

(فصل ۱)

تابع

- درس ۱: تبدیل نمودار توابع ۷
 درس ۲: تابع درجه سوم و توابع صعودی و نزولی ۱۷
 درس ۳: بخش پذیری و تقسیم ۲۶
 آزمون جامع ۳۲

(فصل ۲)

حدود نامتناهی و مجانب‌ها

- درس ۱: حد بی‌نهایت ۶۲
 درس ۲: حد در بی‌نهایت ۷۴
 آزمون جامع ۸۳

(فصل ۵)

کاربرد مشتق

- درس ۱: اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱۳۵
 درس ۲: اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱۴۴
 درس ۳: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۱۵۸
 درس ۴: رسم نمودار توابع ۱۷۶
 آزمون جامع ۱۹۰
 آزمون جامع ۲ ۱۹۲

(فصل ۲)

مثلثات

- درس ۱: تناوب و تابع تانژانت ۳۵
 درس ۲: معادلات مثلثاتی ۴۷
 آزمون جامع ۶۰

(فصل ۴)

مشتق

- درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۸۵
 درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی ۱ ۹۲
 درس ۳: مشتق پذیری و پیوستگی ۲ ۱۱۱
 درس ۴: آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای ۱۲۸
 آزمون جامع ۱ ۱۳۲
 آزمون جامع ۲ ۱۳۳

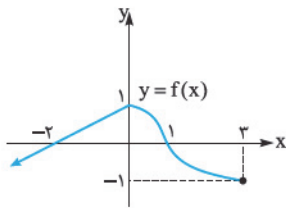
- پاسخنامه تشریحی ۱۹۵
 پاسخنامه کلیدی ۳۵۳

تبدیل نمودار توابع

گاهی وقت‌ها در حل مسائل مربوط به معادلات، نامعادلات و ... نیازمند عملیات جبری سنگین هستید، در صورتی که رسم شکل، دید بهتری از مسئله در اختیاران قرار می‌دهد و در اغلب موارد منجر به حل مسئله می‌شود. با این حال خیلی‌ها از رسم فراری هستند، چون برای رسم بسیاری از توابع دنبال روش‌های سخت و پیچیده می‌گردند (ولی اشتباه می‌کنند *ریگله!*). در این قسمت تکنیک‌هایی را یاد می‌گیریم که رسم بسیاری از توابع براتون گلایی بشه! این تکنیک‌ها «انتقال‌های عمودی و افقی»، «انبساط و انقباض‌های عمودی و افقی» و «قرینه‌یابی» نام دارند. پس شروع کنیم ...

تکنیک‌های رسم توابع

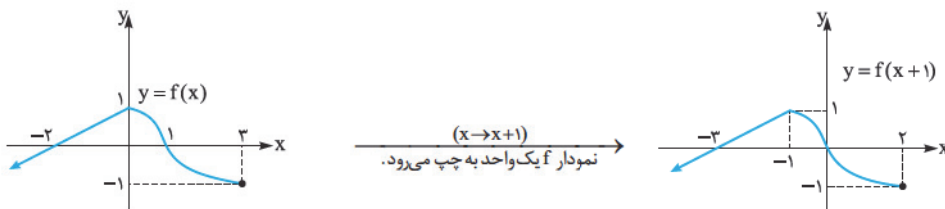
فرض می‌کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد:
با این نمودار تمام تکنیک‌ها را بررسی می‌کنیم:



انتقال‌های افقی و عمودی

۱ رسم نمودار $y = f(x+a)$ و $y = f(x-a)$ ($a > 0$)

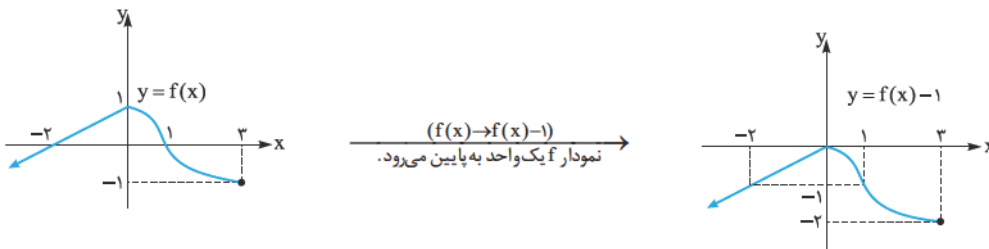
برای رسم نمودار $y = f(x+a)$ ، باید نمودار f را a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y = f(x-a)$ ، باید نمودار f را به اندازه a واحد به سمت راست منتقل کنیم (انتقال افقی). برای مثال نمودار $y = f(x+1)$ به صورت زیر است:



نکته انتقال‌های افقی بر دامنه تابع تأثیر می‌گذارند، اما روی برد تابع بی‌تأثیرند.

۲ رسم نمودار $y = f(x)+a$ و $y = f(x)-a$ ($a > 0$)

برای رسم نمودار $y = f(x)+a$ ، نمودار f را به اندازه a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y = f(x)-a$ ، نمودار f را به اندازه a واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم (انتقال عمودی). برای مثال نمودار $y = f(x)-1$ به صورت زیر است:



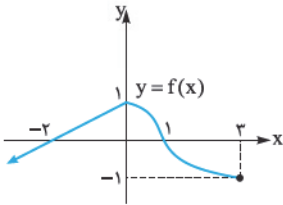
نکته انتقال‌های عمودی روی دامنه بی‌تأثیرند، اما روی برد تابع تأثیر می‌گذارند.

انقباض و انبساط افقی

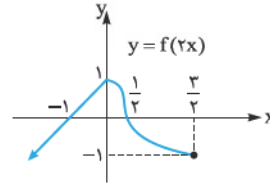
۳ رسم نمودار $y = f(ax)$ ($a > 0$)

- اگر $0 < a < 1$ ، نمودار تابع f باید در راستای محور افقی و با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط گردد (انبساط افقی).
 - اگر $a > 1$ ، نمودار تابع f باید در راستای محور افقی و با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض گردد (انقباض افقی).
- برای مثال نمودار $y = f(2x)$ به صورت زیر است:

نکته انبساط و انقباض‌های افقی فقط روی دامنه تأثیر گذارند.



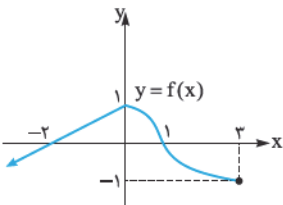
$(x \rightarrow 2x)$
تمام طول‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شوند



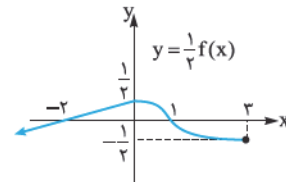
۴ رسم نمودار $y = af(x)$ ($a > 0$)

- اگر $0 < a < 1$ ، نمودار تابع f در راستای محور عمودی با ضریب a فشرده می‌شود (انقباض عمودی).
- اگر $a > 1$ ، نمودار تابع f در راستای محور عمودی با ضریب a کشیده می‌شود (انبساط عمودی).

برای مثال نمودار تابع $y = \frac{1}{2}f(x)$ به صورت زیر است:



$(f(x) \rightarrow \frac{1}{2}f(x))$
تمام عرض‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شوند

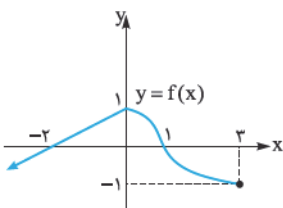


نکته انبساط و انقباض‌های عمودی روی برد تابع تأثیر می‌گذارند. ولی زورشان به تغییر دامنه نمی‌رسد!

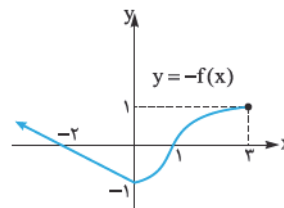
قرینه‌یابی

۵ رسم نمودار $y = -f(x)$

- برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، باید نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.
- برای مثال نمودار تابع $y = -f(x)$ به صورت زیر است:



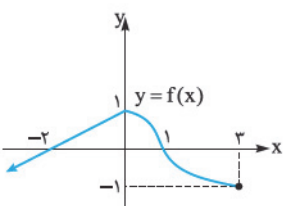
$(f(x) \rightarrow -f(x))$
نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود



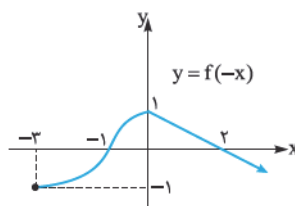
نکته در قرینه نسبت به محور x ها، فقط برد تابع تغییر می‌کند و قرینه می‌شود.

