فهرست

فصل ۱ آمار و احتمال

درس ۱ شمارش

اصول شمارش

اصل جمع

فرض کنید بتوانیم یک عمل مشخص را به x یا y یا ... یا z روش مختلف انجام دهیم، در این صورت طبق اصل جمع تعداد کل حالت‌های انجام آن کار برابر است با $x+y+\cdots+z$. دقت کنید که حرف «یا» در سؤالات، نشان‌دهندهٔ اصل جمع است. مثلاً فرض کنید مریم برای رفتن از تهران به مشهد، بتواند از یکی از ۳ خط اتوبوس یا یکی از ۲ خط هوایی یا یکی از ۴ خط ریلی استفاده کند. تعداد کل حالت‌هایی که مریم می‌تواند به مشهد برود برابر است با:

تعداد حالت‌ها $= ۳+۲+۴=۹$

دقت دارید که مریم نمی‌تواند هم‌زمان از هر سه وسیلهٔ نقلیه استفاده کند و برای رفتن به مشهد فقط باید یکی از وسایل نقلیه را انتخاب کند. به همین علت از اصل جمع استفاده کرده‌ایم.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم، هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل، آن عمل به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است (اصل ضرب نیز قابل تعمیم به بیشتر از ۲ مرحله می‌باشد).

توجه کنید که اگر دو یا چند کار، پشت سر هم انجام شوند از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. ضمناً حرف «و» نشان‌دهندهٔ اصل ضرب است.

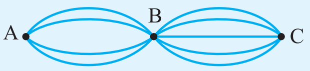
تست **اگر علی ۳ پیراهن آبی، سفید و زرد و ۲ شلوار سیاه و طوسی و ۲ جفت کفش قهوه‌ای و نارنجی داشته باشد، به چند طریق می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟**

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

پاسخ گزینهٔ۲ علی می‌تواند هم پیراهن، هم شلوار و هم کفش انتخاب کند؛ پس متوجه می‌شویم که باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

تعداد حالت‌ها $= ۳\times۲\times۲=۱۲$

تست **نمودار زیر، ارتباط بین سه شهر A، B و C را با جاده‌هایی که همگی دوطرفه هستند نشان می‌دهد. شخصی می‌خواهد از شهر A به C برود و برگردد به طوری که در مسیر برگشت از مسیرهایی که موقع رفتن استفاده کرده، دوباره عبور نکند. او چند انتخاب خواهد داشت؟**



۱) ۲۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

پاسخ گزینهٔ۱ فرد باید اول به شهر B و سپس به شهر C برود؛ پس چون باید دو کار را پشت سر هم انجام دهد، لذا متوجه می‌شویم که با اصل ضرب مواجه‌ایم:

تعداد حالت‌های مسیر رفت $= ۴\times۵=۲۰$

شخص در مسیر برگشت، نمی‌تواند از مسیرهایی که رفته استفاده کند، لذا بین B و C یک مسیر و بین B و A هم یک مسیر حذف می‌شود و چنین می‌نویسیم:

تعداد حالت‌های مسیر برگشت $= ۴\times۳=۱۲$

تعداد کل حالت‌های رفت و برگشت $= ۲۰\times۱۲=۲۴۰$

نکته در سؤالاتی که موضوع آن‌ها آزمون‌های چند گزینه‌ای است اگر پاسخ‌دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد، برای یافتن تعداد کل حالت‌های پاسخگویی باید تعداد گزینه‌ها را به توان تعداد سؤالات برسانیم.

ولی اگر پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی نباشد، برای یافتن تعداد کل حالت‌ها باید تعداد گزینه‌ها را به علاوهٔ یک کرده جواب را به توان تعداد سؤالات برسانیم.

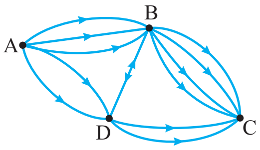
تست اگر بخواهیم به یک آزمون چهارگزینه‌ای با ۱۰ سؤال پاسخ دهیم، چند حالت مختلف خواهیم داشت؟ (پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی است).

