ با این‌که سرعت صفر می‌شود اما بعد و قبل از آن سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.
حواستان باشد که قبل از $t = 0$ مورد بررسی قرار نمی‌گیرد چون نباید زمان را منفی در نظر بگیریم.

۱۰۶- **گزینهٔ ۲** با توجه به این‌که معادلهٔ سرعت ـ زمان $v = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ ریشهٔ مضاعف دارد، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و در نتیجه، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده با هم برابر است:

$$\text{مسافت طی‌شده از } t = 0 \text{ تا } t = 2\ s: |\Delta x| = |(\frac{(2)^3}{3} - (2)^2 + 2 - 1) - (\frac{(0)^3}{3} - (0)^2 + (0) - 1)| = |(\frac{8}{3} - 4 + 2 - 1) - (-1)| = \frac{2}{3}\ m$$

۱۰۷- **گزینهٔ ۱** همیشه قبل از این‌که سرعت متحرک صفر شود، حرکت متحرک کُندشونده و بعد از آن حرکتش تندشونده است. پس باید لحظهٔ صفرشدن سرعت را حساب کنیم:

$$v = 0 \Rightarrow -2t + 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{2} = 3/5\ s$$

بازهٔ زمانی $(1/5\ s, 2/5\ s)$ قبل از $t = 3/5\ s$ است، بنابراین در این بازه حرکت کندشونده است.
(۳ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t_1 = 3\ s$ تا $t_2 = 6\ s$ و ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ $t_1 = 3\ s$ تا $t_2 = 4\ s$.)

۱۰۸- **گزینهٔ ۱** **گام اول:** ابتدا باید لحظه‌ای را که سرعت متحرک صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد (نقطهٔ اکسترمم سهمی)، پیدا کنیم. بدیهی است که قبل از آن لحظه، حرکت کندشونده و بعد از آن تندشونده است.

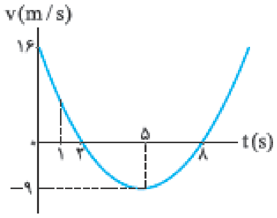
$$t_{\text{تغییرجهت}} = \frac{-B}{2A} = \frac{-16}{2(-4)} = 2\ s$$

پس در بازهٔ زمانی صفر تا $2\ s$ حرکت متحرک کُندشونده است.
گام دوم: در این $2\ s$ متحرک در یک جهت حرکت کرده است. پس کافی است اندازهٔ جابه‌جایی را (که برابر مسافت پیموده‌شده است) حساب کنیم:

$$x_0 = -4(0)^2 + 16(0) - 15 = -15\ m \ ,\ x_2 = -4(2)^2 + 16(2) - 15 = 1\ m$$

$$l = \Delta x = x_2 - x_0 = 1 - (-15) = 16\ m$$

این متحرک $16\ m$ در جهت مثبت محور x پیموده است.



۱۰۹- گزینهٔ ۳ برای حل این تست می‌توانیم نمودار v-t را با توجه به معادلهٔ سرعت ـ زمان رسم کنیم؛ هر جا که نمودار در حال دورشدن از محور t بود، حرکت تندشونده است. با توجه به آن‌چه در درس ریاضی خوانده‌اید، نمودار $v = t^2 - 10t + 16$ که یک سهمی است را رسم می‌کنیم:

همان‌طور که می‌بینید، در بازه‌های زمانی $(2s, 5s)$ و $(8s, +\infty)$ نمودار سرعت ـ زمان در حال دورشدن از محور t است؛ پس در بین گزینه‌ها حرکت فقط در $2/5$ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $(2/5s, 5s)$ همواره تندشونده است.

۱۱۰- گزینهٔ ۱ وقتی تندی برابر $2\,m/s$ است، سرعت می‌تواند $2\,m/s$ و یا $-2\,m/s$ باشد. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$v = 2\,m/s \Rightarrow 2 = 4t - 5 \Rightarrow 7 = 4t \Rightarrow t = \frac{7}{4}s = 1/75\,s$$

این مقدار را در گزینه‌ها نداریم. اما هنوز کارمان با $-2\,m/s$ مانده است:

$$v = -2\,m/s \Rightarrow -2 = 4t - 5 \Rightarrow 3 = 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4}s = 0/75\,s$$

به دست آوردن $0/75\,s$ یعنی درست‌بودن ۱.

۱۱۱- گزینهٔ ۱ **گام اول:** وقتی سرعت $v = 3\,m/s$ و $v = -3\,m/s$ است، تندی برابر $3\,m/s$ می‌شود. فرض می‌کنیم در $t = 2\,s$ سرعت $-3\,m/s$ و در $t = 5\,s$ سرعت $3\,m/s$ باشد. پس برای معادلهٔ $v = At + B$ در این دو لحظه داریم:

$$\left.\begin{array}{ll} t = 2\,s: -3 = A(2) + B \Rightarrow -3 = 2A + B & (I) \\ t = 5\,s: 3 = A(5) + B \Rightarrow 3 = 5A + B & (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{(II)-(I)} 6 = 3A \Rightarrow A = 2 \Rightarrow B = -7 \Rightarrow v = 2t - 7$$

گام دوم: اندازهٔ سرعت در $t = 7\,s$ را می‌خواهیم:

$$v = 2(7) - 7 = 14 - 7 = 7 \Rightarrow |v| = |7| = 7\,m/s$$

(شاید بپرسید چرا در $t = 2s$ سرعت رو $3\,m/s$ و در $t = 5s$ سرعت رو $-3\,m/s$ نگرفتیم، ما می‌گیم چون معادلهٔ سرعت ـ زمان یک رابطهٔ خطی است و اندازهٔ سرعت در $t = 7s$ را می‌خواهیم، اگه اون فرض هم می‌کردیم، به همین جواب می‌رسیدیم. اثبات این حرف با شما!)

۱۱۲- گزینهٔ ۴ در دو حالت تندی‌ها با هم برابر می‌شوند. حالت اول این است که سرعت‌ها با هم مساوی باشند. حالت دوم هم این است که سرعت‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند:

حالت اول: $v_1 = v_2 \Rightarrow 2t - 3 = -t - 6 \Rightarrow 2t + t = 3 - 6 \Rightarrow 3t = -3 \Rightarrow t = -1$ (غ‌ق‌ق)

حالت اول که قابل قبول نیست چون زمان را منفی به دست آوردیم. *بریم سراغ* حالت دوم:

حالت دوم: $v_1 = -v_2 \Rightarrow 2t - 3 = -(-t - 6) \Rightarrow 2t - 3 = t + 6 \Rightarrow t = 6 + 3 \Rightarrow t = 9\,s$

۱۱۳- گزینهٔ ۴ وقتی می‌گوییم تندی $24\,m/s$ است، یعنی $v = +24\,m/s$ یا $v = -24\,m/s$ است. در معادلهٔ $v = t^2 + v_0$، t^2 همواره مثبت است، پس باید سرعت در لحظهٔ $t_1 = 1s$ برابر $v = -24\,m/s$ و در لحظهٔ $t = 7s$ برابر $v_7 = 24\,m/s$ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 1\,s \\ v_1 = -24\,m/s \end{cases} \Rightarrow -24 = (1)^2 + v_0 \Rightarrow v_0 = -25\,m/s$$

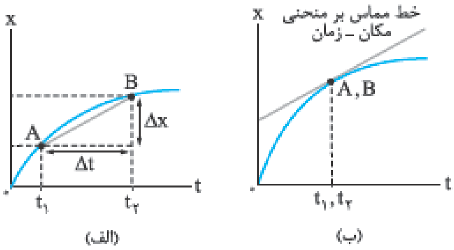
بنابراین معادلهٔ سرعت ـ زمان به صورت $v = t^2 - 25$ است. *(توی این معادله اگه به جای t، v بذارید، $v = 24\,m/s$ می‌شه که یعنی کارمون درسته!)*

حالا برای پیداکردن تغییر جهت حرکت باید ببینیم که در چه لحظه‌ای سرعت صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد:

$$v = t^2 - 25 \xrightarrow{v=0} 0 = t^2 - 25 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5\,s$$

درس ۶
نمایش سرعت لحظه‌ای در نمودار مکان ـ زمان

در بحث نمودار مکان ـ زمان دیدید که شیب خطی که دو نقطه از منحنی $x - t$ را قطع می‌کند، برابر با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی متناظر با آن دو نقطه است.



(الف) (ب)

مثلاً در شکل (الف)، شیب خط AB برابر با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است؛ یعنی:

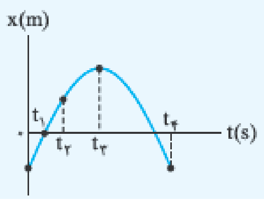
$$\text{شیب خط AB} = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

حالا اگر Δt را کوچک کنیم (یعنی t_1 و t_2 را به هم نزدیک کنیم)، نقطه‌های A و B هم به یکدیگر نزدیک می‌شوند. وقتی که t_1 و t_2 کاملاً به هم مماس شوند، Δt به لحظه تبدیل می‌شود و نقطه‌های A و B به هم می‌رسند. در این حالت امتداد AB خطی مماس بر منحنی مکان ـ زمان بوده و شیب این خط برابر با سرعت لحظه‌ای است.

$\boxed{\text{سرعت لحظه‌ای} = \text{شیب خط مماس بر منحنی } x - t}$

هر چه شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان بیشتر باشد، اندازهٔ سرعت بیشتر است. این را هم بدانید که منفی یا مثبت بودن شیب بیانگر جهت حرکت است.

تست در نمودار مکان ـ زمان شکل روبه‌رو، در کدام لحظه اندازهٔ سرعت متحرک بیشتر است؟ (نمودار شکل روبه‌رو یک سهمی است.)



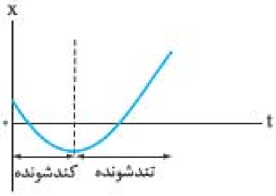
۱) t_1 ۲) t_2

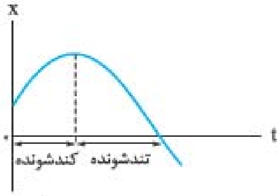
۳) t_3 ۴) t_4

پاسخ گزینهٔ۴ می‌دانید که در یک نمودار (مانند سهمی) شیب نقطهٔ بیشینه یا کمینه صفر است و هر چه از دو طرف، از این نقطه دور می‌شویم، شیب زیاد می‌شود؛ پس در لحظهٔ $t_۴$ اندازهٔ سرعت متحرک بیشتر از لحظه‌های دیگر است: $|v_۴| > v_۱ > v_۲ > (v_۳ = ۰)$

در واقع در این نمودار، حرکت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۳$ کُندشونده و در بازهٔ زمانی $t_۳$ تا $t_۴$ تندشونده است.

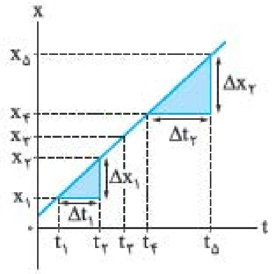
در نمودار مکان ـ زمان اگر در حال نزدیک‌شدن به نقطهٔ اکسترمم (بیشینه یا کمینه) باشیم، حرکت کُندشونده و اگر در حال دورشدن از نقطهٔ اکسترمم باشیم، حرکت تندشونده است؛ یا به زبان ساده‌تر همیشه سمت چپ نقطهٔ اکسترمم، حرکت کُندشونده و سمت راست آن حرکت تندشونده است.



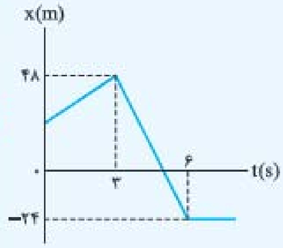


اگر نمودار مکان ـ زمان متحرکی یک خط راست باشد (مثل شکل روبه‌رو)، شیب نمودار در هر لحظهٔ دلخواه و در هر بازهٔ زمانی دلخواه یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم در این حالت سرعت در هر لحظه برابر با سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه است:

$$\text{شیب نمودار در هر لحظه مانند } t_۲ = \frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} \Rightarrow v_{\text{لحظه‌ای}} = v_{av}$$



تست **نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت این متحرک در لحظه‌ای که از مبدأ مکان عبور می‌کند، در SI کدام است؟**



۱) $-۱۲\vec{i}$

۲) $-۲۴\vec{i}$

۳) $۱۲\vec{i}$

۴) $۲۴\vec{i}$

پاسخ گزینهٔ۲ لحظهٔ عبور از مبدأ در بازهٔ زمانی ۳s تا ۶s قرار دارد و چون نمودار از ۳s تا ۶s یک خط راست است، پس سرعت متوسط در این بازه برابر با سرعت در هر لحظه از این بازه است. بنابراین داریم (سرعت متحرک در مبدأ مکان را با v' نشان داده‌ایم):

$$v' = v_{av_{۳-۶}} = \frac{x_۶ - x_۳}{۶-۳} = \frac{-۲۴-۴۸}{۶-۳} = -۲۴\,m/s$$

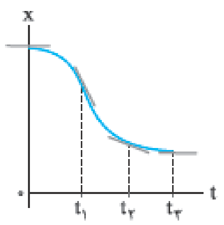
این متحرک بر روی محور x حرکت می‌کند، پس داریم: $\vec{v}' = -۲۴\vec{i}$

پرسش **تفاوت تندی (لحظه‌ای)، سرعت (لحظه‌ای) و اندازهٔ سرعت (لحظه‌ای) چیست؟**

پاسخ سرعت (لحظه‌ای) یک بردار است، پس هم جهت دارد و هم مقدار، مثلاً بردار $\vec{v} = -۴\vec{i}$. اما در حرکت‌های راست‌خط برای راحتی خودمان دیگر علامت بردار و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را نمی‌گذاریم و مثلاً می‌نویسیم: $v = -۴\,m/s$ که منظورمان همان بردار $\vec{v} = -۴\vec{i}$ است.

تندی (لحظه‌ای) همان اندازهٔ سرعت (لحظه‌ای) است و با آن جهت حرکت مشخص نمی‌شود؛ مثلاً $s = |v| = ۴\,m/s$.

۱۱۴- **گزینهٔ۱** همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۱$ بیشتر است؛ بنابراین در این نقطه سرعت لحظه‌ای بیشترین مقدار را دارد.



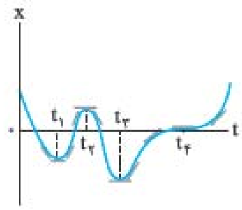
۱۱۵- **گزینهٔ۴** در نمودار این گزینه در لحظهٔ $t = ۰$، نمودار $x - t$ بر محور t مماس شده است؛ بنابراین در این لحظه مماس بر نمودار افقی است و سرعت اولیه صفر است (رد گزینه‌های دیگر).

۱۱۶- **گزینهٔ۳** در نمودار مکان ـ زمان شیب خط مماس بر نمودار برابر سرعت است و هر چه شیب بیشتر باشد، سرعت بیشتر است. در نمودار این سؤال بیشترین شیب مربوط به ناحیه‌ای است که متحرک تقریباً حرکت با سرعت ثابت انجام داده است؛ یعنی از $t_۱ = ۱۰\,s$ تا $t_۲ = ۱۶\,s$.

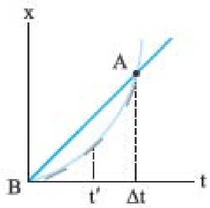
متحرک در لحظهٔ $t_۱$ در مکان $x_۱ = ۱۲\,m$ و در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $x_۲ = ۵۴\,m$ قرار دارد. (توجه کنید که هر یک از اضلاع خانه‌ها در راستای قائم معادل ۶m و در راستای افقی معادل ۲s است.)

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۵۴-۱۲}{۱۶-۱۰} = \frac{۴۲}{۶} = ۷\,m/s$$

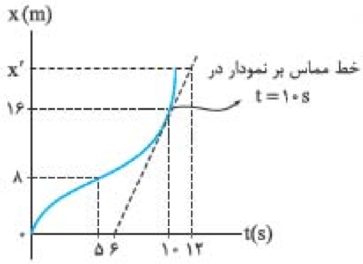
۱۱۷- گزینهٔ ۳ در نمودار $x - t$ لحظه‌ای که خط مماس بر منحنی افقی شود (یعنی شیب صفر شود)، تندی صفر می‌شود. اگر در دو طرف این نقطه‌ها سرعت (شیب) هم‌علامت بود، تغییر جهت نداریم اما اگر علامت سرعت متفاوت بود، تغییر جهت داریم. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، در **چهار** لحظهٔ t_1، t_2، t_3 و t_4 شیب صفر شده است. از طرفی چون علامت شیب نمودار قبل و بعد از لحظات t_1، t_2 و t_3 با هم متفاوت است، در این نقاط تغییر جهت حرکت داشته‌ایم.



۱۱۸- گزینهٔ ۴ سرعت در هر لحظه برابر با شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ در همان لحظه است. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، شیب خط مماس بر نمودار در حال افزایش است. از طرفی شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B بیانگر سرعت متوسط در بازهٔ $(0, \Delta t)$ است. بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو می‌فهمیم که سرعت متوسط ابتدا بیشتر از سرعت لحظه‌ای بوده است، در t' با آن مساوی شده و پس از t' سرعت متوسط کم‌تر از سرعت لحظه‌ای خواهد بود.



۱۱۹- گزینهٔ ۳ **گام اول:** در این گام، سرعت لحظه‌ای در $t = ۱۰\,s$ را به دست می‌آوریم. سرعت لحظه‌ای در $t = ۱۰\,s$ برابر شیب مماس بر نمودار در این لحظه است. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:

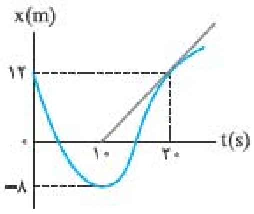


$$v = \text{شیب خط مماس} = \frac{۱۶-۰}{۱۰-۶} = \frac{۱۶}{۴} = ۴\,m/s$$

گام دوم: سرعت لحظه‌ای در $t = ۱۰\,s$ برابر سرعت متوسط بین $t_1 = ۵\,s$ تا $t_2 = ۱۲\,s$ است؛ پس:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۴ = \frac{x' - ۸}{۱۲ - ۵} \Rightarrow ۴ = \frac{x' - ۸}{۷} \Rightarrow x' - ۸ = ۲۸ \Rightarrow x' = ۳۶\,m$$

۱۲۰- گزینهٔ ۱ **گام اول:** تندی متحرک در $t = ۲۰\,s$ برابر با قدرمطلق شیب مماس بر نمودار در این نقطه است؛ بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$\text{شیب مماس} = \frac{۱۲-۰}{۲۰-۱۰} = ۱/۲ \Rightarrow |v_{۲۰}| = ۱/۲\,m/s$$

گام دوم: تندی متوسط در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

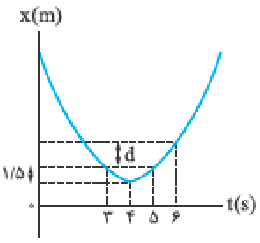
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{\Delta t} = \frac{|-۸-۱۲| + |۱۲-(-۸)|}{۲۰-۰} = \frac{|-۲۰| + |۲۰|}{۲۰} = \frac{۴۰}{۲۰} = ۲\,m/s$$

گام سوم: حالا اختلاف دو مقدار را به دست می‌آوریم:

$$|v_{۲۰}| - s_{av} = ۱/۲ - ۲ = -۰/۸\,m/s$$

بنابراین تندی لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t = ۲۰\,s$ به اندازهٔ $۰/۸\,m/s$ از تندی متوسط در بیست ثانیهٔ اول کم‌تر است.

۱۲۱- گزینهٔ ۳ **گام اول:** تندی متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم (یعنی در بازهٔ $(۳s, ۶s)$) برابر $۲/۵\,m/s$ است. به کمک این موضوع و شکل روبه‌رو اندازهٔ جابه‌جایی در بازهٔ $(۳s, ۶s)$ را که در شکل با d نشان داده شده است، به دست می‌آوریم:



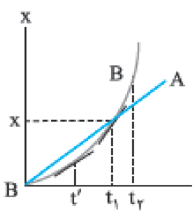
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{\Delta x_{۳۴} + \Delta x_{۴۵} + d}{۶-۳} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۱/۵ + ۱/۵ + d}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲/۵ \times ۳ = ۳ + d \Rightarrow ۷/۵ - ۳ = d \Rightarrow d = ۴/۵\,m$$

گام دوم: چون $x_۳ < x_۶$ است، سرعت متوسط مثبت است و داریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۴/۵}{۳} = ۱/۵\,m/s$$

۱۲۲- گزینهٔ ۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



(۱) دو متحرک در لحظهٔ t_1 به هم می‌رسند که در این نقطه شیب نمودار مکان ـ زمان متحرک B بیشتر است؛ بنابراین سرعت B بیشتر است (شکل روبه‌رو).