۶ رسم نمودار $y = f(-x)$

- برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، باید نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
- برای مثال نمودار $y = f(-x)$ به صورت زیر است:



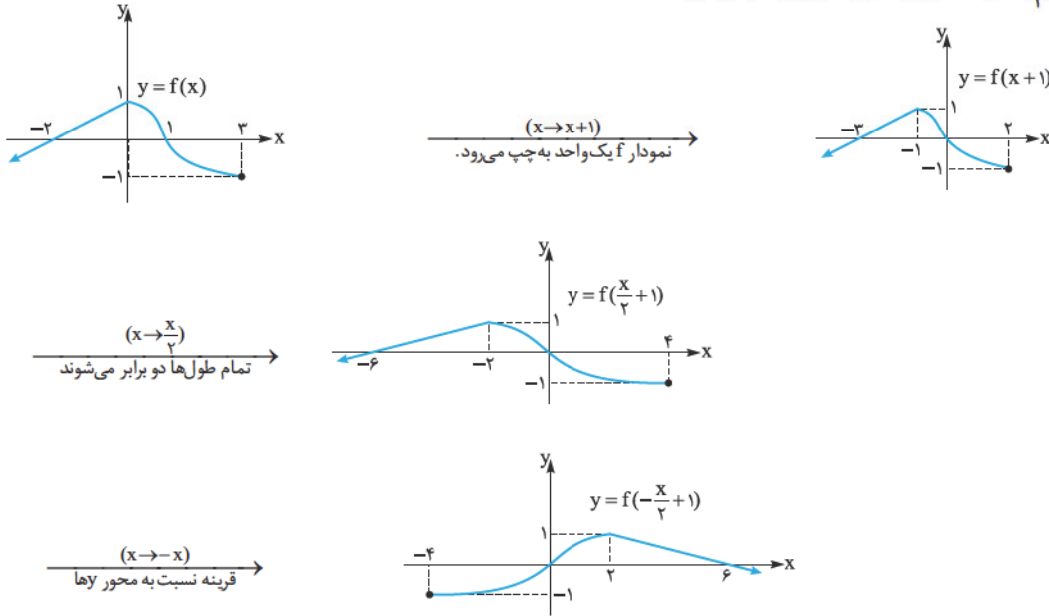
$(x \rightarrow -x)$
نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود



نکته در قرینه نسبت به محور y ها، فقط دامنهٔ تابع تغییر می‌کند و قرینه می‌شود.

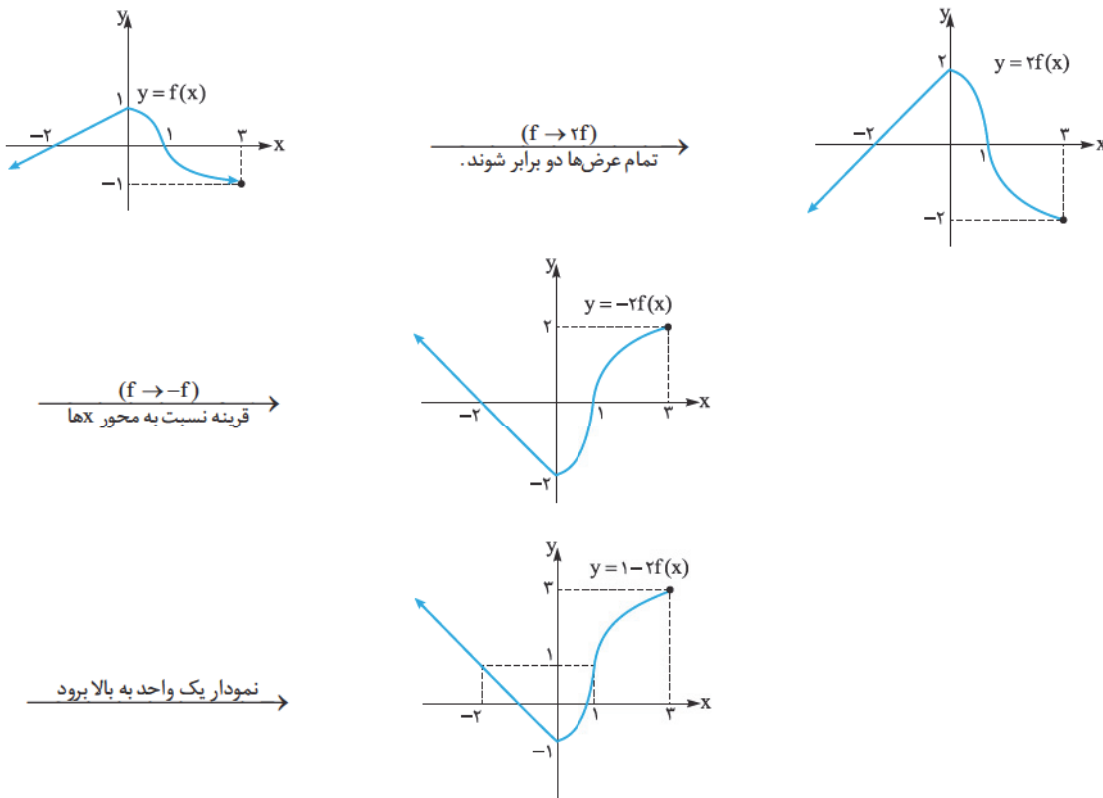
۷ رسم نمودار $y = f(ax + b)$

برای رسم، باید ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می‌دهیم، سپس تغییرات مربوط به ضریب X (که همان انبساط یا انقباض افقی هستند و یا قرینه‌یابی نسبت به محور Y ها) را روی شکل اعمال می‌کنیم.
برای مثال نمودار تابع $y = f(1 - \frac{x}{4})$ به صورت زیر رسم می‌شود:

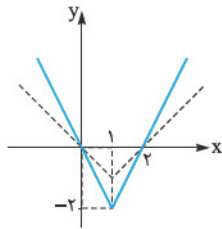


۸ رسم نمودار $y = af(x) + b$

برای رسم، ابتدا ضریب a را تأثیر می‌دهیم، (که همان انبساط یا انقباض عمودی هستند و یا قرینه‌یابی نسبت به محور X ها) بعد انتقال عدد ثابت b را انجام می‌دهیم.
برای مثال نمودار $y = 1 - 2f(x)$ به صورت زیر رسم می‌شود:

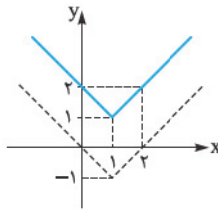


در حالتی که هم تغییرات روی X داریم و هم روی Y ، بهتر است ابتدا تغییرات روی X را اعمال کنید و سپس به سراغ تغییرات Y بروید.



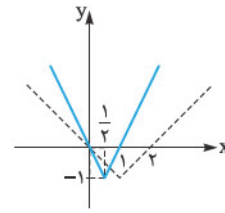
$$y = 2f(x)$$

تمام عرض‌ها دو برابر می‌شوند.



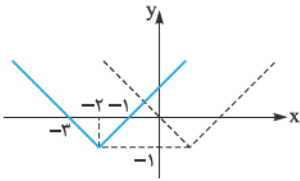
$$y = f(x) + 2$$

دو واحد به سمت بالا می‌رود.



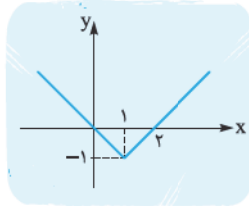
$$y = f(2x)$$

تمام طول‌ها نصف می‌شوند. (انقباض افقی)

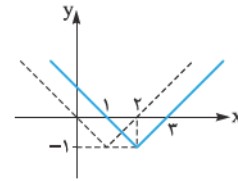


$$y = f(x+2)$$

سه واحد به سمت چپ می‌رود.

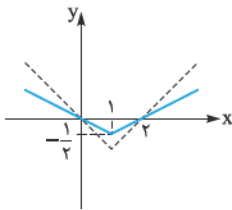


$$y = f(x)$$



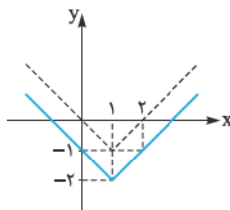
$$y = f(x-1)$$

یک واحد به سمت راست می‌رود.



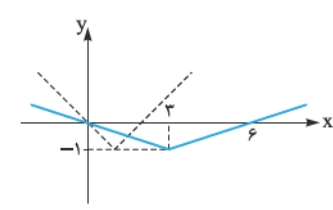
$$y = \frac{1}{3}f(x)$$

تمام عرض‌ها نصف می‌شوند (انقباض عمودی)



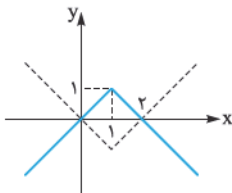
$$y = f(x) - 1$$

یک واحد به سمت پایین می‌رود.