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۴^{۸}$ ۳) $۱۰^{۴}$ ۴) $۲^{۲۰}$

پاسخ گزینهٔ ۴

تعداد حالت‌ها = $(\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}} = ۴^{۱۰} = (۲^{۲})^{۱۰} = ۲^{۲۰}$

اگر در همین سؤال گفته می‌شد پاسخگویی به همهٔ سؤالات الزامی نیست جواب برابر با $۵^{۱۰}$ می‌شد.



نکته در بسیاری از مسائل، از اصول جمع و ضرب به طور هم‌زمان استفاده می‌شود. مثلاً به شکل روبه‌رو توجه کنید: فرض کنید شخصی می‌خواهد از شهر A به C سفر کند. او ۴ مسیر کلی را می‌تواند انتخاب کند. مسیر ABC یا ABDC یا ADC یا ADBC حالا فرد هر مسیری را که انتخاب کند، باید حالت‌های مختلف بین شهرها را در هم ضرب کند:

ABC تعداد حالت‌های مسیر $= ۳\times۴ = ۱۲$

ADC تعداد حالت‌های مسیر $= ۲\times۲ = ۴$

ABDC تعداد حالت‌های مسیر $= ۳\times۱\times۲ = ۶$

ADBC تعداد حالت‌های مسیر $= ۲\times۱\times۴ = ۸$

لذا تعداد کل حالت‌ها برابر با ۳۰ می‌باشد.

نماد فاکتوریل

فرض کنید n عددی طبیعی باشد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $n! = n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$

یعنی برای یافتن فاکتوریل یک عدد طبیعی باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب کنیم، مثلاً داریم:

$۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$ $۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$ $۳! = ۳\times۲\times۱ = ۶$ $۲! = ۲\times۱ = ۲$

ضمناً توجه کنید که: $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$

تذکر اگر نخواهیم فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم، کافی است هرجا که متوقف می‌شویم علامت فاکتوریل بگذاریم؛ مثلاً:

$n! = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!$

$۱۰! = ۱۰\times۹!$ $۶! = ۶\times۵\times۴\times۳!$

معمولاً در کسرها این اتفاق می‌افتد؛ یعنی لازم نیست تمام عددهایی را که فاکتوریل دارند تا ۱ باز کنیم؛

مثلاً در کسر $\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!}$ کافی است $(n+۳)!$ را ۲ مرحله باز کنیم تا به مخرج برسیم (چون $n+۳$ بزرگ‌تر از $n+۱$ است):

$$\frac{(n+۳)(n+۲)\cancel{(n+۱)!}}{\cancel{(n+۱)!}} = (n+۳)(n+۲)$$

تست در کدام گزینه، یک تساوی نادرست داریم؟

۱) $\sqrt{۰!} + \sqrt{۱!} + \sqrt{۴! + ۱} = ۷$ ۲) $\frac{۸!}{۳!۲!۵!} = ۲۴$ ۳) $(۳!)! - ۲! = ۷۱۸$ ۴) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = n^{۲} + n$

پاسخ گزینهٔ ۲

۱) $\sqrt{۰!} + \sqrt{۱!} + \sqrt{۴! + ۱} = \sqrt{۱} + \sqrt{۱} + \sqrt{۲۴ + ۱} = ۱ + ۱ + ۵ = ۷$

۲) $\frac{۸!}{۳!۲!۵!} = \frac{۸\times۷\times\overset{۱}{\cancel{۶}}\times\overset{۱}{\cancel{۵!}}}{\underbrace{۳\times۲\times۱}_{\underset{۱}{\cancel{۶}}}\times۲\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۵!}}} = ۲۸$

۳) $(\underbrace{۳!}_{۳\times۲\times۱})! - ۲! = (۶)! - ۲! = ۷۲۰ - ۲ = ۷۱۸$

۴) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)\times n\times\overset{۱}{\cancel{(n-۱)!}}}{\underset{۱}{\cancel{(n-۱)!}}} = (n+۱)\times n = n^{۲} + n$