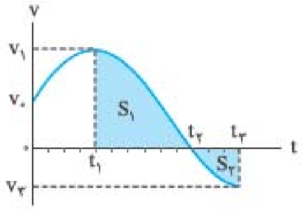
(۲) چون در بازهٔ $(۰, t_1)$ جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است، سرعت متوسط آن‌ها با هم برابر است $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x-۰}{t_1-۰} = \frac{x}{t_1}\right)$

(۳) همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید در لحظهٔ t' مماس بر نمودار متحرک B با نمودار A موازی می‌شود و شیب این دو نمودار برابر می‌شود. از آن‌جا که شیب نمودار $x - t$ همان سرعت لحظه‌ای است، در این لحظه سرعت دو متحرک برابر می‌شود.

(۴) چون متحرک B در بازهٔ t_1 تا t_2 تغییر جهت ندارد، تندی متوسط متحرک B از t_1 تا t_2 برابر اندازهٔ سرعت متوسط B در این بازه است. با توجه به نمودار بالا در این بازه جابه‌جایی متحرک B از جابه‌جایی متحرک A بیشتر است و در نتیجه سرعت متوسطش در این بازه از سرعت متوسط A بیشتر است. از طرفی نمودار مکان ـ زمان متحرک A یک خط راست است و سرعت متوسط آن در هر بازهٔ زمانی با سرعت لحظه‌ای در هر لحظه برابر است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} s_{av,B} = |v_{av,B}| \\ v_{av,B} > v_{av,A} \\ v_{av,A} = v_{t_1,A} \end{array}\right\} \Rightarrow s_{av,B} > v_{t_1,A}$$

(درس ۷)
نمودار سرعت ـ زمان



می‌توانیم سرعت یک متحرک را که بر مسیر خط راست حرکت می‌کند، در هر لحظه با نمودار سرعت ـ زمان نشان دهیم.
مثلاً شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند و سرعت متحرک در لحظه‌های $t_0=0$، t_1، t_2 و t_3 به ترتیب برابر v_0، v_1، $v_2=0$ و v_3 است.

چند نکته دربارهٔ نمودار سرعت ـ زمان:

۱) علامت سرعت بالای محور t، مثبت و پایین محور t، منفی است، یعنی در لحظه‌هایی که نمودار بالای محور t است، متحرک در جهت مثبت محور و در لحظه‌هایی که نمودار پایین محور t است، متحرک در جهت منفی محور حرکت کرده است. مثلاً در نمودار بالا در بازهٔ زمانی $(0, t_2)$ متحرک در جهت مثبت محور و در بازهٔ زمانی t_2 به بعد متحرک در جهت منفی محور حرکت کرده است.

۲) در لحظه‌هایی که نمودار محور t را قطع می‌کند، متحرک تغییر جهت داده است. مثلاً در نمودار بالا متحرک در لحظهٔ t_2 تغییر جهت داده است.

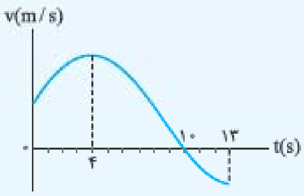
۳) شاید مهم‌ترین نکتهٔ نمودارهای سرعت ـ زمان این باشد که مساحت محصور بین نمودار و محور t برابر مقدار جابه‌جایی جسم است. مثلاً در نمودار بالا، مساحت S_1 جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 و S_2 جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 است. ادامهٔ این نکته را در نکتهٔ بعد بخوانید!

۴) اگر مساحت محصور بین نمودار و محور t، بالای محور t باشد (مانند S_1) جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت محور و اگر این مساحت زیر محور t باشد (مانند S_2)، جابه‌جایی متحرک در جهت منفی محور است؛ بنابراین برای محاسبهٔ جابه‌جایی کل و مسافت پیموده‌شده باید حواسمان به علامت‌ها باشد. مثلاً در نمودار بالا، جابه‌جایی و مسافت پیموده‌شده در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 برابر است با:

$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی در بازهٔ } t_1 \text{ تا } t_3: \Delta x_{13} = S_1 - S_2 \\ \text{مسافت در بازهٔ } t_1 \text{ تا } t_3: l_{13} = S_1 + S_2 \end{cases}$$

این را هم یادآوری کنیم که با داشتن جابه‌جایی و مسافت پیموده‌شده در یک بازهٔ معین می‌توانیم سرعت متوسط و تندی متوسط در آن بازهٔ زمانی را هم حساب کنیم.

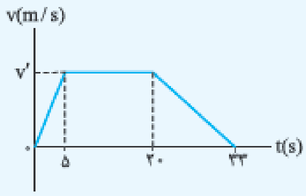
تست شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. این متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد و در چه بازهٔ زمانی در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند؟



۱) $(0, 4\,s), t = 4\,s$
۲) $(0, 10\,s), t = 4\,s$
۳) $(0, 4\,s), t = 10\,s$
۴) $(0, 10\,s), t = 10\,s$

پاسخ گزینهٔ ۴ ۱) نمودار سرعت ـ زمان در لحظهٔ $t = 10\,s$ محور t را قطع کرده است. ← متحرک در لحظهٔ $t = 10\,s$ تغییر جهت می‌دهد.
۲) نمودار در بازهٔ زمانی ۰ تا $10\,s$ بالای محور t است. ← سرعت متحرک در بازهٔ $(0, 10\,s)$ مثبت است و در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

تست نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل روبه‌رو است. اگر اندازهٔ سرعت متوسط آن در مدت $33\,s$ برابر $8\,m/s$ باشد، بیشترین مقدار سرعت آن در طول مسیر چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۸
۲) ۱۱
۳) ۱۵
۴) ۲۲

پاسخ گزینهٔ ۲ **گام اول:** از فرمول $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، جابه‌جایی جسم را در مدت $33\,s$ حساب می‌کنیم:

$$8 = \frac{\Delta x}{33} \Rightarrow \Delta x = 33 \times 8\,m$$

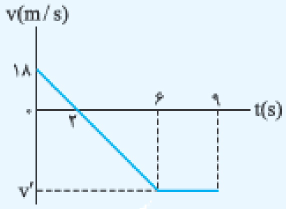
یعنی مساحت زیر نمودار برابر این مقدار است.

گام دوم: نمودار به شکل یک ذوزنقه است، پس داریم:

$$S = \frac{\text{قاعدهٔ بزرگ} + \text{قاعدهٔ کوچک}}{2} \times \text{ارتفاع} \Rightarrow 33 \times 8 = \frac{(20-5)+33}{2} \times v' \Rightarrow v' = \frac{2 \times 8 \times 33}{48} = 11\,m/s$$

v' بیشترین سرعت در طول مسیر است.

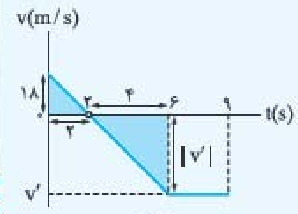
تست نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در بازهٔ $(0, 9\,s)$ به ترتیب از راست به چپ چند متر بر ثانیه است؟



۱) -18 و ۲۲
۲) -18 و ۱۸
۳) -22 و ۲۲
۴) -22 و ۱۸

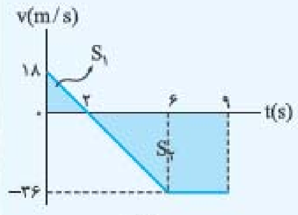
پاسخ گزینهٔ ۱ **گام اول:** در شکل (الف) به کمک تشابه دو مثلث (رنگ‌شده)، v' را حساب می‌کنیم:

$$\frac{|v'|}{۱۸}=\frac{۴}{۲} \Rightarrow |v'|=۳۶ \Rightarrow v'=-۳۶\ m/s$$



(الف)

گام دوم: مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را در شکل (ب) حساب می‌کنیم:



(ب)

$$S_۱=\text{مساحت مثلث}=\frac{۱۸\times ۲}{۲}=۱۸$$

$$S_۲=\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{(۹-۶)+(۹-۲)}{۲}\times ۳۶=۱۸۰$$

گام سوم: اول جابه‌جایی و سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_{\text{کل}}=S_۱-S_۲=۱۸-۱۸۰=-۱۶۲\ m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t}=\frac{-۱۶۲}{۹-۰}=-۱۸\ m/s$$

گام چهارم: حالا مسافت و تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$l_{\text{کل}}=S_۱+S_۲=۱۸+۱۸۰=۱۹۸\ m$$

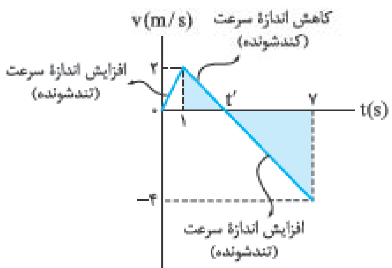
$$s_{av}=\frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t}=\frac{۱۹۸}{۹}=۲۲\ m/s$$

نمودار سرعت زمان نکته‌های دیگه‌ای هم داره که توی مفهوم شتاب می‌گیم.

۱۲۳- گزینهٔ ۱ حرکت متحرکی همواره تندشونده است که **اندازهٔ** سرعت لحظه‌ای آن همواره در حال افزایش باشد. این اتفاق فقط برای (۱) رخ می‌دهد.

۱۲۴- گزینهٔ ۱ از $t_۱$ تا $t_۲$ اندازهٔ سرعت کم می‌شود؛ پس حرکت کندشونده است. در این بازه سرعت مثبت است؛ پس متحرک در جهت محور xها حرکت می‌کند.

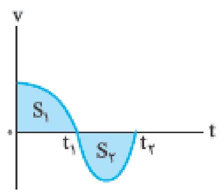
۱۲۵- گزینهٔ ۱ حرکت زمانی کندشونده است که اندازهٔ سرعت کم شود. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، فقط از $t=۱s$ تا t' این اتفاق می‌افتد؛ پس برای حل این تست تنها کافی است مقدار $\Delta t=(t'-۱)$ را تعیین کنیم. برای محاسبهٔ t' از تشابه دو مثلث (رنگ‌شده) کمک می‌گیریم:



$$\frac{۲}{|-۴|}=\frac{t'-۱}{۷-t'} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{t'-۱}{۷-t'} \Rightarrow ۷-t'=۲t'-۲ \Rightarrow ۹=۳t' \Rightarrow t'=\frac{۹}{۳}=۳\ s$$

بنابراین حرکت متحرک به مدت $\Delta t=۳-۱=۲s$ کندشونده بوده است.

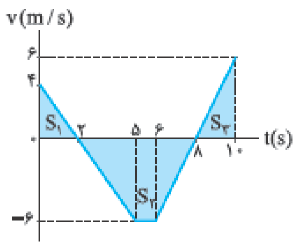
۱۲۶- گزینهٔ ۱ در نمودار v ـ t برای به دست آوردن جابه‌جایی باید مساحت قسمت‌هایی که بالای محور زمان (t) قرار دارند را مثبت و قسمت‌هایی که زیر محور زمان قرار دارند را منفی در نظر بگیریم. با توجه به این موضوع، در شکل روبه‌رو برای به دست آوردن اندازهٔ جابه‌جایی داریم:



$$\Delta x=S_۱-S_۲ \Rightarrow |\Delta x|=|S_۱-S_۲|=|S_۲-S_۱|$$

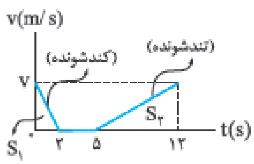
به دست آوردن مسافت هم که اصلاً کاری ندارد: $\text{مسافت طی‌شده}=S_۱+S_۲$

۱۲۷- گزینهٔ ۱ بدون هیچ دردسری می‌توانیم جابه‌جایی را محاسبه کنیم. فقط در این نوع تست‌ها باید **حواستان باشد که** جابه‌جایی قسمت‌هایی را که زیر محور t هستند، منفی در نظر بگیرید:



$$\text{جابه‌جایی}=S_۱-S_۲+S_۳=\frac{۴\times ۲}{۲}-\frac{((۸-۲)+(۶-۵))\times ۶}{۲}+\frac{(۱۰-۸)\times ۶}{۲}=-۱۱\ m$$

۱۲۸- گزینهٔ ۱ خوب است بدانید که مبدأ حرکت همان مکان اولیه است. در صورت سؤال آمده است که فاصلهٔ متحرک از مبدأ حرکت تا لحظهٔ $t=۱۲s$ برابر $۶۳\ m$ است. با توجه به این‌که سرعت تغییر علامت نمی‌دهد؛ بنابراین جهت حرکت تغییر نکرده، یعنی جابه‌جایی متحرک در این بازه $۶۳\ m$ بوده است. از آن‌جا که مساحت زیر نمودار $v-t$ جابه‌جایی را نشان می‌دهد، داریم:

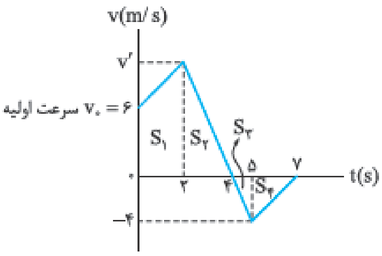


$$S_۱+S_۲=۶۳ \Rightarrow \frac{v\times ۲}{۲}+\frac{v\times(۱۲-۵)}{۲}=۶۳ \Rightarrow v+\frac{۷}{۲}v=۶۳ \Rightarrow \frac{۹}{۲}v=۶۳ \Rightarrow v=۱۴\ m/s$$

مسافت طی‌شده در مرحلهٔ تندشونده را می‌خواهیم:

$$S_۲=\frac{(۱۲-۵)\times ۱۴}{۲}=۴۹\ m$$

۱۲۹- گزینهٔ ۱ **گام اول:** در شکل زیر مقدار سرعت در $t = ۲\,s$ را به کمک تشابه دو مثلث با مساحت‌های $S_۲$ و $S_۳$ به دست می‌آوریم:



$$\frac{v'}{|-۴|} = \frac{۴-۲}{(۵-۴)} \Rightarrow \frac{v'}{۴} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow v' = ۸\,m/s$$

گام دوم: اندازهٔ مساحت‌های هر یک از قسمت‌ها را به دست می‌آوریم:

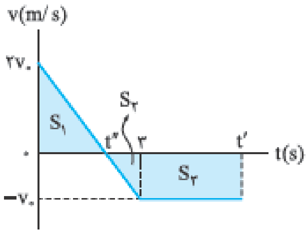
$$|S_۱| = \frac{(۶+۸)\times ۲}{۲} = ۱۴ \qquad |S_۲| = \frac{(۴-۲)\times ۸}{۲} = ۸$$

$$|S_۳| = \frac{(۵-۴)\times ۴}{۲} = ۲ \qquad |S_۴| = \frac{(۷-۵)\times ۴}{۲} = ۴$$

گام سوم: جابه‌جایی برابر با مساحت زیر نمودار $v-t$ با در نظر گرفتن علامت است و مسافت مساحت زیر نمودار بدون در نظر گرفتن علامت:

$$\frac{d}{l} = \frac{|S_۱|+|S_۲|-|S_۳|-|S_۴|}{|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|+|S_۴|} = \frac{۱۴+۸-۲-۴}{۱۴+۸+۲+۴} = \frac{۱۶}{۲۸} = \frac{۴}{۷}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۳ باید لحظه‌ای را پیدا کنید که جابه‌جایی از $t = ۰$ تا آن لحظه صفر شود. این لحظه را t' می‌نامیم. برای این‌که t' را به دست آوریم، اول باید لحظه‌ای را که سرعت صفر می‌شود (یعنی t'') تعیین کنیم. برای این کار از تشابه دو مثلث $S_۱$ و $S_۲$ کمک می‌گیریم:



$$\frac{۲v_۰}{|-v_۰|} = \frac{t''}{۳-t''} \Rightarrow \frac{۲v_۰}{v_۰} = \frac{t''}{۳-t''} \Rightarrow ۲ = \frac{t''}{۳-t''} \Rightarrow ۶-۲t'' = t'' \Rightarrow ۶ = ۳t'' \Rightarrow t'' = ۲s$$

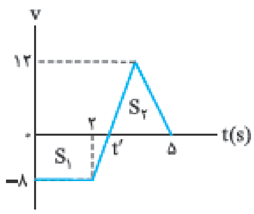
حالا که t'' را محاسبه کردیم به سراغ t' می‌رویم. جابه‌جایی از صفر تا t' صفر است:

$$|S_۱| - (|S_۲|+|S_۳|) = ۰ \Rightarrow |S_۱| = |S_۲|+|S_۳| \Rightarrow \frac{۲v_۰\times t''}{۲} = \left|\frac{(-v_۰)\times(۳-t'')}{۲}\right| + |(-v_۰)\times(t'-۳)|$$

$$\Rightarrow v_۰\times(۲) = v_۰\times\frac{(۳-۲)}{۲} + v_۰\times(t'-۳) \Rightarrow ۲v_۰ = \frac{۱}{۲}v_۰ + v_۰(t'-۳) \Rightarrow ۲v_۰ = v_۰\left(\frac{۱}{۲}+(t'-۳)\right)$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{۱}{۲}+(t'-۳) \Rightarrow \frac{۳}{۲} = t'-۳ \Rightarrow t' = \frac{۳}{۲}+۳ = ۴/۵s$$

۱۳۱- گزینهٔ ۴ **گام اول:** جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اول صفر است؛ پس براساس نمودار سرعت ـ زمان شکل روبه‌رو داریم:



$$|S_۲| - |S_۱| = ۰ \Rightarrow |S_۲| = |S_۱| \Rightarrow \left|\frac{۱۲\times(۵-t')}{۲}\right| = \left|\frac{(۲+t')\times(-۸)}{۲}\right|$$

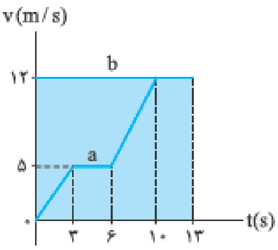
$$\xrightarrow{t'<۵} \frac{۱۲\times(۵-t')}{۲} = \frac{(۲+t')\times ۸}{۲} \Rightarrow ۳\times(۵-t') = (۲+t')\times ۲$$

$$\Rightarrow ۱۵-۳t' = ۴+۲t' \Rightarrow ۱۱ = ۵t' \Rightarrow t' = \frac{۱۱}{۵} = ۲/۲s$$

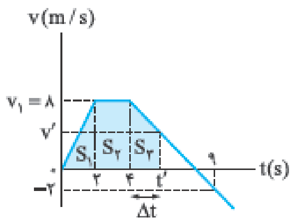
گام دوم: مسافت برابر مجموع مساحت‌ها بدون در نظر گرفتن علامت‌ها است:

$$l = |S_۱|+|S_۲| \xrightarrow{|S_۱|=|S_۲|} l = ۲|S_۲| = ۲\left(\frac{(۵-t')\times ۱۲}{۲}\right) \xrightarrow{t'=۲/۲s} l = (۵-۲/۲)\times ۱۲ = (۲/۸)\times ۱۲ \Rightarrow l = ۳۳/۶\,m$$

۱۳۲- گزینهٔ ۴ در نمودار v ـ t جابه‌جایی برابر با مساحت زیر نمودار است؛ با توجه به این‌که دو متحرک هم‌زمان از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند، بنابراین متحرک a هیچ وقت به متحرک b نمی‌رسد، چون مساحت زیر نمودار b همواره از مساحت زیر نمودار a بیشتر است.