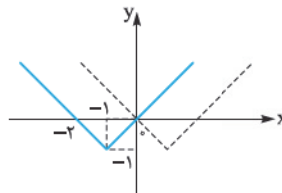
$$y = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

تمام طول‌ها سه برابر می‌شوند. (انبساط افقی)



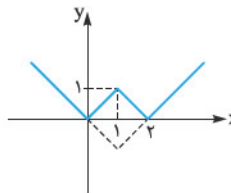
$$y = -f(x)$$

نسبت به محور Xها قرینه می‌شود.



$$y = f(-x)$$

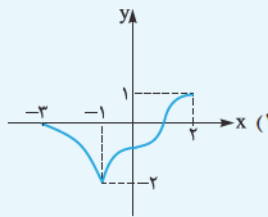
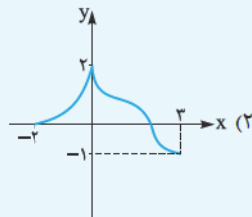
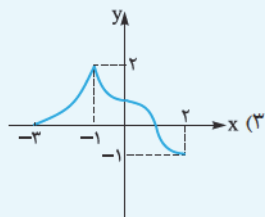
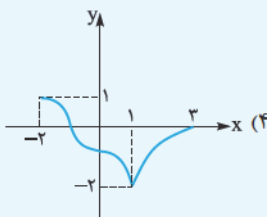
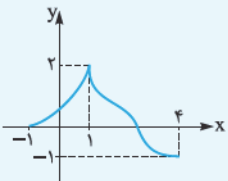
نسبت به محور Yها قرینه می‌شوند.



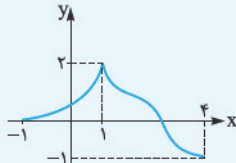
$$y = |f(x)|$$

قسمت‌های زیر محور Xها نسبت به محور Xها قرینه می‌شوند.

تست اگر نمودار تابع $y = -f(x-2)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(-x)$ کدام است؟

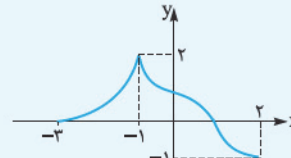


در اینجا باید بر عکس عمل کنیم ابتدا با استفاده از انتقال و قرینه‌یابی از نمودار $y = -f(x-2)$ به نمودار f می‌رسیم:

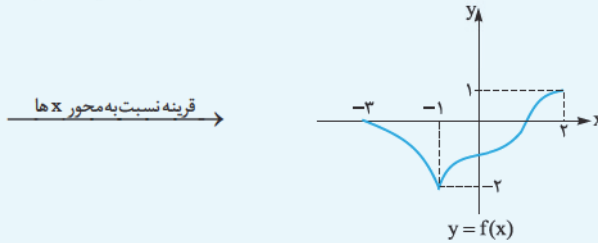


$y = -f(x-2)$

دو واحد به چپ
 $x \rightarrow x+2$



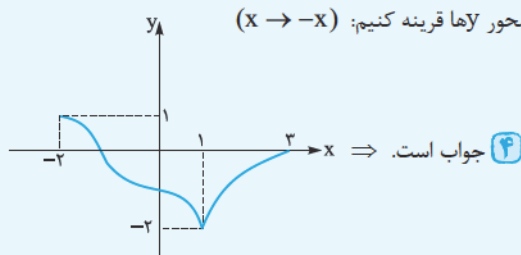
$y = -f(x)$



$y = f(x)$

قرینه نسبت به محور x ها

حالا برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y قرینه کنیم: $(x \rightarrow -x)$



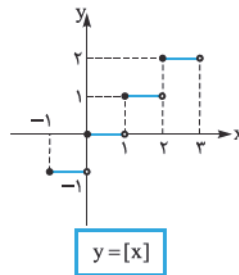
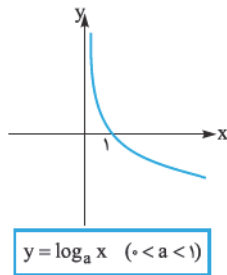
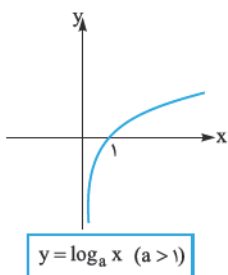
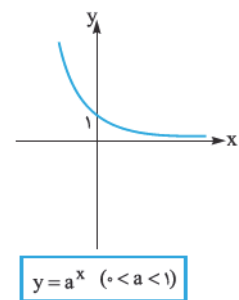
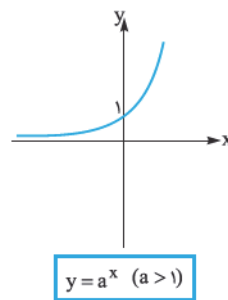
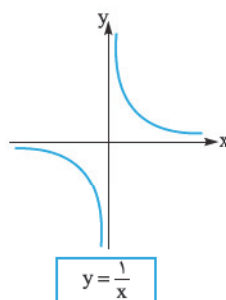
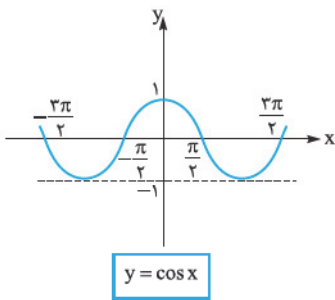
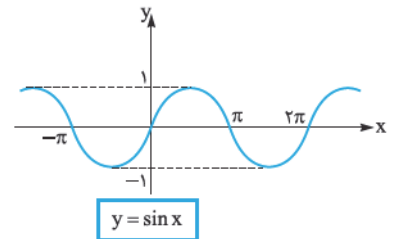
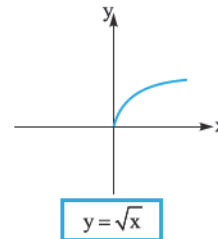
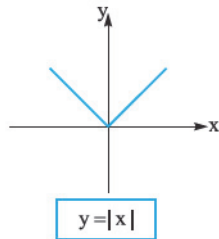
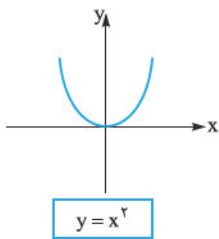
جواب است. ۴

$-f(-1-2) = 0 \Rightarrow f(-3) = 0$

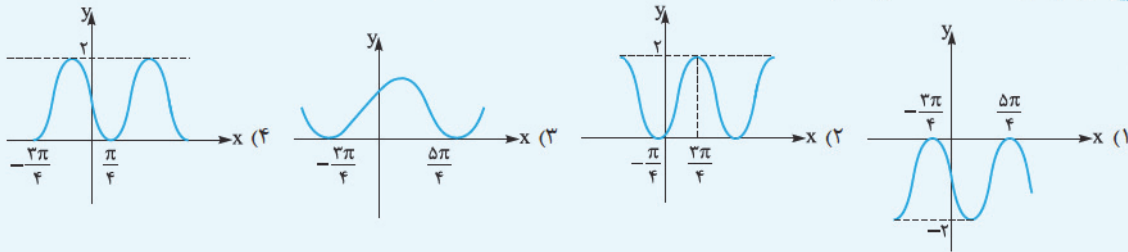
راه دوم $y = -f(x-2)$ (نمودار داده شده) به ازای $x = -1$ مقدار صفر می‌دهد. یعنی:

بنابراین تابع اصلی در نقطه $x = -3$ مقدار صفر را می‌دهد. پس باید تابع $y = f(-x)$ در نقطه ۳ مقدار صفر بدهد در نتیجه ۴ جواب است.

هالا وقتشه که نمودارهای اورجینالی که در رسم احتیاج داریم را با هم مرور کنیم. این نمودارها را در زیر می‌بینید:

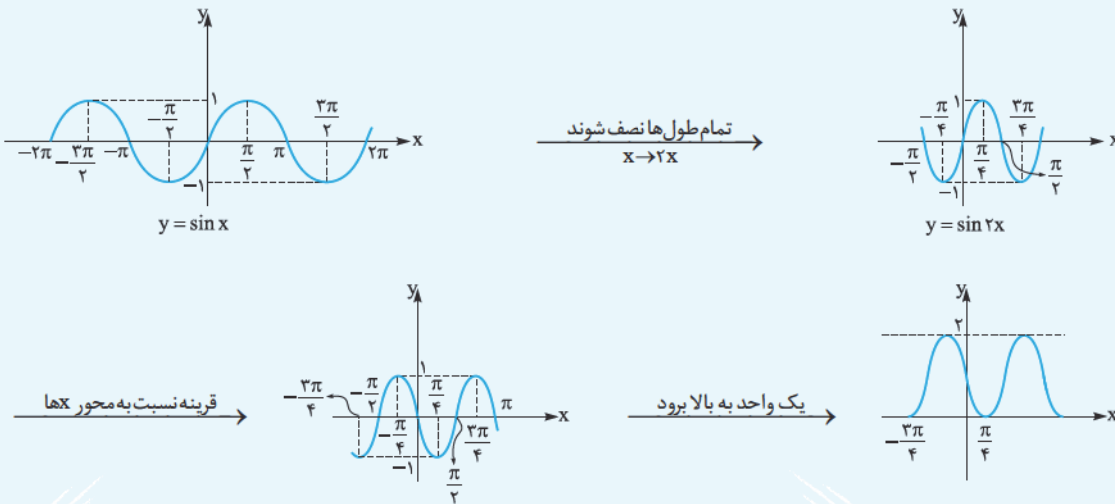


تست نمودار تابع $y = 1 - \sin 2x$ کدام است؟



پاسخ گزینه ۲

برای رسم نمودار $y = 1 - \sin 2x$ از نمودار $y = \sin x$ کمک می‌گیریم و مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