تست حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-13)!=6$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۶− ۳) ۲۵ ۴) ۲۵−

پاسخ **گزینهٔ ۲** فاکتوریل یک عبارت، برابر با ۶ شده؛ پس آن عبارت باید ۳ باشد؛ چون می‌دانیم که $3!=6$ است:

$$x^2-13=3 \Rightarrow x^2=16 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm 4 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها}=(+4)(-4)=-16$$

جایگشت

مفهوم جایگشت: افراد، اعداد، اشیا و ... به صورت‌های مختلف می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. به هر یک از حالت‌های ممکن برای قرارگرفتن n شیء متمایز در کنار هم، یک جایگشت از آن n شیء می‌گوییم. به عنوان مثال می‌خواهیم جایگشت‌های ارقام ۱ و ۲ و ۳ را بنویسیم؛ یعنی می‌خواهیم تمام اعداد سه‌رقمی که با این ارقام می‌توان ساخت را بنویسیم. این اعداد عبارت‌اند از: ۱۲۳,۱۳۲,۲۳۱,۲۱۳,۳۱۲,۳۲۱

پس ملاحظه می‌کنیم که ۶ عدد ۳رقمی یا ۶ جایگشت ۳رقمی ساخته شد. بدون نوشتن تمام جایگشت‌ها نیز می‌توانیم تعداد آن‌ها را تعیین کنیم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$ مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمهٔ «AMIR» می‌توان ساخت برابر است با: $4!=24$

تست تعداد جایگشت‌های چند شیء متمایز برابر ۱۲۰ می‌باشد. تعداد این اشیاء کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ **گزینهٔ ۲** اگر تعداد اشیای متمایز را n فرض کنیم، خواهیم داشت:

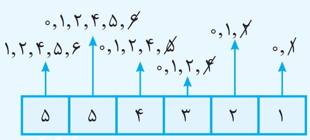
$$n!=120 \Rightarrow n=5 \text{ (می‌دانیم !۵ برابر ۱۲۰ می‌شود)}$$

نکته در بسیاری از مسائل، بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح شد، باید ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پر کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ برویم و خانه‌ها را از چپ به راست پر کنیم. *(البته هر مسئله، شرط خاص خودشو داره ولی فهمیدن این‌که از کجا شروع به پرکردن خونه‌ها کنین با کمی تمرین کاملاً براتون جا میفته)*

تست با ارقام ۰,۱,۲,۴,۵,۶ چند عدد ۶رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۰۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۰۰

پاسخ **گزینهٔ ۳** شرط خاصی برای عدد شش‌رقمی ذکر نشده (جز این‌که رقم‌ها تکراری نباشند)، پس پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. فقط توجه کنید که اولین رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند با صفر شروع شود، ضمناً پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانهٔ بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده‌شده را به دلخواه از خانهٔ قبلی حذف کنیم (چون تکرار ارقام غیرمجاز است).

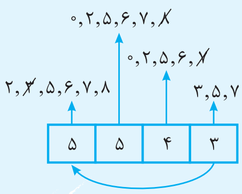


$$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{تعداد عددهای مطلوب}=5\times5\times4\times3\times2\times1=600$$

تست با ارقام ۰,۲,۳,۵,۶,۷,۸ چند عدد فرد چهاررقمی می‌توان ساخت؟(بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۵۰

پاسخ **گزینهٔ ۳** عددی فرد است که یکانش فرد باشد، پس ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را با توجه به این موضوع پر می‌کنیم، سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:



$$\Rightarrow \text{تعداد اعداد مطلوب}=5\times5\times4\times3=300$$

نکته اگر صفر جزء ارقام داده‌شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد، باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم. یکی وقتی که یکان صفر باشد و دیگری وقتی که یکان صفر نباشد.