۱۳۳- گزینهٔ ۲ **گام اول:** جابه‌جایی یک متحرک برابر با مساحت بین نمودار $v-t$ و محور t است. مطابق شکل روبه‌رو فرض می‌کنیم متحرک در لحظهٔ t' برای اولین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ تا این لحظه متحرک باید $۳۶\,m$ در جهت مثبت محور xها حرکت کند؛ پس داریم:



$$S_۱+S_۲+S_۳ = ۳۶ \Rightarrow \frac{۸\times ۲}{۲}+۸\times ۲+S_۳ = ۳۶ \Rightarrow ۲۴+S_۳ = ۳۶ \Rightarrow S_۳ = ۱۲\,m$$

گام دوم: چون در بازهٔ $(۴s\,,۹s)$ نمودار به صورت یک خط راست است، داریم:

$$\text{شیب نمودار در } (۴s\,,t') = \text{شیب نمودار در } (۴s\,,۹s) \Rightarrow \frac{۸-v'}{t'-۴} = \frac{۸-(-۲)}{۹-۴}$$

$$\xrightarrow{\Delta t = t'-۴} \frac{۸-v'}{\Delta t} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \Rightarrow ۸-v' = ۲\Delta t \Rightarrow v' = ۸-۲\Delta t$$

گام سوم: مساحت ذوزنقه ($S_۲$) را ۱۲ قرار می‌دهیم:

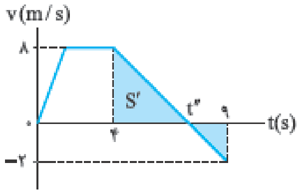
$$S_۲=\frac{v_۱+v'}{۲}\Delta t \Rightarrow ۱۲=\frac{v_۱+۸-۲\Delta t}{۲}\Delta t$$

$$\Rightarrow ۱۲=\frac{۸-۲\Delta t+۸}{۲}\Delta t \Rightarrow ۲۴=۱۶\Delta t-۲\Delta t^۲ \Rightarrow \Delta t^۲-۸\Delta t+۱۲=۰ \Rightarrow (\Delta t-۲)(\Delta t-۶)=۰ \Rightarrow \Delta t=\begin{cases}۲\,s\\ ۶\,s\end{cases}$$

چون در سؤال گفته شده است، در چه لحظه‌ای متحرک برای اولین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند، $\Delta t=۲\,s$ را در نظر می‌گیریم و داریم: $t'-۴=۲\Rightarrow t'=۶\,s$

تکنیک بعد از این‌که فهمیدیم $S_۲$ باید برابر ۱۲ باشد، می‌توانیم با رد گزینه به جواب برسیم. با توجه به شکل روبه‌رو، محل تلاقی نمودار با محور t را با استفاده از تشابه مثلث‌ها به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{۸}{t''-۴}=\frac{۲}{۹-t''}\Rightarrow t''=۸\,s$$

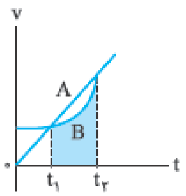


حالا مساحت زیر نمودار در (۴s , ۸s) را محاسبه می‌کنیم:

$$S'=\frac{(۸-۴)(۸)}{۲}=۱۶$$

با توجه به این‌که $S_۲$ باید برابر ۱۲ باشد، نتیجه می‌گیریم لحظهٔ مورد نظر در بازهٔ زمانی (۴s , ۸s) باشد، پس ۲ را انتخاب می‌کنیم.

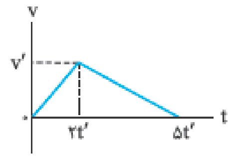
۱۳۴- **گزینهٔ ۲** سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر مدت زمان جابه‌جایی است. با توجه به این‌که برای دو متحرک A و B مدت زمان جابه‌جایی برابر است ($t_۲-t_۱$)، کافی است تعیین کنیم جابه‌جایی کدام بیشتر است. در نمودار t ـ v مساحت زیر نمودار، جابه‌جایی است. اگر به نمودار روبه‌رو دقت کنید، می‌بینید که مساحت زیر نمودار برای متحرک A بیشتر از مساحت زیر نمودار برای متحرک B است. *(ما برای این که کار براتون راحت‌تر بشه، مساحت زیر نمودار B رو رنگی کردیم. مساحت زیر نمودار A، قسمت رنگی به اضافهٔ قسمت بین نمودار A و B است که الان سفیده.)*



$$\Delta x_A>\Delta x_B \xrightarrow{\div\Delta t} \frac{\Delta x_A}{\Delta t}>\frac{\Delta x_B}{\Delta t}\Rightarrow v_{av,A}>v_{av,B}$$

۱۳۵- **گزینهٔ ۴** **گام اول:** جابه‌جایی را که همان مساحت زیر نمودار است، تعیین می‌کنیم:

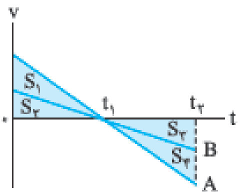
$$d=\frac{v'\times(۵t')}{۲}=\frac{۵}{۲}v't'$$



گام دوم: جابه‌جایی را تقسیم بر مدت‌زمان جابه‌جایی می‌کنیم و سرعت متوسط را تعیین می‌کنیم:

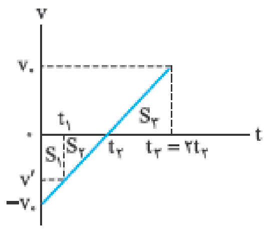
$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{\frac{۵}{۲}v't'}{۵t'}=\frac{۱}{۲}v'$$

۱۳۶- **گزینهٔ ۱** تندی متوسط برابر با مسافت تقسیم بر مدت‌زمان طی مسافت است و مسافت برابر با مساحت زیر نمودار $v-t$ بدون در نظر گرفتن علامت است:



$$\left.\begin{array}{l} l_A=|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|+|S_۴|\\ l_B=|S_۲|+|S_۳|\end{array}\right\}\Rightarrow l_A>l_B \xrightarrow{\Delta t=t_۲-۰>۰} \frac{l_A}{\Delta t}>\frac{l_B}{\Delta t}\Rightarrow s_{av,A}>s_{av,B}$$

۱۳۷- **گزینهٔ ۱** سرعت متوسط برابر با جابه‌جایی تقسیم بر زمان است. در نمودار سرعت ـ زمان جابه‌جایی برابر مجموع مساحت‌های زیر نمودار با در نظر گرفتن علامت است. مساحت زیر نمودار را در هر یک از قسمت‌ها مطابق شکل زیر به دست می‌آوریم:



$$|S_۱|=|(\frac{v'+v_۰}{۲})t_۱|=\frac{(v'+v_۰)t_۱}{۲}$$

$$|S_۲|=|\frac{v'(t_۲-t_۱)}{۲}|=\frac{v'(t_۲-t_۱)}{۲}$$

$$|S_۳|=|\frac{v_۰(۲t_۲-t_۲)}{۲}|=\frac{v_۰t_۲}{۲}$$

حالا تندی متوسط در هر یک از بازه‌های داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$(۰,t_۲):s_{av,۲}=\frac{l_۲}{\Delta t_۲}=\frac{(\frac{v_۰t_۲}{۲})}{t_۲-۰}=\frac{v_۰}{۲}$$

$$(۰,t_۱):s_{av,۱}=\frac{l_۱}{\Delta t_۱}=\frac{(\frac{v'+v_۰}{۲})t_۱}{(t_۱-۰)}=\frac{v'+v_۰}{۲}$$

$$(۰,t_۳):s_{av,۴}=\frac{l_۴}{\Delta t_۴}=\frac{\frac{v_۰t_۲}{۲}+\frac{v_۰t_۲}{۲}}{۲t_۲-۰}=\frac{v_۰}{۲}$$

$$(t_۱,t_۲):s_{av,۳}=\frac{l_۳}{\Delta t_۳}=\frac{\frac{v'(t_۲-t_۱)}{۲}}{(t_۲-t_۱)}=\frac{v'}{۲}$$

از آن‌جا که $v'<v_۰$ است، داریم: $s_{av,۱}>s_{av,۲}=s_{av,۴}>s_{av,۳}$

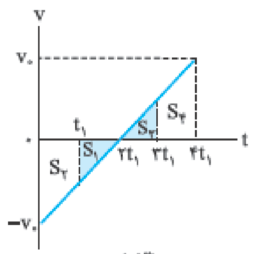
به طور شهودی هم می‌توانستیم بگوییم که قبل از تغییر جهت هر چه‌قدر اندازهٔ سرعت در لحظه‌های مختلف یک بازهٔ زمانی بیشتر باشد، تندی متوسط هم بیشتر است.

۱۳۸- گزینهٔ۳ **گام اول:** در شکل (الف) می‌بینید که مثلث‌ها با هم متشابه‌اند. با توجه به اصل تشابه، نسبت مساحت مثلث‌ها به دست می‌آید:

$$\frac{S_۱}{S_۱+S_۲}=(\frac{t_۱}{۲t_۱})^۲=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_۲=۳S_۱$$

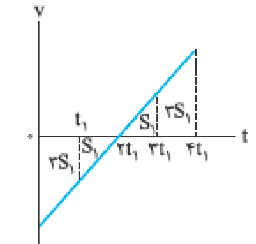
به همین ترتیب برای دو مثلث $S_۳$ و $S_۴$ داریم:

$$\frac{S_۳}{S_۳+S_۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_۴=۳S_۳$$



(الف)

از آن‌جایی که $S_۱=S_۳$، می‌توانیم مطابق شکل (ب)، مساحت قسمت‌های مختلف را برحسب $S_۱$ نشان دهیم:



(ب)

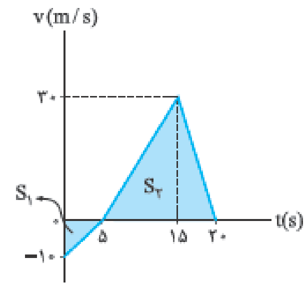
گام دوم: حالا در هر یک از بازه‌ها تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$(۰,t_۱):s_{av,۱}=\frac{۳S_۱}{t_۱-۰}=۳(\frac{S_۱}{t_۱})\qquad (۰,۲t_۱):s_{av,۲}=\frac{۴S_۱}{۲t_۱-۰}=۲(\frac{S_۱}{t_۱})$$

$$(۰,۳t_۱):s_{av,۳}=\frac{۵S_۱}{۳t_۱-۰}=\frac{۵}{۳}(\frac{S_۱}{t_۱})\qquad (۰,۴t_۱):s_{av,۴}=\frac{۸S_۱}{۴t-۰}=۲(\frac{S_۱}{t_۱})$$

همان‌طور که می‌بینید تندی در بازهٔ $(۰,۳t_۱)$ دارای کم‌ترین مقدار است.

۱۳۹- گزینهٔ۳ **گام اول:** جابه‌جایی را به کمک مساحت زیر نمودار t ـ v در شکل روبه‌رو به دست می‌آوریم. فقط باید به این نکته توجه کنیم که مساحت قسمتی را که زیر محور t است، منفی بگیریم:

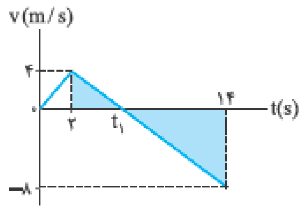


$$\Delta x=-S_۱+S_۲=-\frac{۱۰\times ۵}{۲}+\frac{۳۰\times(۲۰-۵)}{۲}\Rightarrow \Delta x=-۲۵+۲۲۵=۲۰۰\,m$$

گام دوم: جابه‌جایی را که داریم، زمان هم داریم؛ پس چیزی برای به دست آوردن سرعت متوسط کم نداریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۰۰}{۲۰}=۱۰\,m/s$$

۱۴۰- گزینهٔ۳ متحرک زمانی در سوی مخالف محور x حرکت می‌کند که سرعت آن منفی باشد؛ پس در شکل روبه‌رو از $t=t_۱$ تا $t=۱۴\,s$، متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. برای به دست آوردن $t_۱$ از تشابه دو مثلث رنگی استفاده می‌کنیم:

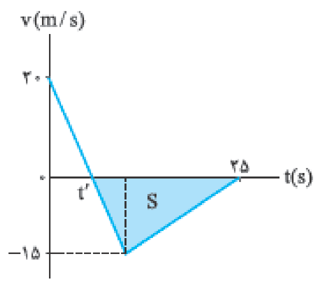


$$\frac{t_۱-۲}{۱۴-t_۱}=\frac{۴}{|-۸|}\Rightarrow \frac{t_۱-۲}{۱۴-t_۱}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲t_۱-۴=۱۴-t_۱\Rightarrow ۳t_۱=۱۸\Rightarrow t_۱=۶\,s$$

حواستون‌باشه! کار تمام نشده است، مدت زمانی را که متحرک در سوی منفی محور xها حرکت می‌کند، می‌خواهیم:

$$\Delta t=۱۴-۶=۸\,s$$

۱۴۱- گزینهٔ۳ متحرک از $t=t'$ تا $t=۲۵\,s$ در خلاف جهت محور xها حرکت کرده است. بزرگی جابه‌جایی در این قسمت برابر با مساحت قسمت رنگی در شکل مقابل است:

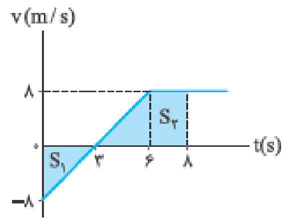


$$|\Delta x|=S\Rightarrow |\Delta x|=\frac{(۲۵-t')\times ۱۵}{۲}\,m$$

بنابراین بزرگی سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{\frac{(۲۵-t')\times ۱۵}{۲}}{(۲۵-t')}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵\,m/s$$

۱۴۲- گزینهٔ۲ **گام اول:** با توجه به شکل روبه‌رو، سطح محصور بین نمودار t ـ v و محور t در بازهٔ زمانی صفر تا ۸ s را به دست می‌آوریم. جابه‌جایی و مسافت طی‌شده برابر است با:



$$\Delta x=-S_۱+S_۲=-\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۸+\frac{(۵+۲)\times ۸}{۲}\Rightarrow \Delta x=-۱۲+۲۸=۱۶\,m$$

$$l=S_۱+S_۲=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۸+\frac{(۵+۲)\times ۸}{۲}\Rightarrow l=۱۲+۲۸=۴۰\,m$$

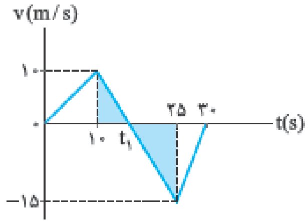
گام دوم: حالا با داشتن Δx و l می‌توانیم سرعت متوسط و تندی متوسط را محاسبه کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۴۰}{۸}=۵\,m/s\qquad v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۶}{۸}=۲\,m/s$$

گام سوم: اختلاف تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط در این ۸ s به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av}-v_{av}=۵-۲=۳\,m/s$$

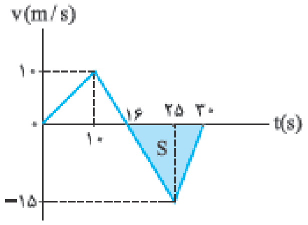
۱۴۳- گزینهٔ ۱ **گام اول:** وقتی سرعت منفی است، متحرک در سوی منفی محور در حال حرکت است. پس با توجه به شکل روبه‌رو از $t = t_1$ تا $t = ۳۰\,s$ متحرک به سمت منفی محور xها در حال حرکت است. مقدار t_1 را به کمک تاکتیک تشابه به دست می‌آوریم. دو مثلث رنگی متشابه هستند، پس:



$$\frac{۲۵-t_1}{t_1-۱۰}=\frac{|-۱۵|}{۱۰}=\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۵۰-۲t_1=۳t_1-۳۰$$

$$\Rightarrow ۵۰+۳۰=۳t_1+۲t_1 \Rightarrow ۸۰=۵t_1 \Rightarrow t_1=\frac{۸۰}{۵}=۱۶\,s$$

حالا سرعت متوسط از $t_1 = ۱۶\,s$ تا $t = ۳۰\,s$ را به دست می‌آوریم. برای این کار به جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی نیاز داریم که برابر با مساحت قسمت رنگی در شکل روبه‌رو است:

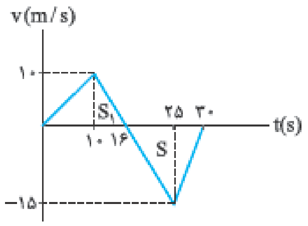


$$\Delta x=-S=-\frac{(۳۰-۱۶)\times ۱۵}{۲}=-۱۰۵\,m$$

بنابراین بزرگی سرعت متوسط در مدتی که متحرک در سوی مخالف محور x حرکت می‌کند، برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=-\frac{۱۰۵}{۳۰-۱۶}=-۷/۵\,m/s \Rightarrow |v_{av}|=۷/۵\,m/s$$

گام دوم: برای محاسبهٔ تندی متوسط در بازهٔ زمانی (۱۰s , ۳۰s) به مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی احتیاج داریم که به صورت زیر به دست می‌آید:



$$l=S_1+S=\frac{(۱۶-۱۰)\times ۱۰}{۲}+\frac{(۳۰-۱۶)\times ۱۵}{۲}=۳۰+۱۰۵=۱۳۵\,m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی (۱۰s , ۳۰s) برابر است:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۳۵}{۳۰-۱۰}=\frac{۱۳۵}{۲۰} \Rightarrow s_{av}=۶/۷۵\,m/s$$

گام سوم: با داشتن v_{av} و s_{av} مقدار خواسته‌شده در تست را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}-s_{av}=۷/۵-۶/۷۵=۰/۷۵\,m/s$$

۱۴۴- گزینهٔ ۳ بررسی عبارت‌ها: الف) این عبارت درست است، چون در لحظه‌های ۳s و ۵s سرعت تغییر علامت می‌دهد.

ب) از $t = ۳\,s$ تا $t = ۵\,s$ که سرعت مثبت است، متحرک در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند. باید بیشینهٔ سرعت در این قسمت را به دست آوریم.

با توجه به لحظه‌های ۳s و ۵s که در آن‌ها سرعت صفر می‌شوند، معادلهٔ سرعت ـ زمان را می‌نویسیم. این لحظه‌ها ریشه‌های معادلهٔ سرعت به ازای $v = ۰$ هستند. پس داریم:

$$v=\underset{\downarrow}{-}(t-۳)(t-۵)=-t^۲+۸t-۱۵$$

(علامت منفی به خاطر رو به پایین بودن سهمی است.)

همان‌طور که می‌دانید، سهمی موردنظر در $t=-\frac{B}{۲A}$ بیشینه می‌شود:

$$t=-\frac{B}{۲A}=\frac{-۸}{۲(-۱)}=\frac{-۸}{-۲}=۴\,s$$

پس در $t = ۴\,s$ سرعت را به دست می‌آوریم:

$$t=۴\,s \Rightarrow v_{(۴)}=-(۴)^۲+۸(۴)-۱۵=-۱۶+۳۲-۱۵=۱\,m/s$$

پس این عبارت هم درست است.

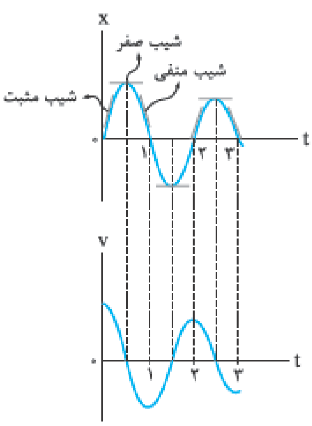
پ) این عبارت نادرست است؛ چون اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی با هم مساوی است. در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط با هم برابر است.

ت) کافی است $t = ۶\,s$ را در معادله‌ای که به دست آوردیم، قرار دهیم:

$$v_{(۶)}=-(۶)^۲+۸(۶)-۱۵=-۳\,m/s$$

اندازهٔ سرعت متحرک $۳\,m/s$ است و چون سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند.

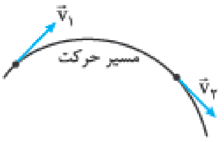
۱۴۵- گزینهٔ ۴ شیب نمودار x ـ t در هر لحظه بیانگر سرعت در آن لحظه است. بنابراین در نمودار x ـ t هر زمان شیب مثبت بود یعنی سرعت مثبت است؛ هر زمان شیب صفر بود یعنی سرعت صفر است و هر زمان شیب منفی بود، سرعت منفی است. با توجه به این موضوع به سراغ بررسی نمودار x ـ t و رسم کیفی نمودار v ـ t می‌رویم:



درس ۸
شتاب

اگر بردار سرعت متحرک به هر نحوی تغییر کند، حرکت جسم شتاب‌دار است؛ در واقع هر وقت **تغییر سرعت** هست، **شتاب** هم هست. سرعت مثل همهٔ کمیت‌های برداری دو جور تغییر می‌کند:

الف) تغییر اندازهٔ سرعت: وقتی اندازهٔ سرعت تغییر می‌کند، حرکت جسم یا کندشونده است یا تندشونده. در این صورت حتماً حرکت شتاب‌دار است.