تست برای رسم نمودار $y = 2x^2 - 4x + 3$ با استفاده از نمودار $y = x^2$ به ترتیب چه مرحله‌ای باید صورت پذیرد؟

- (۱) دو واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، ۳ واحد به بالا
 (۲) یک واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، یک واحد به بالا
 (۳) دو واحد به راست، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، ۳ واحد به بالا
 (۴) یک واحد به راست، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، یک واحد به بالا

پاسخ گزینه ۲

اول با استفاده از مربع کامل کردن ضابطه تابع $y = 2x^2 - 4x + 3$ را بی‌مع و پورهش کنیم!

$$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2(x - 1)^2 + 1$$

برای رسم نمودار این تابع با استفاده از نمودار $y = x^2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = (x-1)^2 \xrightarrow[\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}]{y \rightarrow 2y} y = 2(x-1)^2 \xrightarrow[\text{یک واحد به بالا}]{y \rightarrow y+1} y = 2(x-1)^2 + 1$$

یک موضوع دیگر که حتماً باید بررسی کنیم، تحلیل وضعیت نقاط متناظر تابع و انتقال یافته آن است.

تست اگر نقطه $(2x_0 - 1, -\frac{y_0}{2})$ روی نمودار $g(x) = k|x + b|$ متناظر نقطه (x_0, y_0) روی نمودار $f(x) = |x|$ باشد. کدام است $k + b$ ؟

- (۱) صفر
 (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ گزینه ۲

نقطه (x_0, y_0) روی نمودار تابع f قرار دارد، بنابراین:

$$f(x_0) = y_0 \quad (*)$$

$$g(2x_0 - 1) = -\frac{y_0}{2}$$

هم‌چنین نقطه $(2x_0 - 1, -\frac{y_0}{2})$ روی نمودار تابع g قرار دارد، پس:

$$\xrightarrow{(*)} g(2x_0 - 1) = -\frac{1}{2}f(x_0) \quad (**)$$

$$2x_0 - 1 = x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = \frac{x+1}{2}$$

حالا برای پیدا کردن ضابطه $g(x)$ ، با فرض $2x_0 - 1 = x$ داریم:

$$\xrightarrow{(**)} g(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right) \xrightarrow{f(x)=|x|} g(x) = -\frac{1}{2}\left|\frac{x+1}{2}\right| = -\frac{1}{4}\left|\frac{x+1}{2}\right| = -\frac{1}{4}|x+1| = k|x+b|$$

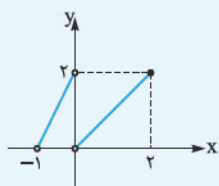
$$k = -\frac{1}{4}, b = 1 \Rightarrow k + b = \frac{3}{4}$$

در نتیجه:

تأثیر تبدیل نمودار روی دامنه و برد تابع

فرض کنیم u عبارتی خطی بر حسب x باشد، در این صورت داریم:

۱ اگر دامنه f بازه $[a, b]$ باشد، برای یافتن دامنه $cf(u) + d$ کافی است نامعادلات مضاعف $a \leq u \leq b$ را حل کنیم.



تست اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $y = 2f(1 - \frac{x}{3})$ کدام است؟

(۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۲) $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) - \{1\}$

(۳) $[-3, 6]$ (۴) $[-3, 6] - \{3\}$

پاسخ گزینه ۴ با توجه به نمودار، دامنه تابع f برابر است با:

$$D_f = (-1, 2] - \{0\}$$

بنابراین برای محاسبه دامنه $y = 2f(1 - \frac{x}{3})$ باید نامعادلات زیر را حل کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < 1 - \frac{x}{3} \leq 2 \xrightarrow{-1} -2 < -\frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3 \leq x < 6 \\ \text{و} \\ 1 - \frac{x}{3} \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{array} \right.$$

اشتراک \rightarrow دامنه $= [-3, 6] - \{3\}$

۲ اگر دامنه $cf(u) + d$ بازه $[a, b]$ باشد، برای یافتن دامنه تابع $y = f(x)$ ، با توجه به این که $a \leq x \leq b$ ، عبارت u را تشکیل داده، دامنه f را می‌یابیم.

تست اگر دامنه تابع $y = f(x - 2)$ بازه $[1, 4]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 1 - f(2x)$ کدام است؟

(۱) $[6, 12]$ (۲) $[\frac{3}{2}, 3]$ (۳) $[-\frac{1}{2}, 1]$ (۴) $[-2, 4]$

پاسخ گزینه ۳ ابتدا با کمک دامنه تابع $y = f(x - 2)$ ، دامنه تابع $y = f(x)$ را می‌یابیم:

$$1 \leq x < 4 \xrightarrow{-2} -1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow D_f = [-1, 2)$$

حالا مسئله مانند مدل ۱ شد. دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 2)$ است. پس برای محاسبه دامنه تابع $g(x) = 1 - f(2x)$ نامعادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$-1 \leq 2x < 2 \xrightarrow{+2} -\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, 1)$$

۳ اگر برد تابع f بازه $[a, b]$ باشد، برای یافتن برد $y = cf(u) + d$ کافی است برد f را ابتدا در C ضرب و سپس با d جمع کنیم.

تست اگر برد تابع f بازه $(1, 3)$ باشد، برد تابع $y = 1 - 2f(3x)$ کدام است؟

(۱) $[-5, -1]$ (۲) $[-3, 1]$ (۳) $(-9, -3]$ (۴) $(-4, 2]$

پاسخ گزینه ۱ برد f بازه $(1, 3)$ است، پس $1 < f(x) \leq 3$ و در نتیجه:

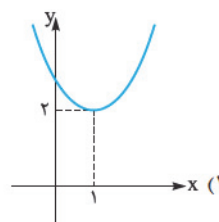
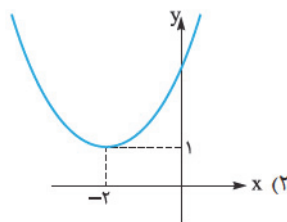
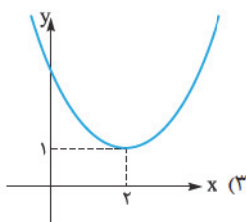
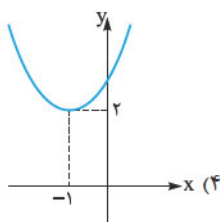
$$1 < f(3x) \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \leq -2f(3x) < -2 \xrightarrow{+1} -5 \leq 1 - 2f(3x) < -1$$

پس برد تابع داده‌شده، بازه $[-5, -1)$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تبدیل نمودار توابع

۱- نمودار تابع $y = (x - 2)^2 + 1$ کدام است؟



۲- تابع $f(x) = \sqrt{x}$ با دامنه $[0, 9]$ مفروض است. اگر مجموعه‌های A و B به ترتیب دامنه و برد تابع $y = f(x - 2) + 1$ باشند، $A \cap B$ کدام است؟

(۴) $[0, 3]$ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

(۳) $[2, 11]$

(۲) $[2, 4]$

(۱) $[1, 3]$

۳- اگر نمودار $f(x) = 1 + \sin(x - \frac{\pi}{4})$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به و یک واحد به منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x) = \sin x$ حاصل می‌شود.