تست با ارقام ۰,۲,۴,۵,۶,۷ چند عدد ۴رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۸۴ ‏ ۲) ۲۰۴ ‏ ۳) ۲۸۲ ‏ ۴) ۳۴۰

پاسخ گزینهٔ۲ طبق نکتهٔ گفته‌شده باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم:

حالت اول

~~۲~~,۴,۵,۶,۷ / ۲,۴,۵,۶,۷	~~۲~~,۴,۵,۶,۷	~~۴~~,۵,۶,۷	صفر
۵	۴	۳	۱

$\Rightarrow$ تعداد عددها $=۵\times۴\times۳\times۱=۶۰$

حالت دوم

~~۲~~,۴,۵,۶,۷	۰,۴,۵,۶,~~۷~~	~~۲~~,۴,۵,۶	۲,۴,۶
۴	۴	۳	۳

$\Rightarrow$ تعداد عددها $=۴\times۴\times۳\times۳=۱۴۴$

$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}}$ تعداد کل عددهای خواسته‌شده $=۶۰+۱۴۴=۲۰۴$

تذکر اگر در تست بالا ذکر می‌شد که تکرار رقم‌ها مجاز است نباید هیچ عددی را خط می‌زدیم و فقط با یک حالت به جواب می‌رسیدیم:

۲,۴,۵,۶,۷	۰,۲,۴,۵,۶,۷	۰,۲,۴,۵,۶,۷	۰,۲,۴,۶
۵	۶	۶	۴

$\Rightarrow$ تعداد عددها $=۵\times۶\times۶\times۴=۷۲۰$

کنار هم قرارگرفتن چند شیء خاص

گاهی اوقات می‌خواهیم افراد یا اشیاء یا حروف یا ارقام خاصی همیشه کنار هم باشند. در این‌گونه سؤالات آن اشیاء یا افراد را یک مجموعهٔ به هم چسبیده فرض می‌کنیم؛ یعنی آن‌ها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم؛ سپس تعداد اشیای بیرون بسته و خود بسته را شمرده با فاکتوریل می‌نویسیم و آن را در تعداد اشیای داخل بسته با فاکتوریل ضرب می‌کنیم. مثلاً می‌خواهیم با حروف کلمهٔ mafluk کلماتی بسازیم که در آن‌ها حروف m و a همواره کنار هم باشند.

$\underbrace{\boxed{m,a}}_{\text{۱ شیء}}$ f,l,u,k $\Rightarrow$ تعدادکلمات‌مطلوب $=۵!\times۲!=۱۲۰\times۲=۲۴۰$

توجه دارید که بیرون بسته ۴ شیء (۴ حرف) وجود داشت که به همراه خود بسته برابر ۵ شد که با فاکتوریل نوشتیم. سپس تعداد اشیاء (حروف) داخل بسته را شمردیم که ۲تا بود و نوشتیم !۲.

تست با ارقام ۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹ چند عدد ۷رقمی می‌توان ساخت به طوری که در تمام این اعداد، رقم‌های فرد کنار هم قرار گیرند؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۱) ۲۷۶ ‏ ۲) ۴۷۶

۳) ۶۷۶ ‏ ۴) ۵۷۶

پاسخ گزینهٔ۴ رقم‌های فرد را کنار هم و در داخل یک بسته قرار می‌دهیم:

$\underbrace{\boxed{۱,۵,۷,۹}}_{\text{۱ شیء}}$,۲,۴,۶ $\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب $=۴!\times۴!=۲۴\times۲۴=۵۷۶$

البته توجه کنید اگر حروف یا ارقام داخل بسته، یکسان بودند نباید اشیای داخل را شمارش کنیم.

تست با حروف کلمهٔ «NAAMDARAAN» چند کلمهٔ ۱۰حرفی می‌توان ساخت به طوری که در همهٔ آن‌ها حروف یکسان، کنار هم قرار داشته باشند؟

۱) ۱۲۰ ‏ ۲) ۱۸۰ ‏ ۳) !۲×!۵×!۵ ‏ ۴) !۴×!۵

پاسخ گزینهٔ۱

$\underbrace{\boxed{AAAAA}}_{\text{۱ بسته}}$ $\underbrace{\boxed{NN}}_{\text{۱ بسته}}$ M D R $\Rightarrow$ تعدادکلمات‌خواسته‌شده $=۵!=۱۲۰$

توجه کنید که الان دیگر نباید داخل مستطیل‌ها را بشماریم چون در داخل مستطیل اول، همگی A و مستطیل دوم همگی N هستند و جابه‌جایی Aها با هم و Nها با هم، تغییری ایجاد نمی‌کند.