ب) تغییر جهت سرعت: می‌دانید که بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است؛ پس با تغییر راستا و جهت حرکت، راستا و جهت بردار سرعت هم تغییر می‌کند؛ یعنی در حرکت‌هایی که بر مسیر خط راست نیست، حتماً سرعت تغییر جهت می‌دهد و به همین دلیل حتماً شتاب داریم (حتی اگر اندازهٔ سرعت تغییر نکند). در شکل روبه‌رو بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ هم‌اندازه‌اند (مثلاً مقدار هر دو $10\,m/s$ است) ولی جهت آن‌ها متفاوت است و برای همین می‌گوییم سرعت تغییر کرده و حرکت شتاب‌دار است.

نگاهی شهودی‌تر به شتاب

این موضوع را باید در فصل دینامیک بگوییم ولی گفتنش در این‌جا هم خالی از لطف نیست:

گفتیم هر جا **تغییر سرعت** هست، **شتاب** هم هست. اما خوب است بدانیم که عامل تغییر سرعت، نیرو است؛ یعنی اگر بخواهیم سرعت جسمی زیاد شود، باید در جهت حرکت به آن نیرو وارد کنیم (هُل بدهیم). اگر بخواهیم سرعت جسم کم شود، باید در خلاف جهت حرکت به آن نیرو وارد کنیم و اگر بخواهیم مسیر متحرک تغییر کند (یعنی جهت بردار سرعت تغییر کند) باید عمود بر مسیر حرکت به آن نیرو وارد کنیم؛ پس می‌توانیم بگوییم هر جا که بر جسم نیروی خالصی وارد شود، شتاب ایجاد می‌شود و اندازه یا جهت سرعت جسم تغییر می‌کند.

یعنی هر جا نیروی خالص هست، شتاب و تغییر سرعت هم هست.

جهت بردارهای شتاب، تغییر سرعت و نیروی خالص همواره هم‌سو است.

حواستون باشه! *سرعت با تغییر سرعت فرق می‌کنه.* جهت بردار سرعت لزوماً هم‌جهت با شتاب و نیرو و تغییرات سرعت نیست. مثلاً در حرکت راست‌خط کندشونده، جهت بردارهای نیرو، شتاب و تغییرات سرعت در خلاف جهت حرکت (یعنی خلاف جهت بردار سرعت) است.

شتاب متوسط

اگر بردار سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 برابر $\vec{v}_1$ و بردار سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 برابر $\vec{v}_2$ باشد، شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $(t_1\,,\,t_2)$ از رابطهٔ روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

در SI یکای تغییرات سرعت متر بر ثانیه (m/s) و یکای زمان ثانیه (s) است، پس یکای شتاب در SI متر بر مربع ثانیه (m/s^2) است:

$$\text{یکای شتاب}=\frac{\text{یکای تغییرات سرعت}}{\text{یکای تغییرات زمان}}=\frac{m/s}{s}=m/s^2$$

چندنکته

۱) شتاب کمیتی برداری است؛ زیرا از ضرب یک کمیت نرده‌ای $\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$ در یک کمیت برداری $(\Delta\vec{v})$ به دست می‌آید. در ضمن چون $\frac{1}{\Delta t}$ همواره مثبت است، پس بردار شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$ همواره هم‌سو با بردار تغییرات سرعت $(\Delta\vec{v})$ است.

تست بردار سرعت متحرکی در لحظه‌های $t_1=2\,s$ و $t_2=5\,s$ در SI به صورت $\vec{v}_1=5\vec{i}-2\vec{j}$ و $\vec{v}_2=8\vec{i}+4\vec{j}$ است. اندازهٔ شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ $(2\,s,5\,s)$ چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۳　　۲) $\sqrt{5}$　　۳) ۹　　۴) $\sqrt{15}$

پاسخ گزینهٔ ۲ **گام اول:** از فرمول $\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$، بردار $\vec{a}_{av}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{(8\vec{i}+4\vec{j})-(5\vec{i}-2\vec{j})}{5-2}=\frac{3\vec{i}+6\vec{j}}{3}=\vec{i}+2\vec{j}$$

گام دوم: اندازهٔ بردار شتاب را از رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم:

$$a_{av}=\sqrt{(a_{av_x})^2+(a_{av_y})^2}=\sqrt{(1)^2+(2)^2}=\sqrt{5}\,m/s^2$$

تست معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $\vec{v}=(t^2-25)\,\vec{i}$ است. شتاب متوسط این متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکتش برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $-10\,\vec{i}$　　۲) $-20\,\vec{i}$　　۳) $10\,\vec{i}$　　۴) $20\,\vec{i}$

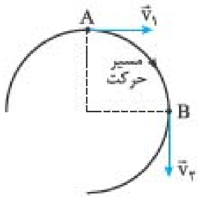
پاسخ گزینهٔ ۳ **گام اول:** ۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $t_1=4\,s$ تا $t_2=6\,s$، پس باید سرعت متحرک در این لحظه‌ها را حساب کنیم:

$$\begin{cases}\vec{v}_1=(4^2-25)\,\vec{i}=-9\,\vec{i}\\ \vec{v}_2=(6^2-25)\,\vec{i}=11\,\vec{i}\end{cases}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم بردار شتاب متوسط را هم داشته باشیم:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{11\vec{i}-(-9\,\vec{i})}{6-4}=\frac{20\,\vec{i}}{2}=10\,\vec{i}$$

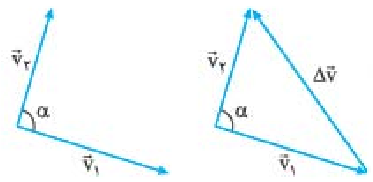
حواستون باشه! سرعت و تغییرات سرعت، دو کمیت هم‌جنس هستند ولی با هم فرق دارند. در واقع تغییرات سرعت تفاضل دو بردار سرعت است. مثلاً در شکل روبه‌رو بردار تغییرات سرعت از A تا B نه در جهت $\vec{v}_1$ است و نه در جهت $\vec{v}_2$. *برای این‌که بسونید این بردار در چه جهتیه، یادآوری ریاضی زیر رو بخونید.*



تفاضل دو بردار (یادآوری ریاضی)

در فیزیک، تغییرات یک کمیت برداری برابر با تفاضل برداری[1] دو بردار نهایی و اولیهٔ آن کمیت است. مثلاً تغییرات سرعت برابر است با: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

حالا می‌خواهیم بدانیم تفاضل دو بردار را چه‌طور باید حساب کنیم. در شکل (الف) دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را به صورت هم‌مبدأ رسم کرده‌ایم. بردار $\Delta\vec{v}$ یا همان $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ یک بردار است که از انتهای بردار $\vec{v}_1$ به انتهای بردار $\vec{v}_2$ رسم می‌شود (شکل ب).



همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید $\Delta\vec{v}$ نه در جهت $\vec{v}_1$ است و نه در جهت $\vec{v}_2$.

بد نیست بدانید که اندازهٔ $\Delta\vec{v}$ از رابطهٔ کلی زیر حساب می‌شود:[2]

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}$$

(در این رابطه α زاویهٔ بین دو بردار است.)

دو حالت خاص برای Δv، موردنظر کتاب درسی است:

الف) بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ در یک راستا باشند: در حرکت بر مسیر خط راست، همواره بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ در یک راستا هستند.

در این صورت داریم:

$$\Delta v = \sqrt{v_2^2 + v_1^2 - 2v_1v_2\cos 0} \xrightarrow{\cos 0 = 1} \Delta v = \sqrt{(v_2 - v_1)^2} \Rightarrow \boxed{\Delta v = v_2 - v_1}$$

در این رابطه با توجه به جهت حرکت، باید حواسمان به علامت v_1 و v_2 باشد.

در این حالت بردار $\Delta\vec{v}$ هم‌راستا با بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ است. *حواستون باشه* گفتیم هم‌راستا است، یعنی $\Delta\vec{v}$ لزوماً هم‌جهت با $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ نیست. *تست زیر رو ببینید.*

تست معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -3t + 6$ است. بردار تغییر سرعت این متحرک در بازهٔ $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$ در SI کدام است و هم‌جهت با کدام بردار سرعت است؟ ($\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ به ترتیب بردارهای سرعت در لحظه‌های t_1 و t_2 هستند.)

۱) $\vec{v}_1, 6\vec{i}$ ۲) $\vec{v}_1, -6\vec{i}$ ۳) $\vec{v}_2, 6\vec{i}$ ۴) $\vec{v}_2, -6\vec{i}$

پاسخ گزینهٔ ۴ **گام اول:** $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را حساب می‌کنیم:

$$v_1 = -3(1) + 6 = 3 \Rightarrow \vec{v}_1 = 3\vec{i}\ (m/s)$$
$$v_2 = -3(3) + 6 = -3 \Rightarrow \vec{v}_2 = -3\vec{i}\ (m/s)$$

گام دوم: $\Delta\vec{v}$ را به دست می‌آوریم:

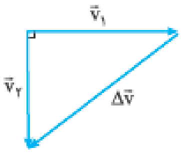
$$\Delta v = v_2 - v_1 = (-3) - (3) = -6 \Rightarrow \Delta\vec{v} = -6\vec{i}\ (m/s)$$

همین‌طور که می‌بینید، $\Delta\vec{v}$ هم‌سو با $\vec{v}_2$ و در خلاف جهت $\vec{v}_1$ است.

ب) بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ بر هم عمود باشند: جهت بردار سرعت 90° تغییر کرده است و بنابراین مسیر این حرکت نمی‌تواند خط راست باشد. برای این حالت خاص $(\alpha = 90^\circ)$ داریم:

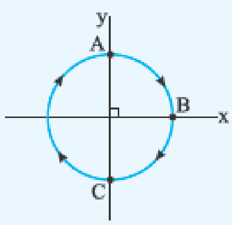
$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 90^\circ} \xrightarrow{\cos 90^\circ = 0} \Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

بردار تغییرات سرعت $(\Delta\vec{v})$ مطابق شکل روبه‌رو است. می‌بینید که اندازهٔ Δv برابر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه است که از رابطهٔ فیثاغورس $(\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2})$ محاسبه می‌شود.



در این حالت بردار $\Delta\vec{v}$ نه در جهت $\vec{v}_1$ است و نه در جهت $\vec{v}_2$.

تست متحرکی با تندی ثابت $10\ m/s$ بر روی مسیر دایره‌ای (شکل روبه‌رو) در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند. اگر متحرک در لحظه‌های $t_1 = 0$، $t_2 = 4s$ و $t_3 = 8s$ به ترتیب در حال عبور از نقطه‌های A، B و C باشد، بردار شتاب متوسط متحرک در بازه‌های زمانی $(0, 4s)$ و $(0, 8s)$ به ترتیب چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) $\vec{a}_{av_{08}} = -2/5\vec{i}, \vec{a}_{av_{04}} = -2/5\vec{i} - 2/5\vec{j}$ ۲) $\vec{a}_{av_{08}} = 0, \vec{a}_{av_{04}} = -2/5\vec{i} - 2/5\vec{j}$

۳) $\vec{a}_{av_{08}} = 2/5\vec{i}, \vec{a}_{av_{04}} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$ ۴) $\vec{a}_{av_{08}} = 0, \vec{a}_{av_{04}} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$

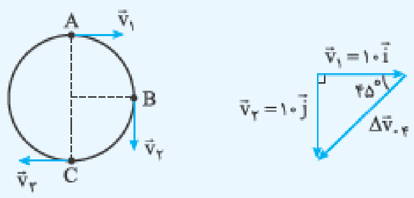
پاسخ گزینهٔ ۲ در شکل (الف)، بردارهای $\vec{v}_1$، $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ را رسم کرده‌ایم.

الف) محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $(0, 4s)$: بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ بر هم عمودند و بردار تغییر سرعت در بازهٔ ۰ تا ۴ s $(\Delta\vec{v}_{04})$ مطابق شکل (ب) است.

بردار تغییرات سرعت در این بازه برابر می‌شود با:

$$\Delta\vec{v}_{04} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (-10\vec{j}) - (10\vec{i}) = -10\vec{i} - 10\vec{j}$$

(اندازهٔ Δv_{04} برابر می‌شود با: $\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}\ m/s$)



۱- تفاضل برداری با تفاضل جبری (منهاکردن) فرق می‌کند. مثلاً اندازهٔ تفاضل دو کمیت برداری ۴ و ۳ واحدی، لزوماً ۱ واحد نیست.

۲- وقتی علامت بردار را از بالای نماد یک کمیت برداری برمی‌داریم، به اندازهٔ آن کمیت تبدیل می‌شود. مثلاً Δv یعنی اندازهٔ $\Delta\vec{v}$.

حالا بردار شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا ۴ s را می‌توانیم حساب کنیم:

$$\vec{a}_{av_{۰۴}} = \frac{\Delta \vec{v}_{۰۴}}{\Delta t} = \frac{-۱۰\vec{i}-۱۰\vec{j}}{۴-۰} = -۲/۵\vec{i}-۲/۵\vec{j}$$

(اندازهٔ بردار شتاب در بازهٔ ۰ تا ۴ s برابر می‌شود با: $\sqrt{۲/۵^۲+۲/۵^۲} = ۲/۵\sqrt{۲}\ m/s^۲$)

پ) محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $(۰\ ,\ ۸\ s)$:

در شکل (پ) بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ را هم‌مبدأ کرده‌ایم، پس بردار تغییرات سرعت در بازهٔ $(۰,۸\ s)$ به این صورت است:

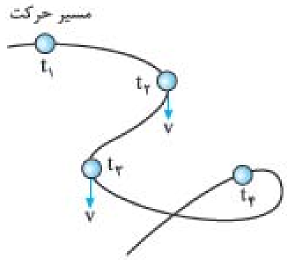
(پ)

$$\Delta\vec{v}_{۰۸} = \vec{v}_۲ - \vec{v}_۱ = -۱۰\vec{i} - ۱۰\vec{i} = -۲۰\vec{i}$$

بردار شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا ۸ s:

$$\vec{a}_{av_{۰۸}} = \frac{\Delta\vec{v}_{۰۸}}{\Delta t} = \frac{-۲۰\vec{i}}{۸-۰} = -۲/۵\vec{i}$$

۱۴۶- گزینهٔ ۱ در بعضی از بازه‌های زمانی‌ای که **بردار سرعت** در ابتدا و انتهای آن بازه برابر است، شتاب متوسط صفر می‌شود.



مثلاً در بازهٔ $(t_۲\ ,t_۳)$ شتاب متوسط صفر است.

البته در بازه‌های زمانی دیگر شتاب صفر نیست مثل بازه‌های زمانی $(t_۱\ ,t_۴)$.

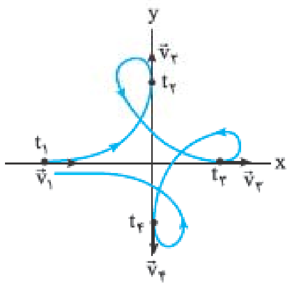
بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اگر شتاب ثابت باشد، شتاب متوسط همواره ثابت است، در حالی که در **۱** دیدیم در بعضی از بازه‌های زمانی شتاب صفر می‌شود و در بازه‌های زمانی دیگر شتاب صفر نیست.

۳) نه! به طور مثال فرض کنید $\Delta t = t_۲ - t_۱$ با $\Delta t' = t_۳ - t_۲$ یکسان باشد. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ $(t_۲\ ,t_۳)$ صفر است اما شتاب متوسط در بازهٔ $(t_۱\ ,t_۲)$ صفر نیست.

۴) همان‌طور که در شکل می‌بینید، بردار سرعت همواره در حال تغییر جهت است؛ پس شتاب حرکت صفر نیست.

۱۴۷- گزینهٔ ۱ چون تندی حرکت ثابت است، اندازهٔ سرعت در تمام لحظات ثابت است و بردارهای سرعت به صورت شکل روبه‌رو می‌شوند.



از آن‌جا که شتاب متوسط در هر بازه برابر با $\frac{\vec{v}_{نهایی} - \vec{v}_{اولیه}}{\Delta t}$ است، تنها در بازه‌هایی شتاب صفر است که $\vec{v}_{نهایی} = \vec{v}_{اولیه}$ باشد. این اتفاق فقط در بازهٔ زمانی اشاره‌شده در **۱** یعنی $(t_۱\ ,t_۳)$ می‌افتد.

۱۴۸- گزینهٔ ۱ با توجه به اطلاعات تست می‌توانیم سرعت متوسط را بین بازه‌های $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$ و $t_۲ = ۲s$ تا $t_۳ = ۳s$ به دست آوریم. اما چون هیچ اطلاعاتی در مورد جزئیات حرکت نداریم، نمی‌توانیم در مورد سرعت لحظه‌ای و هر آن‌چه که از آن به دست می‌آید (مانند شتاب متوسط)، اظهار نظر کنیم (رد **۲** و **۴**). سرعت متوسط در دو بازهٔ $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$ و $t_۲ = ۲s$ تا $t_۳ = ۳s$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_{av_{۱-۲}} = \frac{\Delta x_{۱-۲}}{\Delta t_{۱-۲}} = \frac{۲۰}{۲-۱} = ۲۰\ m/s \\ v_{av_{۲-۳}} = \frac{\Delta x_{۲-۳}}{\Delta t_{۲-۳}} = \frac{۳۰}{۳-۲} = ۳۰\ m/s \end{cases} \Rightarrow v_{av_{۱-۲}} < v_{av_{۲-۳}}$$

۱۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا سرعت نهایی را به متر بر ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$$v_۲ = ۲۰۴\ km/h = ۲۰۴ \times \frac{۱۰}{۳۶}\ m/s$$

حالا شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

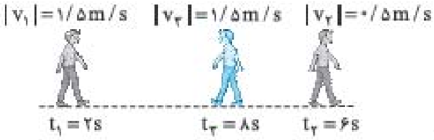
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۲۰۴\times\frac{۱۰}{۳۶}-۰}{\frac{۱}{۹}} = \frac{۲۰۴\times\frac{۱۰}{\cancel{۳۶}\ ۴}}{\frac{۱}{\cancel{۹}}} = \frac{\overset{۵۱}{\cancel{۲۰۴}}\times ۱۰}{\underset{۱}{\cancel{۴}}} = ۵۱۰\ m/s^۲$$

همان‌طور که دیدید ما اعداد را ابتدا ساده کردیم، در نهایت ضرب کردیم. شما حتماً باید این مهارت را یاد بگیرید و در تست‌ها به کار ببرید.