- (۱) چپ - بالا (۲) چپ - پایین (۳) راست - بالا (۴) راست - پایین

۴- نمودار تابع $f(x) = |x|$ را یک واحد به طرف x های مثبت و یک واحد به طرف y های منفی منتقل می‌کنیم، نمودار جدید و نمودار اولیه در چند نقطه متقاطع خواهند بود؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۵- برای رسم نمودار تابع $y = \frac{2^x + 4}{3}$ ، با انتقال نمودار تابع $y = 2^x$ به ترتیب چه مراحل طی می‌شود؟

- (۱) یک واحد به راست و دو واحد به بالا
 (۲) چهار واحد به چپ و انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{3}$
 (۳) یک واحد به راست و چهار واحد به بالا
 (۴) ۲ واحد به بالا و انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{3}$

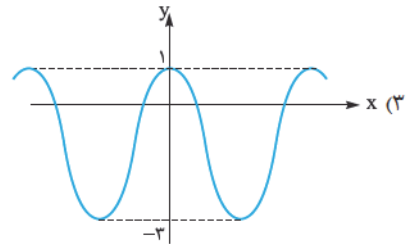
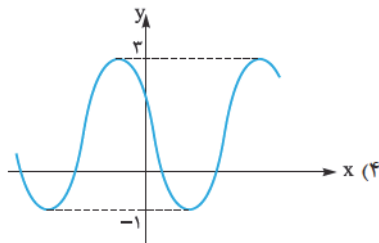
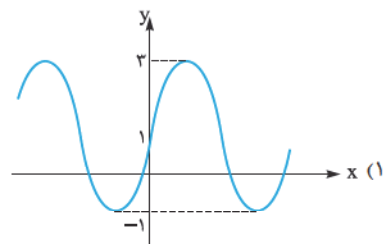
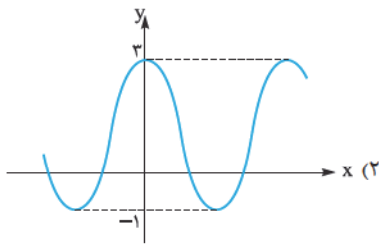
۶- نمودار یک سهمی پس از انتقال رأس آن به اندازه یک واحد به سمت راست و دو واحد به سمت بالا با ضابطه $g(x) = (x - 2)^2$ مشخص شده است. قبل از انتقال معادله تابع به کدام صورت بوده است؟

- (۱) $f(x) = (x - 1)^2$ (۲) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (۳) $f(x) = x^2 + 6x + 11$ (۴) $f(x) = (x - 3)^2$

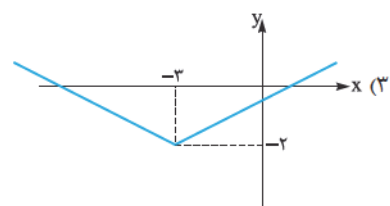
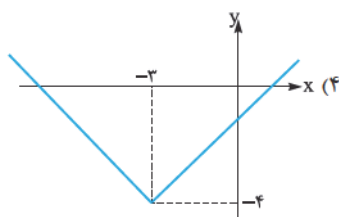
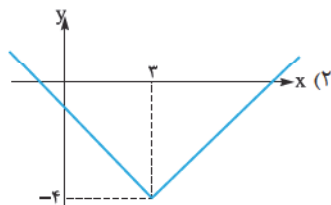
۷- سهمی $f(x) = ax^2 + bx + 1$ مفروض است. اگر رأس نمودار تابع با ضابطه $y = f(x + 2) - 1$ ، نقطه $(-1, 1)$ باشد، a کدام است؟

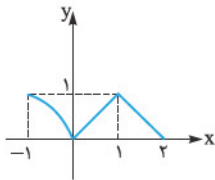
- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۸- نمودار تابع $y = 2 \cos x + 1$ کدام است؟

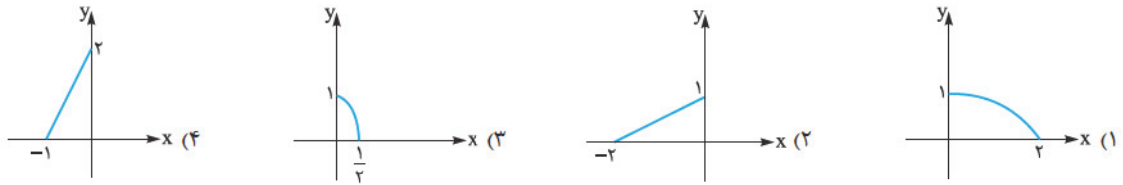


۹- نمودار تابع $y = \frac{|3-x| - 4}{3}$ کدام است؟





۱۰- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، کدام نمودار زیر بخشی از نمودار تابع $y = 2f(x+1)$ است؟



۱۱- برای رسم نمودار تابع $f(x) = |x|$ با انتقال نمودار تابع $g(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$ چه مرحله‌ی را می‌توان طی کرد؟

- (۱) انقباض افقی با ضریب ۲، یک واحد به چپ
 (۲) انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، یک واحد به چپ
 (۳) انبساط افقی با ضریب ۲، یک واحد به راست
 (۴) انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، یک واحد به راست

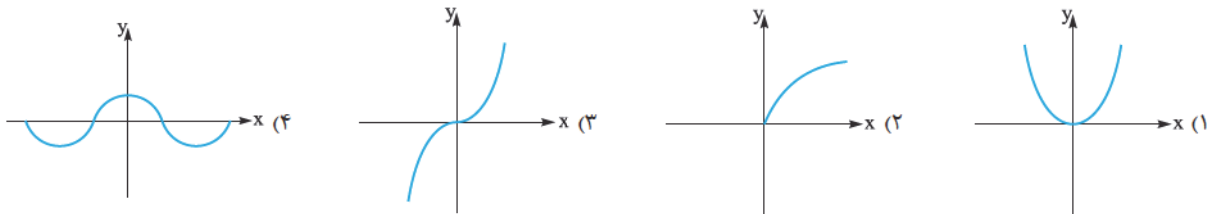
۱۲- تابع $f(x) = \log_2(x+2)$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = f(2x) + a$ فقط از دو ناحیه عبور می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۳- برای رسم نمودار $y = 2\cos^2 x - 1$ با انتقال نمودار $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ چه مرحله‌ی را می‌توان طی کرد؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ واحد به راست، انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{\pi}{4}$ واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲ و یک واحد به پایین
 (۳) $\frac{\pi}{4}$ واحد به چپ، انبساط افقی با ضریب ۲
 (۴) $\frac{\pi}{4}$ واحد به چپ، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$ و یک واحد به پایین

۱۴- نمودار تابع f کدام باشد تا تساوی $f(x) + f(-x) = 0$ به ازای هر x عضو دامنه تابع برقرار باشد؟



۱۵- نمودار تابع $y = 1 + \sqrt{x+1}$ را نسبت به محور y ها انعکاس داده‌ایم. سپس آن را ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۲ واحد به پایین منتقل کرده‌ایم.

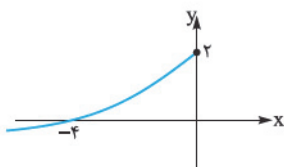
ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱) $y = \sqrt{-x-1} - 1$ (۲) $y = -3 - \sqrt{x+3}$ (۳) $y = 1 - \sqrt{x+3}$ (۴) $y = 3 - \sqrt{-x-1}$

۱۶- نمودار تابع $y = \log_2(x+1)$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم. سپس شکل حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار تابع حاصل محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

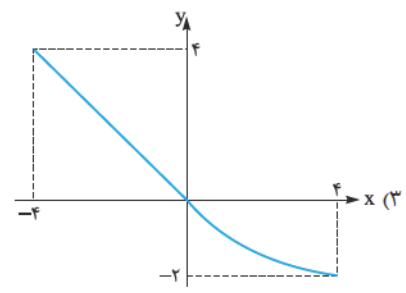
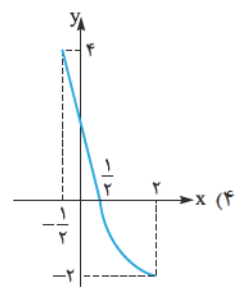
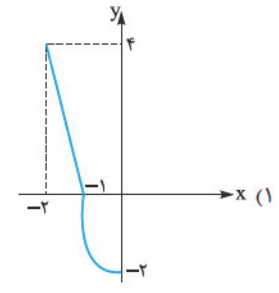
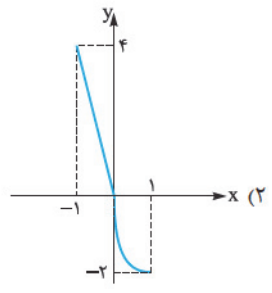
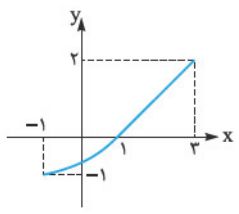
- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۱۰

۱۷- نمودار تابع زیر از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. نمودار تابع از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

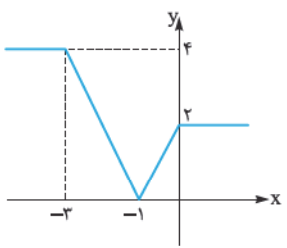


- (۱) $(-9, -3)$
 (۲) $(-9, -2)$
 (۳) $(-16, -3)$
 (۴) $(-16, -2)$

۱۸- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد. نمودار تابع $y = 2f(1 - \frac{x}{2})$ کدام است؟



۱۹- اگر نمودار تابع $y = f(1-x)$ به صورت زیر باشد. سطح محصور بین نمودار تابع $y = f(x-1)$ و محور x ها در فاصله $[0, 5]$ کدام است؟



- ۸ (۱)
- ۸/۵ (۲)
- ۹ (۳)
- ۹/۵ (۴)

۲۰- برای رسم نمودار تابع $g(x) = -2x^2 + 8x - 3$ با استفاده از نمودار $f(x) = x^2$ چه انتقال‌هایی باید صورت گیرد؟