ترتیب و ترکیب

مسائل ترتیب

در نظر بگیرید که n شیء متمایز موجود است و می‌خواهیم r شیء از آن‌ها را به شرطی انتخاب کنیم که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها کنار هم، مهم باشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء را با $P(n,r)$ نشان داده و آن را ترتیب r شیء از n شیء می‌نامیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\ ,\ n\geq r$$

تست از بین ۶ کارمند می‌خواهیم نفر اول را به عنوان مدیر، نفر دوم را به عنوان معاون و نفر سوم را به عنوان دفتردار انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۸۰

پاسخ گزینهٔ ۲ ترتیب انتخاب افراد مهم است، زیرا نفر اول، نفر دوم و نفر سوم هر کدام سِمَت‌های مختلفی دارند، پس در واقع باید به کمک فرمول بالا، ۳ نفر را از بین ۶ نفر انتخاب کنیم:

$$P(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=\frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=120$$

البته به جای استفاده از فرمول $P(n,r)$ می‌توانیم از روش پرکردن خانه‌ها نیز استفاده کنیم:

نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
۴	۵	۶

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=6\times5\times4=120$

تست تعداد ترتیب‌های n شیء از ۵ شیء برابر است با تعداد ترتیب‌های $(n-1)$ شیء از ۵ شیء، مربع n کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۹ ۴) ۲۵

پاسخ گزینهٔ ۴

$$P(5,n)=P(5,n-1)\Rightarrow\frac{5!}{(5-n)!}=\frac{5!}{(5-(n-1))!}$$

$$\Rightarrow\frac{\overset{1}{\cancel{5!}}}{(5-n)!}=\frac{\overset{1}{\cancel{5!}}}{(5-n+1)!}\Rightarrow(5-n)!=(6-n)!\Rightarrow\underset{1}{\cancel{(5-n)!}}=(6-n)\underset{1}{\cancel{(5-n)!}}\Rightarrow6-n=1\Rightarrow n=5\Rightarrow n^2=25$$

مسائل ترکیب

در نظر بگیرید که n شیء متمایز وجود دارد و می‌خواهیم r شیء را از بین آن‌ها انتخاب کنیم به شرطی که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و آن را ترکیب r شیء از n شیء می‌نامیم و فرمول آن به صورت مقابل است:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}\ ,\ n\geq r$$

تست در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی وجود دارد و ۹ نفر در لیست انتظار قرار دارند. به چند حالت می‌توان ۴ نفر را سوار هواپیما کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۲۶

پاسخ گزینهٔ ۴ در مورد ترتیب انتخاب این ۴ مسافر برای سوار کردنشان به هواپیما تأکیدی نشده پس باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم:

تعداد حالت‌ها $=\binom{9}{4}=\frac{9!}{(9-4)!\times4!}=\frac{9!}{5!\times4!}=\frac{9\times8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times4\times3\times2\times1}=126$

تست ۷ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. تعداد چهارضلعی‌هایی که با این ۷ نقطه می‌توان ساخت کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۶۵

پاسخ گزینهٔ ۲ باز هم با یک مسئلهٔ ترکیب مواجهیم. چون می‌دانید که چهارضلعی ABCD مثلاً با BCAD فرقی ندارد؛ یعنی وقتی چهار نقطه را به عنوان رأس‌های چهارضلعی انتخاب می‌کنیم، دیگر جابه‌جایی آن‌ها با هم، چهارضلعی جدیدی ایجاد نمی‌کند، لذا خواهیم داشت:

تعداد چهارضلعی‌ها $=\binom{7}{4}=\frac{7!}{(7-4)!\times4!}=\frac{7!}{3!\times4!}=\frac{7\times6\times5\times\overset{1}{\cancel{4!}}}{6\times\underset{1}{\cancel{4!}}}=35$

تذکر اگر در همین سؤال گفته می‌شد چند وتر می‌توان ساخت، جواب برابر با $\binom{۷}{۲}$ می‌شد و اگر گفته می‌شد چند مثلث می‌توان ساخت، جواب برابر با $\binom{۷}{۳}$ می‌شد.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$. در این‌جا از فرمول ترکیب استفاده کرده‌ایم، چون می‌دانیم در مجموعه‌ها جابه‌جایی عضوها با هم تأثیری ندارد و مجموعهٔ جدیدی تشکیل نمی‌شود.

تست مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵

پاسخ گزینهٔ ۳ مجموعهٔ A دارای ۷ عضو است، پس تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن برابر است با:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{(۷-۳)!\times ۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times \cancel{۴!}^{۱}}{\cancel{۴!}_{۱}\times ۳\times ۲\times ۱}=۳۵$$

انتخاب اجباری گاهی اوقات مجبوریم ۱ یا چند شیء یا فرد را حتماً جزء انتخابمان قرار دهیم. فرض کنید بخواهیم از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب کنیم به طوری که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد. چون واضح است که k شیء قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید $r-k$ شیء باقی‌مانده را از بین $n-k$ شیء انتخاب کرد.

تست تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A=\{m,n,p,z,x,y,f\}$ به شرطی که همهٔ آن‌ها شامل x,y باشند، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

پاسخ گزینهٔ ۲ انتخاب اجباری x و y داریم، پس خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}=\binom{۷-۲}{۴-۲}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!\times ۲!}=\frac{۵\times ۴\times \cancel{۳!}^{۱}}{\cancel{۳!}_{۱}\times ۲\times ۱}=۱۰$$

روش‌های حل سریع ترکیب: در خیلی از موارد نیازی نیست از فرمول ترکیب به شکل $\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ به طور معمول استفاده کنیم، بدون اثبات از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم تا سرعت حل‌کردن مسائل ترکیب را بالا ببریم:

۱) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ اعداد r و n برابر باشند جواب حتماً برابر ۱ است: $\binom{n}{n}=۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۶}{۶}=۱\ ,\ \binom{۱۰}{۱۰}=۱$

۲) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ عدد r برابر صفر باشد جواب حتماً برابر ۱ است: $\binom{n}{۰}=۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۳}{۰}=۱\ ,\ \binom{۲۰۰}{۰}=۱$

۳) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ عدد r برابر ۱ باشد جواب خود n است: $\binom{n}{۱}=n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۴}{۱}=۴\ ,\ \binom{۲۵}{۱}=۲۵$

۴) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ اختلاف r و n برابر ۱ باشد آن‌گاه جواب برابر n است: $\binom{n}{n-۱}=n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{۴}=۵\ ,\ \binom{۲۸}{۲۷}=۲۸$

۵) اگر ترکیب به شکل $\binom{n}{۲}$ باشد، خواهیم داشت: $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۸}{۲}=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$

تست به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد، به طوری که حداقل ۳ زن انتخاب شوند؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۸۵

پاسخ گزینهٔ ۱ کلاً ۴ زن وجود دارند، پس حداقل ۳ زن یعنی باید ۳ زن یا ۴ زن انتخاب شوند. می‌دانید حرف «یا» به معنی استفاده از اصل جمع است:

$$\text{تعداد کل حالت‌ها}=\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{۳ زن}}\times\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ مرد}}+\underbrace{\binom{۴}{۴}}_{\text{۴ زن}}\times\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲ مرد}}=۴\times ۱۰+۱\times ۱۰=۵۰$$

سعی کنید جواب‌های دو ترکیب $\binom{۵}{۳}$ و $\binom{۵}{۲}$ را حفظ کنید، چون با آن‌ها زیاد سروکار داریم. (جواب هر دوی آن‌ها به کمک فرمول ترکیب برابر با ۱۰ می‌شود.)