۱۵۰- گزینهٔ ۱ شتاب متوسط از رابطهٔ $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ به دست می‌آید. در $t = ۰/۲\ s$ تندی متحرک $۸\ m/s$ است و متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است؛ بنابراین $\vec{v}_۲ = (-۸\ m/s)\vec{i}$ است و داریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{\Delta t} \Rightarrow ۲۴\vec{i} = \frac{-۸\vec{i}-\vec{v}_۱}{۰/۲-۰} \Rightarrow ۴/۸\vec{i} = -۸\vec{i} - \vec{v}_۱ \Rightarrow \vec{v}_۱ = -۸\vec{i} - ۴/۸\vec{i} = -۱۲/۸\vec{i}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ **گام اول:** به کمک شکل روبه‌رو بردار سرعت فرد را در هر لحظه با توجه به اندازهٔ سرعت و جهت حرکتش تعیین می‌کنیم:



$t_1 = ۲\,s$, جهت حرکت : مثبت , $|v_1| = ۱/۵\,m/s \Rightarrow \vec{v}_1 = (۱/۵\,m/s)\vec{i}$

$t_2 = ۶\,s$, جهت حرکت : مثبت , $|v_2| = ۰/۵\,m/s \Rightarrow \vec{v}_2 = (۰/۵\,m/s)\vec{i}$

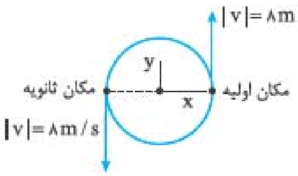
$t_3 = ۸\,s$, جهت حرکت : منفی , $|v_3| = ۱/۵\,m/s \Rightarrow \vec{v}_3 = (-۱/۵\,m/s)\vec{i}$

گام دوم: شتاب متوسط را در دو بازهٔ $(۲s , ۸s)$ و $(۶s , ۸s)$ به ترتیب از راست به چپ به دست می‌آوریم:

$$\vec{v}_{av(۶-۸)} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_2}{t_3 - t_2} = \frac{-۱/۵\vec{i} - ۰/۵\vec{i}}{۸-۶} = \frac{-۲\vec{i}}{۲} = -\vec{i}$$

$$\vec{v}_{av(۲-۸)} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1} = \frac{-۱/۵\vec{i} - ۱/۵\vec{i}}{۸-۲} = \frac{-۳\vec{i}}{۶} = -\frac{۱}{۲}\vec{i} = -۰/۵\vec{i}$$

۱۵۲- گزینهٔ ۲ اول یک شکل می‌کشیم، *ببینیم سؤال چی گفته!* متحرک نصف دایره را طی کرده است؛ پس حرکتش به صورت مقابل است:



$$\vec{v}_1 = ۸\vec{j} \quad , \quad \vec{v}_2 = -۸\vec{j}$$

حالا تغییرات سرعت را مشخص می‌کنیم:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -۸\vec{j} - ۸\vec{j} = -۱۶\vec{j}$$

و در نتیجه اندازهٔ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{۱۶}{۴} = ۴\,m/s^2$$

۱۵۳- گزینهٔ ۴ **گام اول:** ۲ ثانیهٔ اول از $t_0 = ۰$ تا $t_1 = ۲s$ و ۲ ثانیهٔ دوم از $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ است؛ پس باید سرعت در این لحظه‌ها را به دست آوریم:

$$v = t^2 + t + ۱ \Rightarrow \begin{cases} t_0 = ۰ \Rightarrow v_0 = (۰)^2 + (۰) + ۱ = ۱\,m/s \\ t_1 = ۲\,s \Rightarrow v_1 = (۲)^2 + (۲) + ۱ = ۷\,m/s \\ t_2 = ۴\,s \Rightarrow v_2 = (۴)^2 + (۴) + ۱ = ۲۱\,m/s \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به آن‌چه که خواندید، شتاب متوسط برابر تغییرات سرعت تقسیم بر مدت زمان تغییرات سرعت است؛ پس:

$$\frac{a_{av(۲-۴)}}{a_{av(۰-۲)}} = \frac{\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}{\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}} = \frac{\frac{۲۱-۷}{۴-۲}}{\frac{۷-۱}{۲-۰}} = \frac{\frac{۱۴}{۲}}{\frac{۶}{۲}} = \frac{۷}{۳}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۱ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) جهت حرکت یک متحرک زمانی عوض می‌شود که معادلهٔ سرعت ـ زمان ریشهٔ ساده داشته باشد؛ پس ریشه‌های معادلهٔ سرعت ـ زمان را به دست می‌آوریم:

$$v = ۰ \Rightarrow ۰ = (۱-t)(t^2 - ۴t + ۴) = (۱-t)(t-۲)^2 \Rightarrow t = \begin{cases} ۱ \text{ ریشهٔ ساده} \\ ۲ \text{ ریشهٔ مضاعف} \end{cases}$$

با توجه به این‌که $t = ۱s$ تنها ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک است، جهت حرکت فقط یک بار عوض می‌شود.

ب) برای این‌که عبارت (ب) را بررسی کنیم، کافی است که معادلهٔ سرعت ـ زمان را تعیین‌علامت کنیم:

ریشه‌ها	$t_0 = ۰$		$t_1 = ۱s$ (ریشهٔ ساده)		$t_2 = ۲s$ (ریشهٔ مضاعف)	
علامت معادلهٔ سرعت-زمان	+	+		−		−

همان‌طور که می‌بینید از مبدأ زمان تا $t_1 = ۱s$ سرعت مثبت و جهت حرکت به سمت مثبت محورها است؛ بنابراین این عبارت نادرست است.

پ) شتاب متوسط در ثانیهٔ دوم حرکت برابر است با:

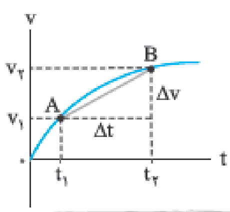
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{۰-۰}{۲-۱} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

پس عبارت (پ) درست است.

درس ۹ شتاب در نمودار سرعت-زمان

بررسی شتاب متوسط در نمودار سرعت-زمان

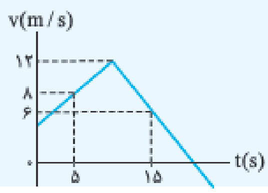
شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در این شکل دو نقطهٔ A و B واقع بر نمودار سرعت ـ زمان را با یک خط به هم وصل کرده‌ایم. شیب این خط برابر می‌شود با:



$$\text{شیب خط AB} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

یعنی شیب خط AB برابر با شتاب متوسط در بازهٔ (t_1 , t_2) است، پس می‌توانیم بگوییم: «شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان بیانگر شتاب متوسط در بازهٔ زمانی محدود بین آن دو نقطه است.»

تست **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. در بازهٔ زمانی ۵s تا ۱۵s شتاب متوسط این متحرک چند متر بر مربع ثانیه است و جهت حرکت متحرک در این بازهٔ زمانی کدام است؟**



۱) −۰/۸ و در جهت منفی

۲) −۰/۲ و در جهت منفی

۳) −۰/۸ و در جهت مثبت

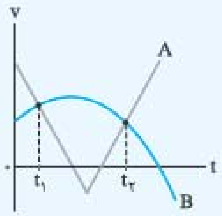
۴) −۰/۲ و در جهت مثبت

پاسخ گزینهٔ ۴ **گام اول:** شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار در بازهٔ ۵ s تا ۱۵ s برابر با شتاب متوسط در این بازه است:

$$a_{av} = \frac{6-8}{15-5} = \frac{-2}{10} = -0/2\,m/s^2$$

گام دوم: در بازهٔ ۵ s تا ۱۵ s نمودار سرعت ـ زمان بالای محور t قرار دارد، پس در همهٔ لحظه‌های این بازهٔ زمانی، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

تست **نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر بزرگی شتاب متوسط آن‌ها از لحظهٔ t_1 تا t_2 به ترتیب a_{av_A} و a_{av_B} باشد، کدام گزینه دربارهٔ این دو متحرک درست است؟**



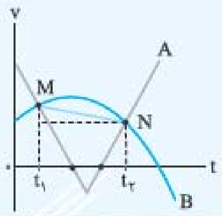
۱) $a_{av_A} < a_{av_B}$ و هر دو متحرک، یک بار تغییر جهت داده‌اند.

۲) $a_{av_A} = a_{av_B}$ و متحرک A دو بار تغییر جهت داده است.

۳) $a_{av_A} < a_{av_B}$ و متحرک A دو بار تغییر جهت داده است.

۴) $a_{av_A} = a_{av_B}$ و هر دو متحرک یک بار تغییر جهت داده‌اند.

پاسخ گزینهٔ ۲ **گام اول:** در لحظه‌های t_1 و t_2 دو نمودار در دو نقطهٔ M و N یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس شیب خط واصل بین این دو نقطه برابر شتاب متوسط هر دو متحرک در این بازهٔ زمانی است: $a_{av_A} = a_{av_B}$



گام دوم: نمودار متحرک A در دو نقطه محور t را قطع کرده، یعنی دو بار علامت سرعت این متحرک تغییر کرده و این متحرک دو بار تغییر جهت داده است، اما متحرک B فقط یک بار تغییر جهت داده است.

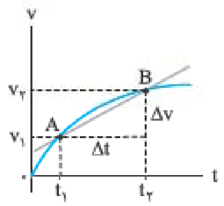
شتاب لحظه‌ای

به شتاب متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر، شتاب لحظه‌ای می‌گوییم. بردار شتاب را با $\vec{a}$ و مقدار آن را با a نشان می‌دهیم.

قبلاً هم گفتیم، بردار $\vec{a}$ همیشه هم‌علامت با بردار نیروی خالص وارد بر جسم است. در واقع جهت شتاب، هم‌سو با جهت نیروی خالص است.

می‌توانیم مفهوم شتاب لحظه‌ای را در نمودار سرعت ـ زمان هم نشان دهیم:

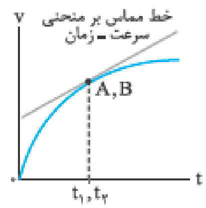
نمایش شتاب لحظه‌ای در نمودار سرعت ـ زمان



(الف)

دیدید که شیب خطی که دو نقطه از منحنی $v-t$ را به هم وصل می‌کند، برابر با شتاب متوسط در بازهٔ زمانی متناظر با آن دو نقطه است. مثلاً در شکل (الف)، شیب خط AB برابر با شتاب متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 است؛ به این صورت:

$$\text{AB شیب خط} = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

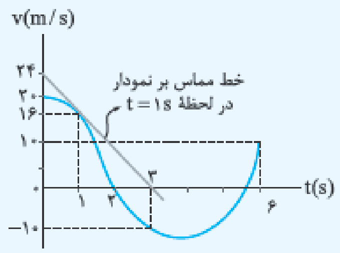


(ب)

حالا t_1 و t_2 را به هم نزدیک می‌کنیم تا Δt کوچک و نقطه‌های A و B به هم نزدیک شوند و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا t_1 و t_2 به هم برسند و Δt یک لحظه شود. همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، اگر AB را امتداد دهیم، خطی مماس بر منحنی سرعت ـ زمان خواهد شد. شیب این خط برابر با شتاب لحظه‌ای است.

شتاب لحظه‌ای = شیب خط مماس بر منحنی $v-t$

تست **متحرکی بر روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. نسبت شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت، به شتاب متحرک در لحظهٔ $t = 1s$ کدام است؟**



۱) $\frac{5}{12}$

۲) $-\frac{5}{12}$

۳) $\frac{5}{6}$

۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ گزینهٔ ۴ **گام اول:** باید شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار در لحظهٔ ۳ s و ۶ s را حساب کنیم.

$$a_{av_{3-6}} = \frac{v_6 - v_3}{6-3} = \frac{10-(-10)}{3} = \frac{20}{3}\,m/s^2$$

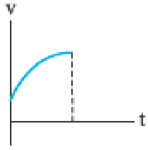
گام دوم: حالا باید شیب خط مماس در لحظهٔ $t = 1s$ را به دست بیاوریم:

$$a_1 = \frac{0-24}{3-0} = -8\,m/s^2$$

گام سوم: نسبت $a_{av_{3-6}}$ به a_1 را می‌خواهیم:

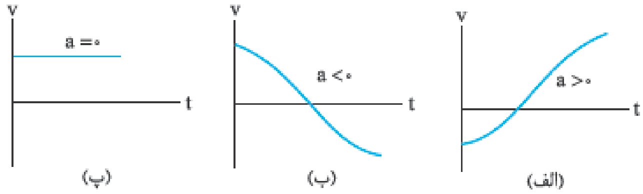
$$\frac{a_{av_{3-6}}}{a_1} = \frac{\frac{20}{3}}{-8} = -\frac{5}{6}$$

چند نکته



۱ واضح است که هر چه شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان بیشتر باشد، اندازهٔ شتاب بیشتر است. (مثلاً تو شکل روبه‌رو، هر چی زمان می‌گذره، شیب نمودار سرعت ـ زمان و اندازهٔ شتاب کم می‌شه.)

۲ با توجه به این‌که شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب لحظه‌ای است، علامت و جهت شتاب سه حالت می‌تواند داشته باشد:



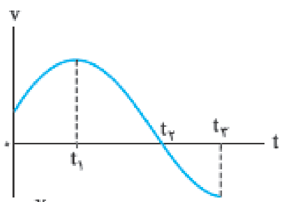
الف) اگر نمودار سرعت ـ زمان **صعودی** باشد، علامت و جهت شتاب، **مثبت** است. (شکل الف)

ب) اگر نمودار سرعت ـ زمان **نزولی** باشد، علامت و جهت شتاب، **منفی** است. (شکل ب)

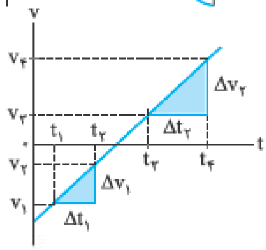
پ) اگر نمودار سرعت ـ زمان افقی باشد (شیب آن صفر باشد)، شتاب **صفر** است. (شکل پ)

منفی یا مثبت بودن شتاب بیانگر جهت نیروی خالص وارد بر جسم است.

حواستون باشه! *با علامت شتاب نمی‌تونیم جهت حرکت رو مشخص کنیم (جهت حرکت رو فقط با علامت سرعت یا جابه‌جایی تعیین می‌کنیم).*



۳ می‌توانیم تندشونده و کندشونده بودن حرکت را به کمک نمودار سرعت ـ زمان تشخیص بدهیم. هر وقت نمودار در حال نزدیک‌شدن به محور t باشد، اندازهٔ سرعت در حال نزدیک‌شدن به صفر بوده و حرکت کندشونده است و هر وقت نمودار در حال دورشدن از محور t باشد، اندازهٔ سرعت در حال زیادشدن است و نوع حرکت تندشونده است. مثلاً در شکل روبه‌رو در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ و $t_۲$ تا $t_۳$، نمودار در حال دورشدن از محور t است و نوع حرکت در این دو بازهٔ زمانی تندشونده است. ولی در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار در حال نزدیک‌شدن به محور t است و در نتیجه حرکتش در این بازهٔ زمانی کُندشونده است.

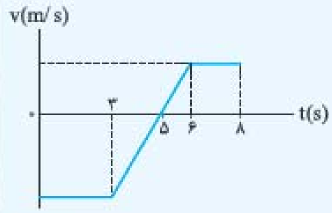


۴ مشابه آن‌چه در نمودار مکان ـ زمان داشتیم، اگر نمودار سرعت ـ زمان متحرکی یک خط راست باشد (مثل شکل روبه‌رو)، شیب نمودار چه در بازهٔ زمانی دلخواه Δt و چه در لحظهٔ دلخواه t اُم یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم در این صورت شتاب در هر لحظه برابر با شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه است:

$$t_۲ \text{ شیب نمودار در هر لحظه مانند } = \frac{\Delta v_۱}{\Delta t_۱} = \frac{\Delta v_۲}{\Delta t_۲} \Rightarrow a_{\text{لحظه‌ای}} = a_{av}$$

حالا یه تستی رو ببینید که چندتا نکتهٔ بالا رو با هم داشته باشه، یه کم سخته ولی باحاله!

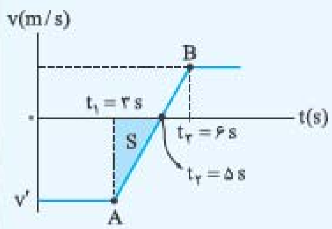
تست **شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۵/۵\,s$ برابر $۸\,m/s^۲$ باشد، در بازهٔ زمانی که حرکت کُندشونده است، بردار سرعت متوسط متحرک برحسب متر بر ثانیه کدام است؟**



۱) $۸\vec{i}$ ۲) $-۸\vec{i}$

۳) $۱۶\vec{i}$ ۴) $-۱۶\vec{i}$

پاسخ **گزینهٔ ۲** **گام اول:** با توجه به نمودار روبه‌رو از لحظهٔ $t_۱ = ۳\,s$ تا $t_۲ = ۶\,s$ نمودار یک خط راست است (خط AB)؛ پس شتاب متحرک در هر لحظهٔ دلخواه در بازهٔ زمانی ۳s تا ۶s برابر با شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه در این محدودهٔ زمانی است؛ پس می‌توانیم بگوییم شتاب متوسط در بازهٔ $t_۱ = ۳\,s$ تا $t_۲ = ۵\,s$ هم برابر شتاب در لحظهٔ $t = ۵/۵\,s$ است.



$$a_{۵/۵} = a_{av_{۳-۵}} = \frac{۰ - v'}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow ۸ = \frac{۰ - v'}{۵ - ۳} \Rightarrow v' = -۱۶\,m/s$$

گام دوم: در بازهٔ $t_۱ = ۳\,s$ تا $t_۲ = ۵\,s$ نمودار سرعت ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به محور t است؛ پس در این بازهٔ زمانی، حرکت کندشونده است. ما باید سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی را حساب کنیم.

گام سوم: اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۳s تا ۵s برابر مساحت مثلث S (در شکل بالا) است:

$$S = \frac{(t_۲ - t_۱) \times |v'|}{۲} = \frac{(۵-۳) \times ۱۶}{۲} = ۱۶ \xrightarrow{\text{چون نمودار در این مدت زیر محور t است، جابه‌جایی منفی است}} \Delta x_{۳-۵} = -۱۶\,m$$

گام چهارم: حالا می‌توانیم سرعت متوسط را هم حساب کنیم.

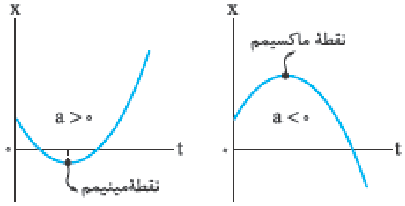
$$v_{av_{۳-۵}} = \frac{\Delta x_{۳-۵}}{\Delta t} = \frac{-۱۶}{۵-۳} = -۸\,m/s \Rightarrow \vec{v}_{av_{۳-۵}} = -۸\vec{i}$$

تشخیص تندشونده یا کندشونده بودن حرکت با علامت شتاب و سرعت

الف) اگر شتاب و سرعت **هم‌علامت** باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم در جهت حرکت جسم است؛ بنابراین نوع حرکت **تندشونده** است. این موضوع را می‌توانیم با زبان ریاضی هم بنویسیم:

$av > ۰ \Rightarrow$ حرکت تندشونده

پ) اگر علامت شتاب و سرعت **مخالف هم** باشند (یکی مثبت و دیگری منفی) یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم در خلاف جهت حرکت بوده و نوع حرکت **کندشونده** است. در این صورت داریم: $av < ۰ \Rightarrow$ حرکت کندشونده



شکل (ب)   شکل (الف)

◄ اگر نمودار مکان ـ زمان مانند شکل (الف)، نقطهٔ مینیمم (کمینه) داشته باشد، علامت شتاب حرکت مثبت است.

اگر نمودار مکان ـ زمان مانند شکل (ب)، نقطهٔ ماکسیمم (بیشینه) داشته باشد، علامت شتاب منفی است.

◄ در شکل (الف) قبل از نقطهٔ مینیمم، شیب نمودار منفی بوده و $v < ۰$ است، پس می‌توانیم بگوییم:

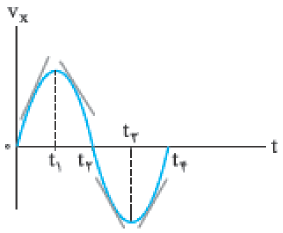
$$\begin{cases} a > ۰ \\ v < ۰ \end{cases} \Rightarrow av < ۰ \Rightarrow \text{حرکت‌کندشونده}$$

در شکل (ب) قبل از نقطهٔ مینیمم، شیب نمودار مثبت بوده و $v > ۰$ است؛ یعنی:

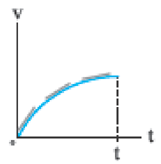
$$\begin{cases} a < ۰ \\ v > ۰ \end{cases} \Rightarrow av < ۰ \Rightarrow \text{حرکت‌کندشونده}$$

پس می‌توانیم بگوییم در نمودار مکان ـ زمان همواره **قبل از نقطهٔ کمینه یا بیشینه** حرکت **کندشونده** است و به همین شکل می‌توان نشان داد که بعد از نقطهٔ کمینه یا بیشینه، حرکت **تندشونده** است.

۱۵۵- گزینهٔ ۱ باید به دنبال ناحیه‌ای بگردیم که شیب نمودار v ـ t مثبت باشد. این ناحیه با توجه به شکل روبه‌رو از صفر تا $t_۱$ است. البته از $t_۳$ تا $t_۴$ هم شیب نمودار v ـ t مثبت است اما در گزینه‌ها این بازه را نمی‌بینیم.



۱۵۶- گزینهٔ ۴ اگر به نمودار روبه‌رو دقت کنید، می‌بینید که در هر لحظه اندازهٔ سرعت در حال افزایش است و در نتیجه حرکت تندشونده است. از طرفی چون نمودار سرعت ـ زمان یک منحنی است و شیب نمودار در هر لحظه تغییر می‌کند، شتاب متغیر است.



۱۵۷- گزینهٔ ۲ مورد «الف» درست است؛ چون در این بازهٔ زمانی سرعت ثابت است، شتاب برابر صفر است.