- (۱) ۲ واحد به چپ، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور x ها، ۵ واحد به بالا
- (۲) ۲ واحد به چپ، انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور y ها، ۳ واحد به پایین
- (۳) ۲ واحد به راست، انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور y ها، ۳ واحد به پایین
- (۴) ۲ واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور x ها، ۵ واحد به بالا

۲۱- نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. کدام نقطه به طور قطع روی نمودار $y = \frac{1}{3}f(-x) + 1$ قرار دارد؟

- (۱) $(-8, 4)$
- (۲) $(8, 4)$
- (۳) $(8, 10)$
- (۴) $(-8, -2)$

۲۲- نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار f مفروض است. اگر نمودار تابع g انتقال یافته نمودار تابع f باشد و نقطه $A'(\frac{x_0}{2}, 1 - y_0)$ روی نمودار تابع g متناظر

نقطه A روی f باشد. با چه انتقالی می‌توان از نمودار f به نمودار g رسید؟

- (۱) انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، قرینه نسبت به محور y ها، یک واحد به پایین
- (۲) انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، قرینه نسبت به محور x ها، یک واحد به بالا
- (۳) انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور x ها، یک واحد به بالا
- (۴) انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور y ها، یک واحد به پایین

۲۳- اگر نقطه $(\frac{1-x_0}{2}, y_0 + 1)$ روی نمودار g متناظر نقطه (x_0, y_0) روی نمودار f باشد. رابطه بین f و g به کدام صورت است؟

- (۱) $f(x) = g(1 - 2x) - 1$
- (۲) $g(x) = f(1 - 2x) + 1$
- (۳) $f(x) = g(\frac{1-x}{2}) + 1$
- (۴) $g(x) = f(\frac{1-x}{2}) - 1$

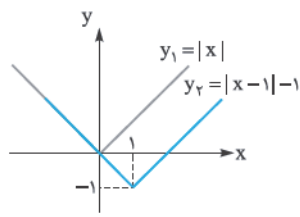
۲۴- اگر $g(x) = 2f(1 - \frac{x}{2})$ و نقطه $A(2, 2)$ روی نمودار g باشد. نقطه متناظر A روی نمودار f به کدام صورت است؟

- (۱) $(-2, 1)$
- (۲) $(-2, 4)$
- (۳) $(0, 1)$
- (۴) $(0, 4)$

۲۵- اگر دامنه تابع f بازه $[-1, 2]$ باشد. دامنه تابع $y = -2f(-\frac{x}{2} + 1) + 3$ کدام است؟

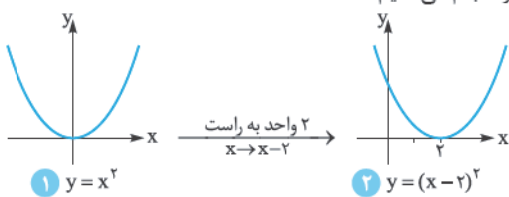
- (۱) $[0, \frac{3}{2}]$
- (۲) $(0, \frac{3}{2}]$
- (۳) $[-2, 4]$
- (۴) $[-2, 4)$

حالا نمودار هر دو تابع $y_1 = |x|$ و $y_2 = |x-1| - 1$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

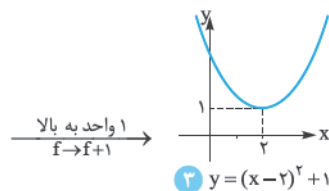


همان‌طور که می‌بینید دو تابع به ازای $x \leq 0$ بر هم منطبق می‌شوند، پس در بی‌شمار نقطه متقاطع‌اند.

۱- گزینه ۳ برای رسم تابع $y = (x-2)^2 + 1$ از روی تابع $y = x^2$



مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



۵- گزینه ۱ اول ضابطه تابع $y = \frac{2^x + 4}{3}$ را با تفکیک کسر ساده‌تر

$$y = \frac{2^x}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow y = 2^{x-1} + 2$$

تابع $y = 2^x$ را با انتقال در دو مرحله زیر به تابع $y = 2^{x-1} + 2$ تبدیل می‌کنیم:

$$1) \text{ تابع را ۱ واحد به راست منتقل می‌کنیم: } (x \rightarrow x-1)$$

$$y = 2^x \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = 2^{x-1}$$

$$2) \text{ پس نمودار تابع را ۲ واحد به بالا می‌بریم:}$$

$$y = 2^{x-1} \xrightarrow{f \rightarrow f+2} y = 2^{x-1} + 2$$

۶- گزینه ۲ نمودار سهمی $y = f(x)$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد

به بالا برده‌ایم، و به ضابطه $g(x) = (x-2)^2$ رسیده‌ایم. برای آن‌که ضابطه f به دست آید، عکس انتقال‌ها را انجام می‌دهیم؛ یعنی اول g را ۲ واحد به پایین و بعد ۱ واحد به چپ می‌بریم.

$$y = (x-2)^2 \xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} y = (x-2)^2 - 2$$

$$\xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}} y = ((x+1)-2)^2 - 2$$

ضابطه آخری را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = ((x+1)-2)^2 - 2 = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$$

۷- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را با انتقال ۲ واحد به چپ و ۱

واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y_2 = f(x+2) - 1$ به دست می‌آید.

اگر رأس تابع y_2 ، نقطه $(-1, 1)$ باشد، برای پیدا کردن رأس تابع y_1 باید عکس انتقال‌های بالا را روی این نقطه انجام دهیم:

$$(1, 2) \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} (-1, 2) \xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}} (-1, 1)$$

پس رأس تابع $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ، نقطه $(1, 2)$ است و داریم:

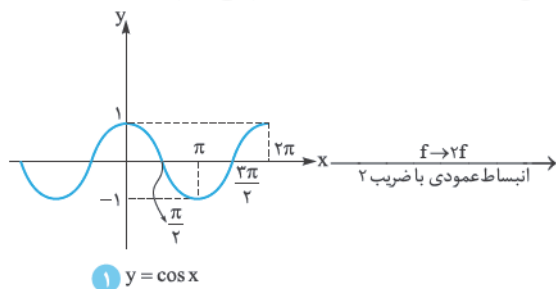
$$\triangleright x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

$$\triangleright f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\xrightarrow{b = -2a} a - 2a = 1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

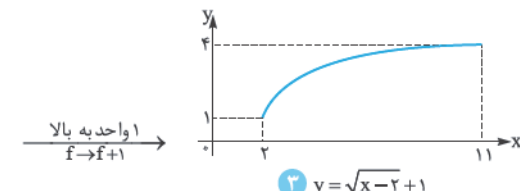
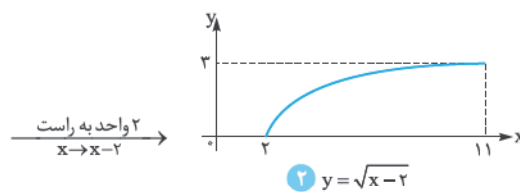
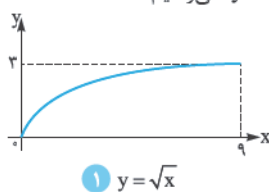
۸- گزینه ۲ راه اول برای رسم نمودار تابع $y = 2 \cos x + 1$ از روی

نمودار تابع $y = \cos x$ ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



۲- گزینه ۲ تابع $f(x) = \sqrt{x}$ با دامنه $[0, 9]$ را رسم می‌کنیم و با

کمک انتقال به نمودار تابع $y = f(x-2) + 1$ می‌رسیم.



دامنه و برد نمودار تابع $f(x-2) + 1$ به ترتیب مجموعه‌های $[2, 11]$ و $[1, 4]$ هستند، پس:

$$A \cap B = [2, 11] \cap [1, 4] = [2, 4]$$

۳- گزینه ۲ قرار است تابع $f(x) = 1 + \sin(x - \frac{\pi}{3})$ را با انتقال به

تابع $y = \sin x$ تبدیل کنیم.

اولاً باید جای x ها، $x + \frac{\pi}{3}$ بگذاریم:

$$y = 1 + \sin(x - \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{x \rightarrow x + \frac{\pi}{3}} y = 1 + \sin((x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow y = 1 + \sin x$$

تا این‌جا باید نمودار را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

ثانیاً باید یک واحد از $y = 1 + \sin x$ کم کنیم:

$$y = 1 + \sin x \xrightarrow{f \rightarrow f-1} y = 1 + \sin x - 1 \Rightarrow y = \sin x$$

پس ۱ واحد هم باید نمودار را به پایین انتقال دهیم.

۴- گزینه ۲ انتقال‌های خواسته‌شده را به ترتیب روی تابع

$f(x) = |x|$ انجام می‌دهیم.

اولاً باید نمودار را یک واحد به طرف راست (به طرف x های مثبت) ببریم،

پس باید جای x ها، $x-1$ قرار دهیم که ضابطه تابع $y = |x-1|$ می‌شود.