مورد «ب» نادرست است؛ از $t_۱$ تا $t_۲$ که سرعت صفر می‌شود، حرکت کندشونده است و از $t_۲$ تا $t_۳$ که اندازهٔ سرعت افزایش می‌یابد، حرکت تندشونده است.

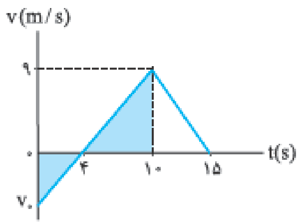
حواستان باشد که برای تعیین تندشونده یا کندشونده بودن حرکت، اندازهٔ سرعت برای ما مهم است نه علامت آن.

مورد «پ» درست است؛ شتاب متوسط برابر $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. Δv یعنی تغییرات سرعت در بازهٔ صفر تا $t_۴$ منفی است؛ بنابراین شتاب متوسط منفی است.

مورد «ت» نادرست است. $S_۲ < S_۱$ است؛ بنابراین، جابه‌جایی که برابر $\Delta x = S_۱ - S_۲$ است، مثبت است. با توجه به مثبت‌بودن جابه‌جایی، سرعت متوسط یعنی $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ مثبت است.

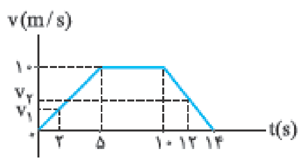
۱۵۸- گزینهٔ ۱ **گام اول:** به کمک تاکتیک تشابه، مقدار سرعت اولیه را به دست می‌آوریم. دو مثلث رنگی با هم متشابه‌اند؛ پس داریم:

$$\frac{|v_۰|}{۹} = \frac{۴}{۱۰-۴} \Rightarrow \frac{|v_۰|}{۹} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |v_۰| = ۶\ m/s \Rightarrow v_۰ = -۶\ m/s$$



گام دوم: شتاب متوسط را با استفاده از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌کنیم: $a_{av} = \frac{۰-(-۶)}{۱۵-۰} = \frac{۶}{۱۵} = ۰/۴\ m/s^۲$

۱۵۹- گزینهٔ ۱ برای حل این تست می‌توانیم معادلهٔ خط‌های رنگی را در شکل روبه‌رو به دست آوریم و سرعت در $t = ۲\,s$ و $t = ۱۲\,s$ را محاسبه کنیم ولی چون خیلی طولانی است، به سراغ تاکتیک تشابه می‌رویم. شما هم در زمان آزمون از این تاکتیک استفاده کنید.



در شکل روبه‌رو، دو مثلثی که در سمت چپ نمودار ایجاد شده‌اند، با هم متشابه‌اند: $\frac{v_۱}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow v_۱ = ۴\ m/s$

مثلث‌هایی که در سمت راست هم تشکیل‌شده‌اند، با هم متشابه‌اند:

$$\frac{v_۲}{۱۰} = \frac{(۱۴-۱۲)}{(۱۴-۱۰)} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow v_۲ = ۵\ m/s$$

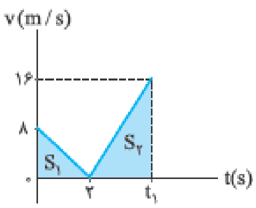
حالا که $v_۱$ و $v_۲$ را داریم، می‌توانیم شتاب متوسط را حساب کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۵-۴}{۱۲-۲} = \frac{۱}{۱۰}\ m/s^۲$$

۱۶۰- گزینهٔ ۲ چون نمودار سرعت ـ زمان متحرک B در بازهٔ $(\circ, t_۲)$ خط راست است، شتاب متحرک B در بازهٔ زمانی $(\circ, t_۲)$ ثابت است. با توجه به این موضوع شتاب متوسط متحرک B در بازهٔ $(t_۱, t_۲)$ همان شتاب متوسط در بازهٔ $(\circ, t_۲)$ است و داریم:

$$۲=\frac{|a_{av,A}|}{|a_{av,B}|}=\frac{\left|\frac{\Delta v_A}{\Delta t_A}\right|}{\left|\frac{\Delta v_B}{\Delta t_B}\right|}=\frac{\left|\frac{\circ-۳v}{t_۱-\circ}\right|}{\left|\frac{\circ-(-۲v)}{t_۲-\circ}\right|}\Rightarrow ۲=\frac{\frac{۳v}{t_۱}}{\frac{۲v}{t_۲}}\Rightarrow \frac{۴}{۳}=\frac{t_۲}{t_۱}$$

۱۶۱- گزینهٔ ۲ **گام اول:** با توجه به نمودار روبه‌رو تغییرات سرعت برابر با $\Delta v=۱۶-۸=۸\,m/s$ است. از طرفی تغییرات زمان برابر $\Delta t=t_۱-\circ=t_۱$ است؛ پس:



$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{۸}{t_۱}\Rightarrow t_۱=\frac{۸}{۲}=۴\,s$$

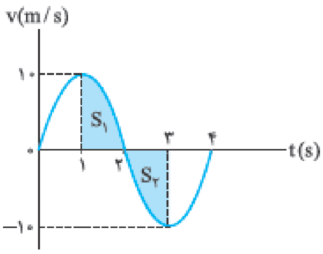
گام دوم: حالا جابه‌جایی را به دست می‌آوریم. همان‌طور که می‌دانید، جابه‌جایی مساحت زیر نمودار v ـ t می‌شود؛ پس:

$$\Delta x=S_۱+S_۲=\frac{۸\times ۲}{۲}+\frac{۱۶\times(t_۱-۲)}{۲}\xrightarrow{t_۱=۴\,s}\Delta x=۸+\frac{۱۶\times(۴-۲)}{۲}=۸+۱۶=۲۴\,m$$

گام سوم: به کمک $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ پروندهٔ این تست را می‌بندیم:

$$v_{av}=\frac{۲۴}{۴-\circ}=\frac{۲۴}{۴}=۶\,m/s$$

۱۶۲- گزینهٔ ۲ شتاب متوسط برابر با تغییرات سرعت تقسیم بر زمان لازم برای این تغییرات است:

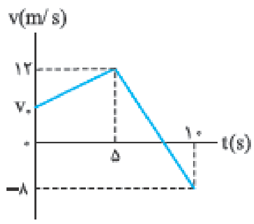


$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱۰-۱۰}{۳-۱}=\frac{-۲۰}{۲}=-۱۰\,m/s^۲$$

سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی است. در نمودار سرعت ـ زمان جابه‌جایی برابر مساحت زیر نمودار است که در آن باید علامت مساحت قسمت‌هایی که زیر محور t هستند را منفی در نظر بگیریم:

$$\Delta x=S_۱-S_۲=\circ\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\circ}{۳-۱}=\circ$$

۱۶۳- گزینهٔ ۱ **گام اول:** در بازهٔ $(۵s, ۱۰s)$ نمودار سرعت ـ زمان خط راست است؛ پس شتاب در این بازه ثابت است و شتاب هر لحظه (مثل $t=۸s$) برابر با شتاب متوسط $(a_{av,۲})$ در این بازه است. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$a_۸=a_{av,۲}\Rightarrow a_۸=\frac{\Delta v_۲}{\Delta t_۲}=\frac{-۸-۱۲}{۱۰-۵}=\frac{-۲۰}{۵}=-۴\,m/s^۲$$

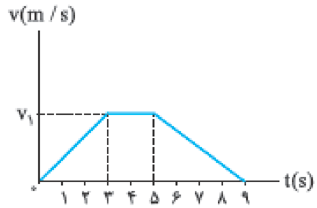
گام دوم: اندازهٔ شتاب در ۲ ثانیهٔ دوم یعنی در بازهٔ $(۲s, ۴s)$ نصف $|a_۸|$ است؛ از طرفی چون شیب نمودار $v-t$ در بازهٔ $(\circ, ۵s)$ ثابت و مثبت است، شتاب متوسط در این بازه ثابت و مثبت است و داریم:

$$a_{av,۱}=\frac{۱}{۲}|a_۸|\Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱}{۲}(۴)\Rightarrow \frac{۱۲-v_\circ}{۵-\circ}=۲\Rightarrow ۱۲-v_\circ=۱۰\Rightarrow v_\circ=۲\,m/s$$

گام سوم: متحرک روی محور y حرکت می‌کند و سرعت اولیه‌اش مثبت است؛ پس:

$$\vec{v}_\circ=(۲\,m/s)\vec{j}$$

۱۶۴- گزینهٔ ۱ حرکت متحرک از $t=۵\,s$ تا $t=۹\,s$ که مطابق شکل روبه‌رو سرعت از $v_۱$ تا صفر کاهش پیدا کرده است، کندشونده است.



برای این‌که بتوانیم شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی را به دست آوریم، اول باید مقدار $v_۱$ را محاسبه کنیم. این کار را به کمک مقدار مسافت پیموده‌شده انجام می‌دهیم. از آن‌جایی که متحرک تغییر جهت نداده است، جابه‌جایی و مسافت با هم برابر است. از طرفی می‌دانیم مساحت زیر نمودار v ـ t برابر جابه‌جایی است. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، نمودار v ـ t یک ذوزنقه با ارتفاع $v_۱$ و قاعده‌های ۹ و ۲ است که مساحت آن به صورت زیر به دست می‌آید:

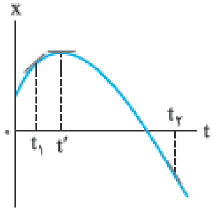
$$\Delta x=S=\Rightarrow ۱۶۵=\frac{(۹+۲)}{۲}\times v_۱\Rightarrow v_۱=\frac{۱۶۵\times ۲}{۱۱}=\frac{۳۳۰}{۱۱}=۳۰\,m/s$$

حالا که $v_۱$ را به دست آوردیم به سراغ قدرمطلق شتاب متوسط حرکت کندشونده می‌رویم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{\circ-۳۰}{۹-۵}=\frac{-۳۰}{۴}=-۷/۵\,m/s^۲\Rightarrow |a_{av}|=۷/۵\,m/s^۲$$

۱۶۵- گزینهٔ ۴ در نمودار x ـ t سرعت لحظه‌ای برابر با شیب خط مماس بر نمودار است. در $t=\circ$ و $t=۵\,s$ سرعت صفر است، چون در این دو لحظه خط مماس بر نمودار افقی است؛ پس:

$$\begin{cases}v_{(\circ)}=\circ\\ v_{(۵)}=\circ\end{cases}\Rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{(۵)}-v_{(\circ)}}{۵}=\frac{\circ}{۵}=\circ$$



۱۶۶- **گزینهٔ ۱** شیب نمودار $x-t$ سرعت را نشان می‌دهد. با توجه به شکل روبه‌رو علامت سرعت در هر یک از زمان‌ها t_1، t' و t_2 را تعیین می‌کنیم:

v_1 : مثبت v' : صفر v_2 : منفی

شتاب متوسط در بازهٔ (t_1, t_2) برابر با $a_{av} = \dfrac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ است. از آن‌جا که v_2 منفی و v_1 مثبت است، a_{av} منفی می‌شود و جهت شتاب متوسط در این بازه **منفی** است.

شتاب لحظه‌ای در تمام لحظه‌هایی که گودی (تقعر) نمودار $x-t$ به سمت پایین است منفی است. پس، شتاب در لحظه‌های t' و t_2 منفی است.

۱۶۷- **گزینهٔ ۱** **گام اول:** در نمودار مکان ـ زمان برای تشخیص سرعت اولیه باید شیب اولیهٔ نمودار را نگاه کنیم:

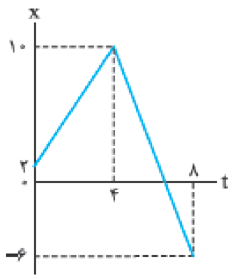
شیب اولیهٔ نمودار A منفی است. ← سرعت اولیهٔ متحرک A در جهت منفی محور x است.

شیب اولیهٔ نمودار B صفر است. ← سرعت اولیهٔ متحرک B صفر است (از حال سکون شروع به حرکت کرده است).

شیب اولیهٔ نمودار C مثبت است. ← سرعت اولیهٔ متحرک C مثبت است.

گام دوم: اگر نمودار مکان ـ زمان نقطهٔ مینیمم داشته باشد (این شکلی: ◡)، شتاب مثبت و اگر نقطهٔ ماکسیمم داشته باشد (این شکلی: ◠)، شتاب منفی است. پس علامت شتاب متحرک A مثبت و شتاب متحرک B و C منفی است.

گام سوم: در نقطهٔ اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم) متحرک تغییر جهت می‌دهد. پس متحرک‌های A و C در یک لحظهٔ معین تغییر جهت می‌دهند.



۱۶۸- **گزینهٔ ۱** **گام اول:** ۳ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $t = ۳s$ تا $t = ۶s$. برای این‌که در این بازه شتاب متوسط را تعیین کنیم باید سرعت لحظه‌ای در $t = ۳s$ و $t = ۶s$ را تعیین کنیم.

چون در بازهٔ $(۰, ۴s)$ و $(۴s, ۸s)$ نمودار $x-t$ خط راست است، در این بازه‌ها سرعت ثابت است و داریم:

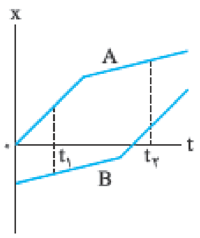
$$v_۳ = v_{av,1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{۱۰-۲}{۴-۰} = \frac{۸}{۴} = ۲\ m/s$$

$$v_۶ = v_{av,2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-۶-۱۰}{۸-۴} = \frac{-۱۶}{۴} = -۴\ m/s$$

گام دوم: شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۶ - v_۳}{\Delta t} = \frac{-۴-۲}{۶-۳} = \frac{-۶}{۳} = -۲\ m/s^2$$

بنابراین، بردار شتاب به صورت $\vec{a}_{av} = (-۲\ m/s^2)\vec{i}$ خواهد بود.



۱۶۹- **گزینهٔ ۳** بررسی شتاب متوسط متحرک A: شیب نمودار $x-t$ بیانگر سرعت است؛ بنابراین سرعت متحرک A در t_1 بیشتر از سرعتش در t_2 است و داریم:

$$v_{1A} > v_{2A} \Rightarrow ۰ > v_{2A} - v_{1A} \xrightarrow{\Delta t > ۰} ۰ > \frac{v_{2A} - v_{1A}}{\Delta t} \Rightarrow ۰ > \frac{\Delta v_A}{\Delta t} \Rightarrow ۰ > a_{av,A}$$

بررسی شتاب متوسط متحرک B: برای متحرک B سرعت در t_2 بیشتر از سرعت در t_1 است و داریم:

$$v_{2B} > v_{1B} \Rightarrow v_{2B} - v_{1B} > ۰ \xrightarrow{\Delta t > ۰} \frac{v_{2B} - v_{1B}}{\Delta t} > ۰ \Rightarrow \frac{\Delta v_B}{\Delta t} > ۰ \Rightarrow a_{av,B} > ۰$$

۱۷۰- **گزینهٔ ۲** **گام اول:** با توجه به شکل روبه‌رو سرعت متحرک در $t = ۳s$ صفر است و سرعتش در $t = ۶s$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_۶ = \text{شیب مماس بر نمودار} = \frac{۰-(-۱۸)}{۹-۶} = \frac{۱۸}{۳} = ۶\ m/s$$

گام دوم: شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۶ - v_۳}{\Delta t} = \frac{۶-۰}{۹-۶} = \frac{۶}{۳} = ۲\ m/s^2$$

درس ۱۰
معادله و نمودار شتاب ـ زمان در حرکت راست خط

شتاب متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند را می‌توانیم با معادلهٔ شتاب ـ زمان و نمودار شتاب ـ زمان نشان بدهیم. در سطح کتاب درسی از معادلهٔ شتاب ـ زمان، اندازهٔ شتاب متحرک در یک لحظهٔ دلخواه را می‌توانیم حساب کنیم.

تست **معادلهٔ شتاب ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند در SI به صورت $a = ۲t - ۴$ است. در چه لحظه‌ای جهت نیروی خالص وارد بر متحرک تغییر می‌کند؟**

۱) ۵   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲   ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ ۳** گفتیم علامت شتاب و نیرو هم‌زمان مثل هم تغییر می‌کند، پس این‌جا باید لحظهٔ تغییر علامت شتاب را پیدا کنیم. برای این کار باید معادلهٔ $a = ۲t - ۴$ را تعیین علامت کنیم:

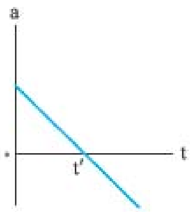
$a = ۰ \Rightarrow ۲t - ۴ = ۰ \Rightarrow t = ۲\ s$

لحظهٔ تغییر علامت شتاب

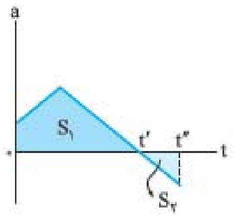
t (s)	۰		۲	
$a\ (m/s^2)$	-۴	(-)	۰	(+)

با توجه به جدول تعیین علامت در لحظهٔ $t = ۲\ s$، بردار شتاب و نیروی خالص، از منفی به مثبت تغییر جهت می‌دهند.

چند نکته دربارهٔ نمودار شتاب ـ زمان:



۱) لحظه‌ای که نمودار شتاب ـ زمان محور t را قطع می‌کند، شتاب و نیروی خالص برای لحظه‌ای صفر می‌شود و علامت (جهت) شتاب و نیروی خالص تغییر می‌کند. مثلاً در شکل روبه‌رو علامت و جهت شتاب (و نیروی خالص) در لحظهٔ t' از مثبت به منفی تغییر می‌کند.

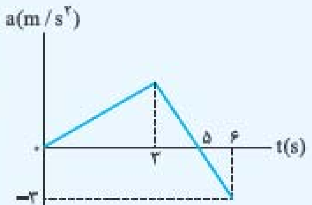


۲) مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور t برابر اندازهٔ تغییرات سرعت (Δv) است. (تأکید می‌کنیم تغییرات سرعت و نه خود سرعت!) مثلاً در شکل روبه‌رو مساحت S_1 برابر تغییرات سرعت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t' است.

می‌دانید که با داشتن تغییرات سرعت می‌توانیم شتاب متوسط را هم در بازهٔ موردنظر حساب کنیم.