ثانیاً باید یک واحد به سمت پایین (به طرف y های منفی) ببریم، پس باید

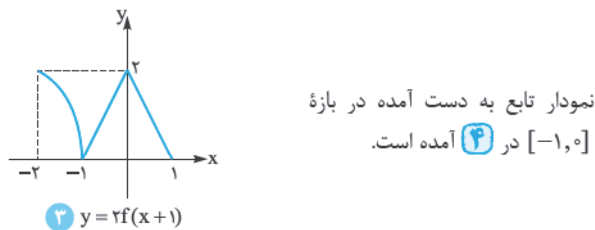
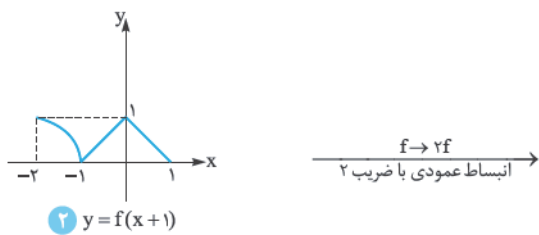
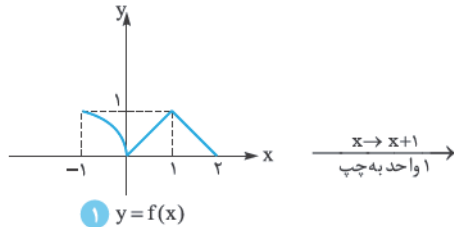
$$y = |x-1| - 1$$

راه دوم: از نقطه یابی استفاده می کنیم. در ضابطه تابع به جای x ، ۳ می گذاریم:

$$y = \frac{|3-x| - 4}{2} \xrightarrow{x=3} y(3) = \frac{|3-3| - 4}{2} = -2$$

پس نقطه $(3, -2)$ باید روی نمودار تابع باشد. تنها نموداری که این نقطه روی آن قرار دارد، **۱** است.

۱۰- گزینه ۴: نمودار تابع $y = f(x)$ را داریم. برای رسم نمودار تابع $y = 2f(x+1)$ مراحل زیر را انجام می دهیم:



نمودار تابع به دست آمده در بازه $[-1, 0]$ در **۴** آمده است.

۱۱- گزینه ۳: اول تابع g را ساده تر می نویسیم:

$$g(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

خب قرار است با انتقال تابع $g(x) = |2x+1|$ به تابع $f(x) = |x|$ برسیم.

۱ اول جای x ، $\frac{1}{2}x$ می گذاریم:

$$g(x) = |2x+1| \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}x} y = |2(\frac{1}{2}x) + 1| = |x+1|$$

یعنی ابتدا تابع انبساط طولی با ضریب $\frac{1}{2}$ می کند.

۲ حالا به جای x ، باید $x-1$ بگذاریم:

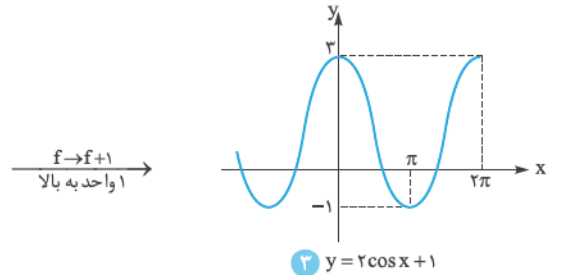
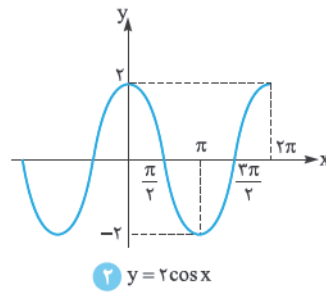
$$y = |x+1| \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = |(x-1)+1| = |x|$$

این جا هم تابع ۱ واحد به راست می رود.

۱۲- گزینه ۳: با توجه به ضابطه $f(x) = \log_2(x+2)$ ، ضابطه تابع $f(2x) + a$ را می نویسیم:

$$\begin{aligned} y = f(2x) + a &\Rightarrow y = \log_2(2x+2) + a \\ &= \log_2 2(x+1) + a = \log_2 2 + \log_2(x+1) + a \\ &= 1 + \log_2(x+1) + a \end{aligned}$$

ساده شده این تابع را به شکل $y = \log_2(x+1) + (a+1)$ می نویسیم.



راه دوم: از نقطه یابی استفاده می کنیم. مقدار تابع را در $X = 0$ به دست می آوریم:

$$y = 2 \cos x + 1 \xrightarrow{x=0} y(0) = 2 \cos 0 + 1 = 3$$

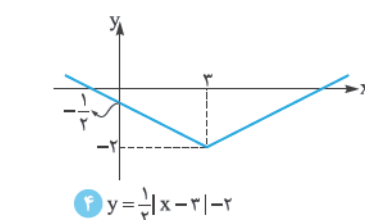
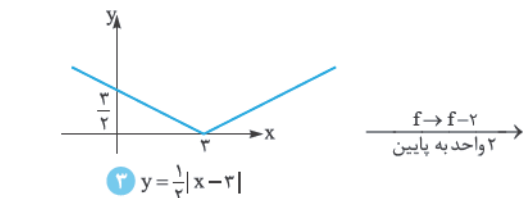
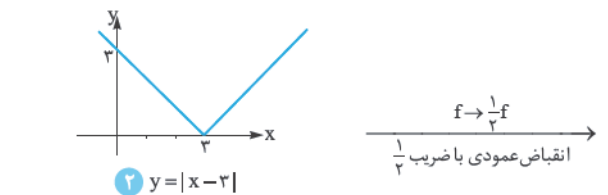
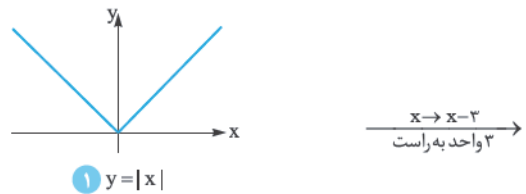
پس نقطه $(0, 3)$ باید روی نمودار باشد. تنها نموداری که این نقطه روی آن است، نمودار **۲** است.

۹- گزینه ۱: ابتدا ضابطه تابع را ساده تر می نویسیم:

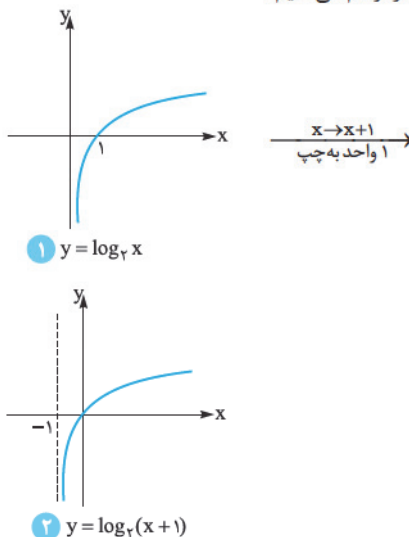
$$y = \frac{|3-x| - 4}{2} \quad |a-b| = |b-a| \rightarrow y = \frac{|x-3| - 4}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}|x-3| - 2$$

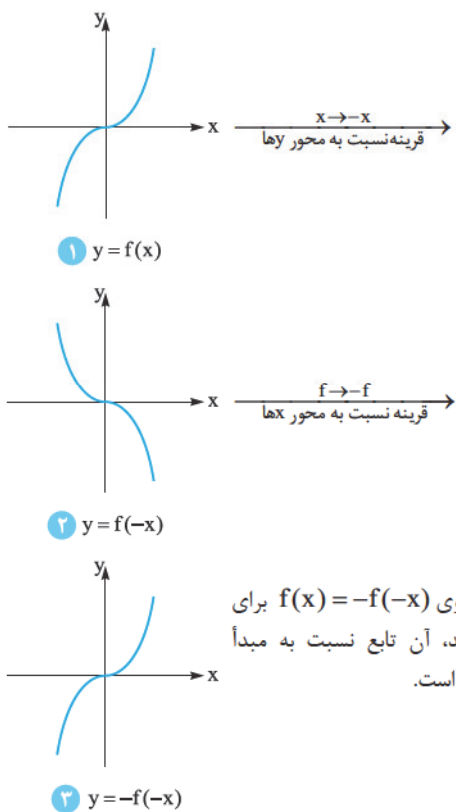
مرحله به مرحله نمودار این تابع را از روی نمودار تابع $y = |x|$ رسم می کنیم:



تابع $y = \log_r(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



برای رسم $y = \log_r(x+1) + (a+1)$ باید تابع بالا را $a+1$ واحد به بالا (یا شاید $|a+1|$ واحد به پایین) ببریم. اگر نمودار فوق را بالا یا پایین ببریم، نمودار از ۳ ناحیه عبور می‌کند، ولی الان جایش خوب است و از ۲ ناحیه عبور می‌کند؛ پس $a+1$ باید صفر باشد تا نمودار همین که هست بماند: $a+1=0 \Rightarrow a=-1$