۳) اگر نمودار شتاب ـ زمان بالای محور t باشد، علامت تغییرات سرعت (Δv) مثبت و اگر نمودار شتاب زمان پایین محور t باشد، علامت تغییرات سرعت منفی است. مثلاً در شکل روبه‌رو تغییرات سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا t' مثبت و در بازهٔ t' تا t'' منفی است: $\Delta v_1 = S_1 \,,\, \Delta v_2 = -S_2$

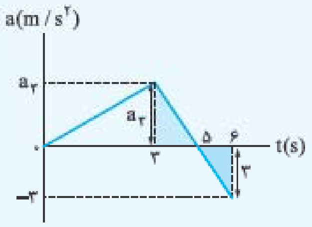
تست **نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در مبدأ زمان سرعت متحرک $-۴\,m/s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در بازهٔ $(۰,۶\,s)$ و لحظهٔ تغییر جهت متحرک در این بازهٔ زمانی برحسب یکاهای SI به ترتیب از راست به چپ کدام است؟**



۱) ۲/۲۵، ۲ ۲) ۲/۲۵، ۴
۳) ۱/۲۵، ۲ ۴) ۱/۲۵، ۴

پاسخ **گزینهٔ ۱** **گام اول:** در شکل (الف) به لطف تشابه دو مثلث رنگی، a_2 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۵-۳}{۶-۵} = \frac{a_2}{۳} \Rightarrow a_2 = ۶\,m/s^2$$



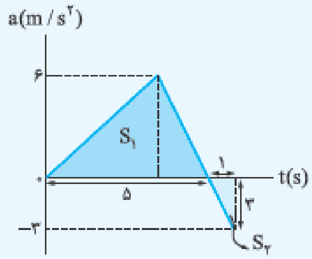
(الف)

گام دوم: برای محاسبهٔ شتاب متوسط باید تغییرات سرعت را داشته باشیم؛ پس می‌رویم سراغ محاسبهٔ مساحت‌های S_1 و S_2 در شکل (ب):

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{۵\times۶}{۲} = ۱۵ \\ S_2 = \dfrac{۱\times۳}{۲} = ۱/۵ \end{cases} \Rightarrow \Delta v = S_1 - S_2 = ۱۵ - ۱/۵ = ۱۳/۵\,m/s$$

به کمک رابطهٔ $a_{av} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط در بازهٔ $(۰,۶\,s)$ را به دست می‌آوریم:

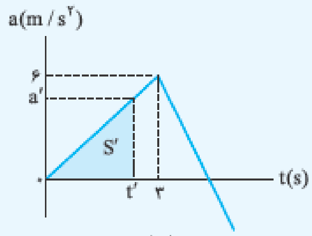
$$a_{av} = \frac{۱۳/۵}{۶-۰} = ۲/۲۵\,m/s^2$$



(ب)

گام سوم: رسیدیم به قسمت سخت مسئله، می‌خواهیم لحظهٔ تغییر جهت متحرک را پیدا کنیم. برای حل این قسمت باید بدانیم که در لحظه‌ای که متحرک سرعتش صفر شده و تغییر علامت می‌دهد، تغییر جهت هم می‌دهد؛ بنابراین باید این لحظه را پیدا کنیم. سرعت اولیهٔ متحرک $-۴\,m/s$ است؛ پس برای این‌که سرعتش صفر شود باید تغییرات سرعتش $+۴\,m/s$ باشد:

$$\Delta v = v' - v_0 \xrightarrow[v'=۰]{v_0=-۴\,m/s} \Delta v = ۰-(-۴) = ۴\,m/s$$



(پ)

یعنی مساحت S' در شکل (پ) باید برابر ۴ باشد: $S' = ۴ \Rightarrow \dfrac{a't'}{۲} = ۴ \Rightarrow a't' = ۸$ **رابطهٔ (۱)**

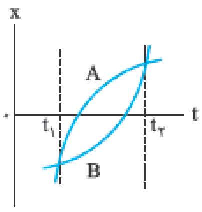
با کمی دقت در شکل (پ) می‌بینیم که بین a' و t' نسبت تالسی ۶ به ۳ برقرار است: $\dfrac{a'}{t'} = \dfrac{۶}{۳} \Rightarrow a' = ۲t'$ **رابطهٔ (۲)**

حالا a' **رابطهٔ (۲)** را در **رابطهٔ (۱)** قرار می‌دهیم و جواب تست را کشف می‌کنیم: $a't' = ۸ \xrightarrow{a'=۲t'} ۲t'^2 = ۸ \Rightarrow t'^2 = ۴ \Rightarrow t' = ۲\,s$

۱۷۱- گزینهٔ ۲ هر دو متحرک مطابق با شکل روبه‌رو به یک اندازه و به مقدار Δx جابه‌جا شده‌اند و چون دو متحرک تغییر جهت نداده‌اند، مسافت طی‌شده برای آن‌ها مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است.

حواستون باشد که جهت حرکت دو متحرک در بازهٔ $(t_۱ , t_۲)$ همواره در جهت مثبت محور x بوده است.

$$l_A = l_B$$



۱۷۲- گزینهٔ ۱ **روش اول:** در قدم اول معادلهٔ خطی که به طور رنگی در شکل مقابل مشخص کرده‌ایم را به دست می‌آوریم:

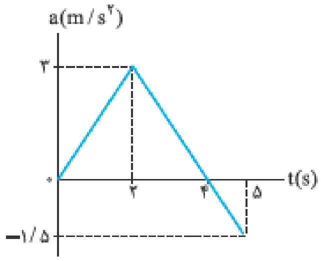
شیب نمودار: $\frac{-۱/۵-۳}{۵-۲} = \frac{-۴/۵}{۳} = -۱/۵$

معادلهٔ خط: $a = -۱/۵t + b \xrightarrow{\text{نقطهٔ } t=۲\,s \text{ و } a=۳\,m/s^۲ \text{ در معادله صدق می‌کند}} ۳ = -۱/۵(۲) + b$

$\Rightarrow b = ۶ \Rightarrow a = -۱/۵t + ۶$

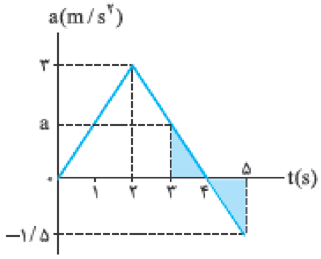
حالا مقدار شتاب را در نقطهٔ $t = ۳\,s$ به دست می‌آوریم:

$a = -۱/۵t + ۶ \xrightarrow{t=۳\,s} a = -۱/۵(۳) + ۶ = -۴/۵ + ۶ = ۱/۵\,m/s^۲$



روش دوم: استفاده از تاکتیک تشابه: دو مثلث رنگی در نمودار روبه‌رو متشابه‌اند، پس:

$$\frac{a}{۱/۵} = \frac{۴-۳}{۵-۴} \Rightarrow \frac{a}{۱/۵} = \frac{۱}{۱} \Rightarrow a = ۱/۵\,m/s^۲$$



۱۷۳- گزینهٔ ۳ شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ حساب می‌شود و مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر Δv است. پس اول باید مساحت زیر نمودار و بعد شتاب متوسط را حساب کنیم:

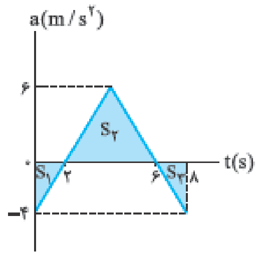
$$\Delta v = \overset{\text{مثلث}}{\overset{\uparrow}{S_{AB}}} + \overset{\text{مستطیل}}{\overset{\uparrow}{S_{BC}}} + \overset{\text{ذوزنقه}}{\overset{\uparrow}{S_{CD}}} = \frac{۱}{۲}\times۴\times۸ + ۴\times(۲۰-۸) + \frac{۴+۸}{۲}\times(۲۸-۲۰) = ۱۶+۴۸+۴۸ = ۱۱۲\,m/s$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۱۲}{۲۸} = ۴\,m/s^۲$$

۱۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا تغییرات سرعت را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل مقابل تغییرات سرعت برابر با $-S_۱ + S_۲ - S_۳$ است.

$$\Delta v = -(\frac{۲\times۴}{۲}) + (\frac{(۶-۲)\times۶}{۲}) - (\frac{(۸-۶)\times۴}{۲}) = -۴+۱۲-۴ = ۴\,m/s$$

حالا با استفاده از $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط حرکت را به دست می‌آوریم: $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴}{۸-۰} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}\,m/s^۲$

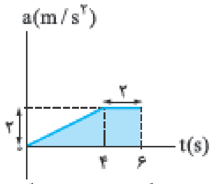


۱۷۵- گزینهٔ ۳ سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر تغییرات سرعت (یعنی Δv) است؛ پس مساحت زیر نمودار یعنی ذوزنقهٔ رنگی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v = S = \frac{(۲+۶)\times۲}{۲} = ۸\,m/s$$

چون متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، سرعت اولیه برابر صفر است:

$$\Delta v = v - v_۰ \Rightarrow ۸ = v - ۰ \Rightarrow v = ۸\,m/s$$



۱۷۶- گزینهٔ ۴ بیایید دو حالت را بررسی کنیم. **حالت اول:** سرعت اولیه مثبت است: با توجه به این‌که هم سرعت و هم شتاب مثبت است، $av > ۰$ است. همان‌طور که می‌دانید در این حالت حرکت تندشونده است.

حالت دوم: سرعت اولیه منفی است: در این حالت $av < ۰$ می‌شود و در نتیجه حرکت کندشونده می‌شود.

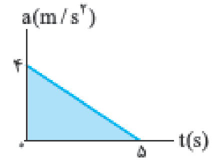
با توجه به این دو حالت می‌فهمیم که نوع حرکت متحرک به سرعت اولیه بستگی دارد.

۱۷۷- گزینهٔ ۴ **گام اول:** مساحت زیر نمودار a ـ t برابر تغییرات سرعت است. با توجه به این موضوع مقدار تغییرات سرعت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v = \frac{۴\times۵}{۲} = ۱۰\,m/s$$

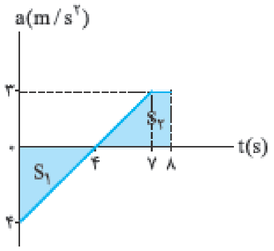
گام دوم: سرعت نهایی را تعیین می‌کنیم:

$$v_۲ = v_۱ + \Delta v = -۶ + ۱۰ = ۴\,m/s$$



می‌بینید که سرعت از $-۶\,m/s$ به $۴\,m/s$ رسیده است. یعنی ابتدا اندازهٔ سرعت متحرک کاهش پیدا کرده و به صفر می‌رسد (کندشونده) و بعد از تغییر جهت از صفر تا $۴\,m/s$ افزایش پیدا کرده است (تندشونده)؛ بنابراین حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است.

۱۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا با توجه به نمودار، تغییرات سرعت را به دست می‌آوریم:



$$\Delta v = S_۲ - S_۱ = \frac{۳\times(۱+۴)}{۲} - \frac{۴\times۴}{۲} = ۷/۵ - ۸ = -۰/۵\ m/s$$

حالا با داشتن سرعت اولیه و تغییرات سرعت، به راحتی می‌توانیم سرعت در $t = ۸\ s$ را به دست آوریم:

$$\Delta v = v - v_۰ \Rightarrow -۰/۵ = v-(-۵) \Rightarrow -۰/۵ = v+۵ \Rightarrow v = -۵-۰/۵ = -۵/۵\ m/s$$

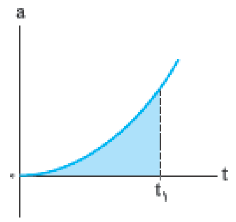
تا این‌جای کار سرعت در $t = ۸\ s$ را به دست آوردیم. حالا نوبت مشخص‌کردن نوع حرکت در ثانیهٔ هشتم است. در ثانیهٔ هشتم علامت سرعت منفی و علامت شتاب مثبت است؛ بنابراین $av < ۰$ و در این بازهٔ زمانی حرکت متحرک کندشونده است.

۱۷۹- گزینهٔ ۴ شتاب در لحظاتی تغییر جهت می‌دهد که مقدار آن صفر شود و تغییر علامت دهد. بنابراین ریشه‌های معادلهٔ شتاب ـ زمان را محاسبه می‌کنیم:

$$a = ۳t^۲ + ۲t = ۰ \Rightarrow t(۳t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t = -\frac{۲}{۳}s\ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

لحظهٔ $t = ۰$ که لحظهٔ شروع حرکت است و ما کاری با آن نداریم و لحظهٔ $t=-\frac{۲}{۳}s$ که به دلیل منفی‌شدن زمان قابل‌قبول نیست؛ بنابراین شتاب همواره مثبت بوده و تغییر جهت نمی‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:



(۱) سرعت در ابتدا منفی و شتاب مثبت است؛ بنابراین در ابتدا حرکت کندشونده خواهد بود ($av < ۰$). با توجه به کندشونده بودن حرکت، در ابتدا اندازهٔ سرعت کاهش می‌یابد و سرعت صفر می‌شود. بعد از این لحظه سرعت و شتاب هم‌جهت می‌شوند و حرکت تندشونده می‌شود. مثلاً در شکل روبه‌رو، اگر در لحظهٔ $t_۱$ سطح زیر نمودار که بیانگر تغییرات سرعت است، برابر $\Delta v = ۱۰\ m/s$ شود، سرعت لحظه‌ای در این نقطه صفر می‌شود و بعد از آن سرعت و شتاب هر دو مثبت می‌شوند و حرکت تندشونده می‌شود.

(۳) شتاب اولیهٔ متحرک را با قراردادن t مساوی صفر باید به دست آوریم: $a = ۳t^۲+۲t \xrightarrow{t=۰} a = ۳(۰)^۲+۲(۰) = ۰$

(۴) با توجه به توضیحات (۱) می‌فهمیم که سرعت متحرک ابتدا منفی و سپس مثبت است. در نتیجه ابتدا متحرک در خلاف جهت محور xها و سپس در جهت آن حرکت می‌کند.

۱۸۰- گزینهٔ ۴ **گام اول:** معادله‌های سرعت و شتاب را جداگانه تعیین علامت می‌کنیم:

$$v = t^۲ - ۶t + ۵ = ۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱s\\ t=۵s\end{cases}$$

$$a = ۲t-۶ = ۰ \Rightarrow ۲t=۶ \Rightarrow t=۳s$$

بنابراین سرعت در $t = ۳\ s$ تغییر جهت نمی‌دهد (رد ۱).

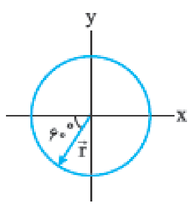
همین‌طور که در جدول می‌بینید، علامت v در $t = ۴s$ منفی است؛ پس در این لحظه متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور x است (رد ۳).

t (s)		۱	۳	۵	
علامت v	+		−		+
علامت a	−				+

گام دوم: علامت av بیانگر تندشونده یا کندشونده بودن حرکت است. با توجه به جدول بالا، در ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی (۱s , ۲s) علامت v و a منفی است؛ بنابراین $av > ۰$ و حرکت تندشونده است (اندازهٔ سرعت افزایش می‌یابد) (رد ۲).

در ثانیهٔ ششم حرکت (بازهٔ زمانی (۵s , ۶s)) علامت v و a مثبت است؛ بنابراین $av > ۰$ و حرکت تندشونده است؛ بنابراین (۴) درست است.

۱۸۱- گزینهٔ ۳ **گام اول:** اندازهٔ تصویر $\vec{r}$ را روی دو محور به دست آوریم:



$$r_x = r\cos ۶۰^\circ = ۱۰\times\frac{۱}{۲} = ۵\ cm = ۰/۰۵\ m$$

$$r_y = r\sin ۶۰^\circ = ۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۵\sqrt{۳}\ cm = ۰/۰۵\sqrt{۳}\ m$$

گام دوم: با توجه به جهت بردار $\vec r$، می‌فهمیم ضریب $\vec i$ و $\vec j$ باید منفی باشد؛ پس: $\vec r = -۰/۰۵\vec i - ۰/۰۵\sqrt{۳}\vec j$

۱۸۲- گزینهٔ ۴ **گام اول:** بردار مکان حالت نهایی برابر با بردار مکان اولیه به اضافهٔ بردار جابه‌جایی اول به اضافهٔ بردار جابه‌جایی دوم است. پس ابتدا به سراغ تعیین بردارهای جابه‌جایی می‌رویم. متحرک ابتدا در **خلاف** جهت محور x به اندازهٔ ۳ m جابه‌جا شده است؛ پس: $\Delta\vec r_۱ = (-۳m\vec i)$

سپس در جهت محور y به اندازهٔ ۴ m جابه‌جا شده است؛ پس: $\Delta\vec r_۲ = (۴m\vec j)$

با توجه به این دو جابه‌جایی، مکان نهایی متحرک برابر است با: $\vec r_۲ = \vec r_۱ + \Delta\vec r_۱+\Delta\vec r_۲ = \vec i + ۴\vec j - ۳\vec i + ۴\vec j = (-۲m\vec i + ۸m\vec j)$

گام دوم: متحرک ۳ m موازی محور x و ۴ m موازی محور y حرکت کرده است. پس در کل مسافت ۷ m را پیموده است: $l = ۴+۳ = ۷\ m$

۱۸۳- گزینهٔ ۳ **گام اول:** جابه‌جایی کل برابر جمع جابه‌جایی‌ها می‌شود؛ پس: $\vec d = \vec d_۱+\vec d_۲+\vec d_۳ = ۴\vec i+۳\vec j+۳\vec i+۲\vec j+۱\vec i+۱\vec j = ۸\vec i+۶\vec j$

گام دوم: اندازهٔ جابه‌جایی برابر است با: $d=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰\ m$

۱۸۴- گزینهٔ ۳ بردار سرعت متوسط را از رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\vec{d}_۲-\vec{d}_۱}{\Delta t}=\frac{(-۹\vec{j})-(۱۲\vec{i})}{۶-۲}=-۳\vec{i}-۲/۲۵\vec{j}$$

$$|\vec{v}_{av}|=\sqrt{(-۳)^۲+(-۲/۲۵)^۲}=۳/۷۵\,m/s$$

۱۸۵- گزینهٔ ۴ **گام اول:** به کمک رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$، بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ را پیدا می‌کنیم:

$$-۲۴\vec{i}+۱۸\vec{j}=\frac{\vec{d}}{۱۰-۴}\Rightarrow \vec{d}=۶\times(-۲۴\vec{i}+۱۸\vec{j})=-۱۴۴\vec{i}+۱۰۸\vec{j}$$

گام دوم: بردار مکان اولیه را داریم، بردار مکان نهایی را می‌خواهیم:

$$\vec{d}=\vec{d}_۲-\vec{d}_۱\Rightarrow -۱۴۴\vec{i}+۱۰۸\vec{j}=\vec{d}_۲-(۶\vec{i})\Rightarrow \vec{d}_۲=(-۱۴۴+۶)\vec{i}+۱۰۸\vec{j}\Rightarrow \vec{d}_۲=-۱۳۸\vec{i}+۱۰۸\vec{j}$$

۱۸۶- گزینهٔ ۴ **روش اول:** سرعت متوسط در کل حرکت از رابطهٔ $\vec{v}_{av_{۰۵}}=\frac{\vec{d}_{۰۵}}{\Delta t_{۰۵}}$ به دست می‌آید. پس اول باید $\vec{d}_{۰۵}$ را حساب کنیم:

$$\vec{d}_{۰۵}=\underbrace{\vec{d}_۵}_{\text{بردار مکان در لحظهٔ }t=5s}-\underbrace{\vec{d}_۰}_{\text{بردار مکان در لحظهٔ }t=0}$$

اگر در طرف دوم تساوی بالا، $\vec{d}_۳-\vec{d}_۳$ را اضافه کنیم، اتفاق جالبی می‌افتد:

$$\vec{d}_{۰۵}=\vec{d}_۵-\vec{d}_۳+\vec{d}_۳-\vec{d}_۰=(\vec{d}_۵-\vec{d}_۳)+(\vec{d}_۳-\vec{d}_۰)=\vec{d}_{۳۵}+\vec{d}_{۰۳}$$

یعنی جابه‌جایی کل برابر است با مجموع دو جابه‌جایی متوالی

گام دوم: حالا از رابطهٔ $\vec{v}_{av_{۰۵}}=\frac{\vec{d}_{۰۵}}{\Delta t_{۰۵}}$ به جواب می‌رسیم:

$$\vec{v}_{av_{۰۵}}=\frac{\vec{d}_{۰۵}}{\Delta t_{۰۵}}=\frac{\vec{d}_{۳۵}+\vec{d}_{۰۳}}{\Delta t_{۰۵}}=\frac{(-۸\vec{i}+۶\vec{j})+(۶\vec{i}-۸\vec{j})}{۵-۰}=\frac{-۲\vec{i}-۲\vec{j}}{۵}=-۰/۴\vec{i}-۰/۴\vec{j}$$

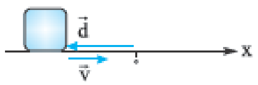
$$|v_{av_{۰۵}}|=\sqrt{(-۰/۴)^۲+(-۰/۴)^۲}=۰/۴\sqrt{۲}\,m/s$$

۱۸۷- گزینهٔ ۱ شتاب متوسط برابر $\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ است؛ پس:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{(۱۷\vec{i}+۱۰\vec{j})-(۲\vec{i}-۵\vec{j})}{۵}=\frac{۱۵\vec{i}+۱۵\vec{j}}{۵}$$

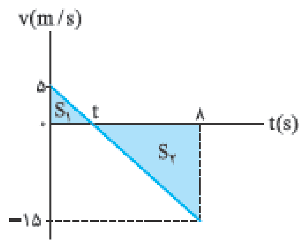
$$\Rightarrow \vec{a}_{av}=۳\vec{i}+۳\vec{j}\Rightarrow |a_{av}|=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۸}\Rightarrow |a_{av}|=۳\sqrt{۲}\,m/s^۲$$

۱۸۸- گزینهٔ ۳ موارد «ب» و «پ» می‌توانند غیرهم‌جهت باشند. جهت سرعت به جهت شتاب اصلاً ربطی ندارد. مثلاً اگر اتومبیلی که به سمت غرب حرکت کند، ترمز کند، شتابی در جهت شرق می‌گیرد که باعث کندشدن حرکتش می‌شود.



جهت بردار مکان هم ربطی به جهت سرعت لحظه‌ای ندارد. مثلاً در شکل روبه‌رو، جهت سرعت لحظه‌ای به سمت مثبت محور x است ولی بردار مکان به سمت منفی x.

۱۸۹- گزینهٔ ۱ برای این‌که بتوانیم تندی متوسط را تعیین کنیم، اول باید مسافت طی‌شده را به دست آوریم. در نمودار t ـ v مسافت طی‌شده برابر با مجموع مساحت‌های زیر نمودار است. با توجه به این موضوع در شکل روبه‌رو مسافت برابر $S_۱+S_۲$ می‌شود. اما برای تعیین $S_۱$ و $S_۲$ به t احتیاج داریم. از تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{۵}{t}=\frac{۱۵}{۸-t}\Rightarrow ۵(۸-t)=۱۵t\Rightarrow ۴۰-۵t=۱۵t\Rightarrow ۴۰=۵t+۱۵t\Rightarrow ۴۰=۲۰t\Rightarrow t=\frac{۴۰}{۲۰}=۲s$$

حالا که $t=۲\,s$ شد، به راحتی می‌توانیم مسافت طی‌شده را تعیین کنیم:

$$l=S_۱+S_۲=\frac{۵\times۲}{۲}+\frac{۱۵\times۶}{۲}=۵+۱۵\times۳=۵۰\,m$$

با تقسیم‌کردن مسافت بر زمان طی مسافت، تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۵۰}{۸}=۶/۲۵\,m/s$$

۱۹۰- گزینهٔ ۳ **گام اول:** سرعت در دو لحظهٔ $t=۰$ و $t=\frac{۳\pi}{۸}s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_۱=۴\pi\sin۴(۰)=۰$$

$$v_۲=۴\pi\sin۴(\frac{۳\pi}{۸})=۴\pi\times(-۱)=-۴\pi\,m/s$$

گام دوم: حالا که سرعت اولیه و نهایی را داریم، شتاب متوسط را تعیین می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۴\pi-۰}{\frac{۳\pi}{۸}-۰}=\frac{-۴\pi}{\frac{۳\pi}{۸}}=-\frac{۳۲}{۳}m/s^۲$$

۱۹۱- گزینهٔ ۴ در نمودار مکان ـ زمان اگر نمودار به سمت مثبت محور xها برود، یعنی x زیاد شود، متحرک در جهت محور xها حرکت می‌کند و سرعت مثبت است. اما اگر نمودار به سمت منفی محور x برود، یعنی x کم شود، متحرک در جهت منفی محور xها حرکت می‌کند و سرعتش منفی است. در این تست در بازه‌های $(۰,t_۱)$ و $(t_۱,t_۲)$ و $(t_۲,t_۳)$ جهت حرکت مثبت است و در $(t_۳,t_۴)$ جهت حرکت منفی است.

۱۹۲- گزینهٔ ۱ زمانی جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند که سرعت صفر شود و علامتش عوض شود؛ پس اول به سراغ پیداکردن لحظه‌هایی می‌رویم که $v=۰$ شود:

$$v=۰\Rightarrow ۰=۹t^۲-۶t+۱\Rightarrow ۰=(۳t-۱)^۲\Rightarrow t=\frac{۱}{۳}s$$

پس فقط در $t=\frac{۱}{۳}\,s$ امکان تغییر جهت حرکت وجود دارد؛ اما این‌جا پایان کار نیست. باید ببینیم که علامت سرعت قبل و بعد از $t=\frac{۱}{۳}\,s$ تغییر می‌کند یا نه! برای این موضوع باید v را تعیین علامت کنیم. $t=\frac{۱}{۳}\,s$ ریشهٔ مضاعف است؛ پس مطابق با جدول روبه‌رو در این لحظه سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و جهت حرکت عوض نمی‌شود.

t(s)		$\frac{۱}{۳}$	
v(m/s)	+	۰	+

۱۹۳- گزینهٔ «۱» مسافت طی‌شده برابر مجموع تمام طول‌هایی است که جسم می‌پیماید. جسم در بازهٔ زمانی $(۰,۱\,s)$ از $x=۰$ به $x=۱۰\,m$ می‌رود. سپس در بازهٔ $(۱\,s,۳\,s)$ از $x=۱۰\,m$ به $x=-۱۰\,m$ می‌رود و در نهایت در بازهٔ $(۳\,s,۴\,s)$ از $x=-۱۰\,m$ به $x=۰$ می‌رود؛ پس:

$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|+|\Delta x_۳|=۱۰-۰+|-۱۰-۱۰|+|۰-(-۱۰)|=۱۰+۲۰+۱۰=۴۰\,m$$

برای تندی متوسط هم تنها کافی است نسبت مسافت طی‌شده به زمان سپری‌شده را حساب کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۴۰}{۴}=۱۰\,m/s$$

۱۹۴- گزینهٔ «۲» در قدم اول لحظهٔ تغییر جهت حرکت را به دست می‌آوریم. در درس‌نامه دیدید که در یک معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ ۲، تغییر جهت در لحظهٔ $t=-\frac{B}{۲A}$ رخ می‌دهد:

$$t_{\text{تغییر جهت}}=-\frac{B}{۲A}=-\frac{(-۱۸)}{۲\times ۹}=\frac{۱۸}{۱۸}=۱\,s$$

در قدم بعدی مکان متحرک در $t=۱\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$t=۱\,s \Rightarrow x(۱)=۹(۱)^۲-۱۸(۱)+۵=-۴\,m$$

حالا جابه‌جایی در بازه‌های $(۰,۱\,s)$ و $(۱\,s,۲\,s)$ را به دست می‌آوریم که بتوانیم مسافت طی‌شدهٔ کل را تعیین کنیم:

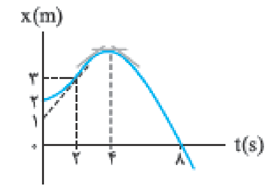
$$\Delta x_۱=x_۱-x_۰=-۴-(۰-۰+۵)=-۹\,m$$

$$\Delta x_۲=x_۲-x_۱=(۹(۲)^۲-۱۸(۲)+۵)-(-۴)=۹\,m$$

بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی‌شده در کل $t=۰$ تا $t=۲\,s$ برابر است با:

$$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲=-۹+۹=۰$$

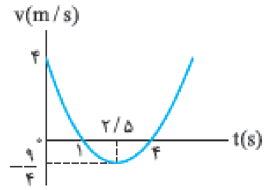
$$l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=|-۹|+۹=۹+۹=۱۸\,m$$



۱۹۵- گزینهٔ «۱» متحرک در لحظه‌ای تغییر جهت حرکت می‌دهد که سرعتش صفر شود و علامت سرعت قبل و بعد از این لحظه تغییر کند. این اتفاق در $t=۴\,s$ رخ می‌دهد. اگر به نمودار روبه‌رو نگاه کنید، می‌بینید که در $t=۴\,s$ شیب مماس بر نمودار که برابر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای است، صفر شده است و قبل از این لحظه، شیب مماس بر نمودار مثبت و بعد از آن منفی است. تا این‌جا «۲» و «۴» از دور خارج می‌شوند. حالا باید به سراغ سرعت در لحظهٔ $t=۲\,s$ برویم. شیب خط مماس در این لحظه را به دست می‌آوریم:

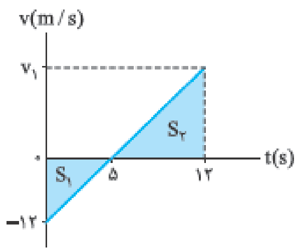
$$\text{شیب خط مماس}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳-۱}{۲-۰}=\frac{۲}{۲}=۱$$

پس سرعت در لحظهٔ $t=۲\,s$ برابر $۱\,m/s$ است.



۱۹۶- گزینهٔ «۴» ابتدا نمودار سرعت ـ زمان معادلهٔ $v=t^۲-۵t+۴$ را که به صورت یک سهمی است، رسم می‌کنیم: حالا بازه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، در بازهٔ $(۰,۲/۵\,s)$ ابتدا **اندازهٔ سرعت** از $۴\,m/s$ به صفر کاهش پیدا کرده و سپس از صفر به $\frac{۹}{۴}\,m/s$ افزایش یافته است؛ پس در این بازه حرکت جسم ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است. در بازهٔ $(۱\,s,۴\,s)$ اندازهٔ سرعت ابتدا از صفر به $\frac{۹}{۴}\,m/s$ افزایش یافته و سپس از $\frac{۹}{۴}\,m/s$ تا صفر کاهش یافته است؛ پس در این بازه هم حرکت همواره کندشونده نبوده است.

در بررسی بازهٔ $(۱\,s,۴\,s)$ دیدیم که اندازهٔ سرعت در بازهٔ $(۱\,s,۲/۵\,s)$ افزایش می‌یابد و در این بازه حرکت تندشونده است. تنها بازه‌ای که می‌ماند، بازهٔ $(۲/۵\,s,۴\,s)$ است که اندازهٔ سرعت از $\frac{۹}{۴}\,m/s$ به صفر کاهش پیدا کرده است؛ پس حرکت در این بازه همواره کندشونده است.



۱۹۷- گزینهٔ «۳» **گام اول:** در شکل روبه‌رو سرعت در $t=۱۲\,s$ را به کمک تشابه دو مثلث $S_۱$ و $S_۲$ حساب می‌کنیم:

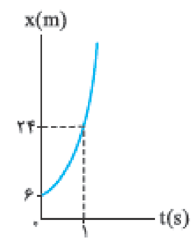
$$\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۲-۵}{v_۱} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲}=\frac{۷}{v_۱} \Rightarrow v_۱=۱۶/۸\,m/s$$

گام دوم: جابه‌جایی از $t=۰$ تا $t=۱۲\,s$ را حساب می‌کنیم. برای این کار باید مساحت زیر نمودار $v-t$ را تعیین کنیم:

$$\Delta x=-S_۱+S_۲=-\frac{۵\times ۱۲}{۲}+\frac{۷\times ۱۶/۸}{۲}=-۳۰+۵۸/۸=۲۸/۸\,m$$

گام سوم: مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=-۴\,m$ است؛ پس:

$$x_{۱۲}=x_۰+\Delta x=-۴+۲۸/۸=۲۴/۸\,m$$



۱۹۸- گزینهٔ «۴» معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک از درجهٔ دو است؛ پس نمودار $x-t$ یک سهمی است و تغییر جهت حرکت متحرک در مینیمم یا ماکسیمم مقدار رخ می‌دهد. همان‌طور که از درس ریاضی‌تان می‌دانید، کم‌ترین یا بیشترین مقدار سهمی در $t=-\frac{B}{۲A}$ رخ می‌دهد. این مقدار را برای معادلهٔ $x=۴t^۲+۱۴t+۶$ به دست می‌آوریم:

$$t=\frac{-۱۴}{۲\times ۴}=-\frac{۷}{۴}\,s$$

از آن‌جا که زمان منفی غیرقابل‌قبول است، این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و همواره به سمت مثبت محور xها در حرکت است. اگر قبول ندارید، به نمودار مکان ـ زمان این متحرک که مانند سهمی روبه‌رو است، نگاه کنید.

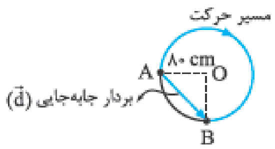
۱۹۹- گزینهٔ «۴» تندی همواره مثبت است چون از تقسیم دو کمیت که همواره مثبت هستند یعنی مسافت طی‌شده و زمان $(\frac{l}{\Delta t})$ به دست می‌آید.

۲۰۰- گزینهٔ ۱ شیب خط مماس بر نمودار v ـ t برابر شتاب لحظه‌ای است؛ پس اگر نسبت شتاب در $t = ۱۰\,s$ به شتاب در $t = ۲\,s$ را می‌خواهیم، باید شیب مماس‌های وارد بر نمودار v ـ t در این نقاط را به دست آوریم:

$$t = ۲\,s \Rightarrow \text{شیب نمودار} = \frac{۱۶-۱۰}{۲-۰} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow a_{(۲)} = ۳\,m/s^۲$$

$$t = ۱۰\,s \Rightarrow \text{شیب نمودار} = \frac{۱۰-(-۱۰)}{۱۰} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲ \Rightarrow a_{(۱۰)} = ۲\,m/s^۲ \Rightarrow \frac{a_{(۱۰)}}{a_{(۲)}} = \frac{۲}{۳}$$

۲۰۱- گزینهٔ ۲ **گام اول:** تندی متوسط برابر با نسبت مسافت پیموده‌شده به زمان است؛ پس ابتدا مسافت پیموده‌شده را حساب می‌کنیم. متحرک به طور ساعتگرد از A به B رفته است، یعنی از مسیری که در شکل مقابل رنگی شده است.



پس متحرک $\frac{۳}{۴}$ محیط دایره را طی کرده است:

$$r = ۸۰\,cm = ۰/۸\,m \Rightarrow l = \frac{۳}{۴}(۲\pi r) = \frac{۳}{۴}(۲ \times \pi \times (۰/۸)) = ۱/۲\pi\,m$$

تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱/۲\pi}{۴} = ۰/۳\pi\,m/s$$

گام دوم: اندازهٔ سرعت متوسط از نسبت $\frac{|\text{جابه‌جایی}|}{\Delta t}$ حساب می‌شود. پس اول باید اندازهٔ جابه‌جایی را که بردار آن را در شکل نشان داده‌ایم، حساب کنیم.

واضح است که d وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ $O\hat{A}B$ است:

$$|\vec{d}| = \sqrt{۸۰^۲ + ۸۰^۲} = ۸۰\sqrt{۲}\,cm = ۰/۸\sqrt{۲}\,m$$

حالا می‌توانیم اندازهٔ سرعت متوسط را هم حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۰/۸\sqrt{۲}}{۴} = ۰/۲\sqrt{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۵}\,m/s$$

۲۰۲- گزینهٔ ۳ بردار شتاب متوسط برابر تغییرات سرعت به تغییرات زمان است:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{(-۱۶\vec{j}) - (۴\vec{j})}{۴-۰} = \frac{-۲۰\vec{j}}{۴} = (-۵\,m/s^۲)\vec{j}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) شتاب متوسط را در هر یک از بازه‌ها به دست می‌آوریم:

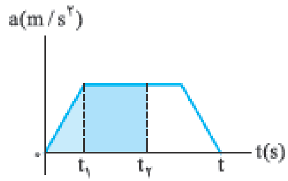
$$\begin{cases} a_{۰-۴} = \dfrac{\Delta v_{۰-۴}}{\Delta t_{۰-۴}} = \dfrac{۰-(-۲)}{۴-۰} = \dfrac{۲}{۴} = \dfrac{۱}{۲}\,m/s^۲ \\ a_{۴-۸} = \dfrac{\Delta v_{۴-۸}}{\Delta t_{۴-۸}} = \dfrac{۱۲-۰}{۸-۴} = \dfrac{۱۲}{۴} = ۳\,m/s^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{۰-۴}}{a_{۴-۸}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

(۲) در بررسی گزینهٔ قبل دیدیم که شتاب متوسط این قسمت $\frac{۱}{۲}\,m/s^۲$ است.

(۳)
$$a_{۰-۸} = \frac{\Delta v_{۰-۸}}{\Delta t_{۰-۸}} = \frac{۱۲-(-۲)}{۸-۰} = \frac{۱۴}{۸} = \frac{۷}{۴} = ۱/۷۵\,m/s^۲$$

(۴)
$$a_{۲-۸} = \frac{\Delta v_{۲-۸}}{\Delta t_{۲-۸}} = \frac{۱۲-(-۶)}{۸-۲} = \frac{۱۸}{۶} = ۳\,m/s^۲$$

۲۰۴- گزینهٔ ۱ در نمودار روبه‌رو می‌بینید که در تمام مدت شتاب مثبت است. چون سرعت اولیه صفر بوده است، سرعت هم‌جهت با شتاب می‌شود و همواره افزایش می‌یابد؛ پس حرکت همواره تندشونده است. اگر مساحت زیر نمودار شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید، می‌فهمید لحظه به لحظه مساحت یا مقدار تغییرات سرعت افزایش می‌یابد و در نتیجه سرعت افزایش می‌یابد.

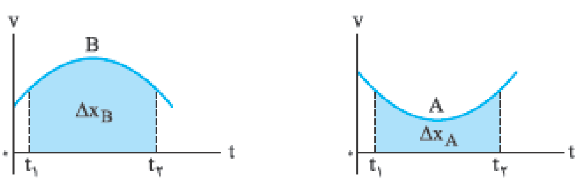


$$t_۱ < t_۲ \Rightarrow \Delta v_۱ < \Delta v_۲ \Rightarrow v_۱ - v_۰ < v_۲ - v_۰ \xrightarrow{(v_۰ = ۰)} v_۱ < v_۲$$

۲۰۵- گزینهٔ ۴ بزرگی سرعت متوسط را برای هر دو متحرک در بازهٔ $(t_۱, t_۲)$ می‌خواهیم؛ پس Δt برای هر دو متحرک مساوی است. با توجه به رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ باید ببینیم که جابه‌جایی کدام متحرک بیشتر است.

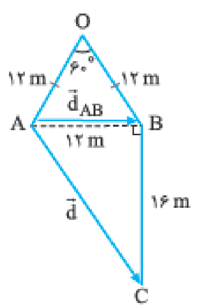
برای این کار باید ببینیم مساحت زیر نمودار کدام متحرک بیشتر است.

با توجه به شکل‌های روبه‌رو می‌بینیم که مساحت زیر نمودار متحرک B و در نتیجه جابه‌جایی متحرک B بیشتر است:



$$\Delta x_B > \Delta x_A \Rightarrow \frac{\Delta x_B}{\Delta t} > \frac{\Delta x_A}{\Delta t} \Rightarrow v_{av,B} > v_{av,A}$$

۲۰۶- گزینهٔ ۱ **گام اول:** باید جابه‌جایی متحرک را از A تا B و کل مسیر تعیین کنیم. اگر به شکل روبه‌رو نگاه کنید، می‌بینید که AOB یک مثلث متساوی‌الساقین است که یک زاویهٔ ۶۰° دارد. در ریاضی نهم خوانده‌اید که مثلث متساوی‌الساقینی که یک زاویهٔ ۶۰° داشته باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی متحرک از A تا B برابر با $AB = OA = OB = ۱۲\,m$ است. برای جابه‌جایی کل هم باید اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AC}$ را به کمک فیثاغورس تعیین کنیم:



$$d = \sqrt{۱۲^۲ + ۱۶^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵۶} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰\,m$$

گام دوم: چون سرعت متوسط و جابه‌جایی در مسیر AOB و کل مسیر را داریم، می‌توانیم مدت زمان هر یک از این جابه‌جایی‌ها را به دست آوریم:

$$\Delta t_{AOB} = \frac{d_{AOB}}{v_{av,AOB}} \Rightarrow \Delta t_{AOB} = \frac{۱۲}{۳} = ۴\,s$$

$$\Delta t = \frac{d}{v_{av}} = \frac{۲۰}{۲/۵} = ۸\,s$$

گام سوم: برای به دست آوردن تندی متوسط در مسیر AOB و کل مسیر همه چیز را داریم:

$$s_{av,AOB} = \frac{l_{AOB}}{\Delta t_{AOB}} = \frac{AO+OB}{\Delta t_{AOB}} = \frac{۱۲+۱۲}{۴} = ۶\ m/s$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{AO+OB+BC}{\Delta t} = \frac{۱۲+۱۲+۱۶}{۸} = ۵\ m/s$$

۲۰۷- گزینهٔ ۴ **گام اول:** فرد موردنظر در بازهٔ (۲ s , ۱۶ s) از A تا B به اندازهٔ ۱۰ m و از B تا C به اندازهٔ ۴ m را طی می‌کند؛ پس:

$$l_{AC} = ۱۰+۴ = ۱۴\ m \Rightarrow s_{av,AC} = \frac{l_{AC}}{\Delta t} = \frac{۱۴}{(۱۶-۲)} = \frac{۱۴}{۱۴} = ۱\ m/s$$

گام دوم: در مسیر A تا B، جابه‌جایی برابر ۱۰ m است و داریم:

$$v_{av,AB} = \frac{d_{AB}}{\Delta t} = \frac{۱۰}{۱۲-۲} = \frac{۱۰}{۱۰} = ۱\ m/s$$

گام سوم: چون $s_{av,AC} = v_{av,AB} = ۱\ m/s$، نسبت $\frac{s_{av,AC}}{v_{av,AB}}$ برابر یک می‌شود.