نکته اگر تساوی $f(x) = -f(-x)$ برای تابعی برقرار باشد، آن تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۱۵- **گزینه ۱** روی ضابطه $y = 1 + \sqrt{x+1}$ انتقال‌های خواسته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- برای انعکاس نسبت به محور y ها، باید به جای x ها، $-x$ بگذاریم:
 $y = 1 + \sqrt{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = 1 + \sqrt{-x+1}$
- حالا نمودار را باید ۲ واحد به چپ ببریم؛ پس به جای x ، $x+2$ می‌گذاریم:
 $y = 1 + \sqrt{-x+1} \xrightarrow{x \rightarrow x+2} y = 1 + \sqrt{-(x+2)+1} = 1 + \sqrt{-x-1}$
- در آخر نمودار را ۲ واحد به پایین می‌بریم؛ بنابراین از ضابطه تابع ۲ واحد کم می‌کنیم:
 $y = 1 + \sqrt{-x-1} \xrightarrow{f \rightarrow f-2} y = 1 + \sqrt{-x-1} - 2$
 $\Rightarrow y = \sqrt{-x-1} - 1$

۱۶- **گزینه ۲** روی ضابطه تابع $y = \log_r(x+1)$ انتقال‌های خواسته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- اول دو واحد به راست می‌بریم؛ پس به جای x ، $x-2$ می‌گذاریم:
 $y = \log_r(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = \log_r(x-2+1) = \log_r(x-1)$
 - بعد نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ بنابراین باید ضابطه تابع را قرینه کنیم:
 $y = \log_r(x-1) \xrightarrow{f \rightarrow -f} y = -\log_r(x-1)$
 - در آخر نمودار را ۱ واحد به بالا می‌بریم؛ پس به ضابطه تابع ۱ واحد اضافه می‌کنیم:
 $y = -\log_r(x-1) \xrightarrow{f \rightarrow f+1} y = -\log_r(x-1) + 1$
- سؤال از ما طول نقطه برخورد تابع به دست آمده با محور x ها را می‌خواهد، پس y را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:
- $$y = -\log_r(x-1) + 1 \xrightarrow{y=0} 0 = -\log_r(x-1) + 1$$
- $$\Rightarrow \log_r(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = r \Rightarrow x = r+1$$

۱۳- **گزینه ۱** ابتدا ضابطه تابع $y = 2\cos^2 x - 1$ را ساده‌تر می‌کنیم. یادتان هست که $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. پس ضابطه تابع به شکل $y = \cos 2x$ است.

می‌خواهیم با انتقال تابع $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ به تابع $y = \cos 2x$ برسیم. مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- به جای x ها، $x - \frac{\pi}{4}$ قرار می‌دهیم:
 $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
 - تابع $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست می‌رود.
 $\xrightarrow{x \rightarrow x - \frac{\pi}{4}} y = \cos((x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}) = \cos x$
 - به جای x ها، $2x$ قرار می‌دهیم:
 $y = \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = \cos 2x$
- $a = 2$ است، بنابراین یعنی انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ داریم.

۱۴- **گزینه ۳**

تساوی $f(x) + f(-x) = 0$ را به شکل $f(x) = -f(-x)$ می‌نویسیم. برای رسم $y = -f(-x)$ دو مرحله طی می‌کنیم:

- ۱ f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:
 $y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = f(-x)$
- ۲ بعد آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:
 $y = f(-x) \xrightarrow{f \rightarrow -f} y = -f(-x)$

پس برای آن که تابع $y = f(x)$ و $y = -f(-x)$ برابر باشند، باید دنبال تابعی باشیم که اگر آن را نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودارش بر خود تابع اولیه منطبق شود. این اتفاق فقط برای تابع $y = x^3$ رخ می‌دهد:

۱۷- گزینه ۲: نمودار رسم شده، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ بوده که یک سری

بلا سرش آمده:

۱) نمودار نسبت به محور y ها قرینه شده، پس به جای x ها، $-x$

می گذاریم: $y = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = \sqrt{-x}$

۲) نمودار نسبت به محور x ها قرینه شده، پس ضابطه تابع قرینه می شود:

$y = \sqrt{-x} \xrightarrow{f \rightarrow -f} y = -\sqrt{-x}$

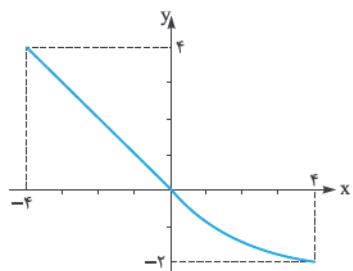
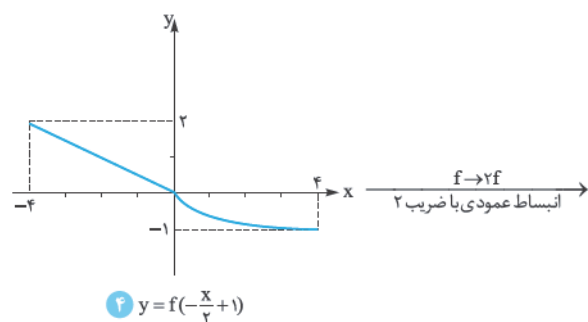
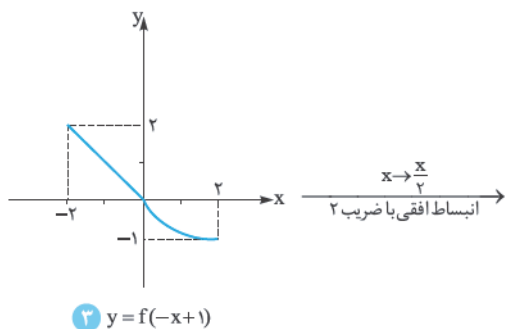
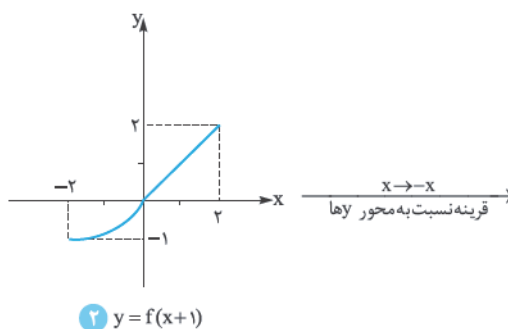
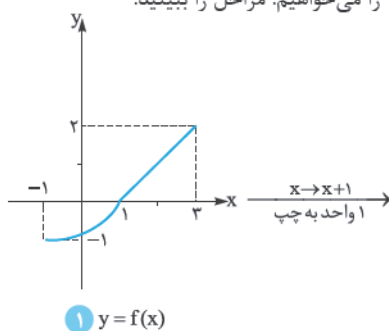
۳) نمودار ۲ واحد به بالا رفته، پس به ضابطه آن ۲ واحد اضافه می شود:

$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow{f \rightarrow f+2} y = -\sqrt{-x} + 2$

دقت کنید که چون دامنه $y = \sqrt{x}$ برابر $[0, +\infty)$ است و در این جا دامنه $[-\infty, 0]$ است پس انتقال افقی نداشته ایم. بنابراین ضابطه تابع به صورت $y = -\sqrt{-x} + 2$ است و در بین گزینه ها فقط نقطه $(-16, -2)$ روی آن قرار دارد.

۱۸- گزینه ۳: نمودار تابع $y = f(x)$ را داریم و نمودار تابع

$y = 2f(1 - \frac{x}{2})$ را می خواهیم. مراحل را ببینید:



۵) $y = 2f(-\frac{x}{2}+1)$

۱۹- گزینه ۳: باید با استفاده از نمودار تابع $y = f(1-x)$ ، نمودار تابع

$y = f(x-1)$ را رسم کنیم. بعد مساحت بین آن نمودار و محور x ها را در

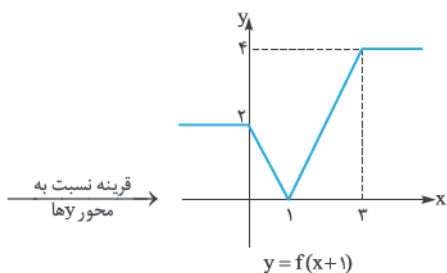
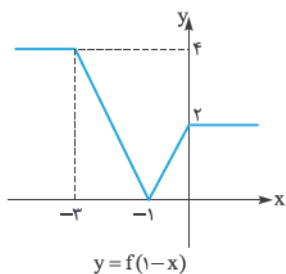
بازه $[0, 5]$ حساب کنیم. برای رسم $f(x-1)$ از روی $f(1-x)$ مراحل زیر

را انجام می دهیم:

۱) در ضابطه $y = f(1-x)$ ، به جای x ، $-x$ می گذاریم:

$y = f(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = f(1-(-x)) = f(x+1)$

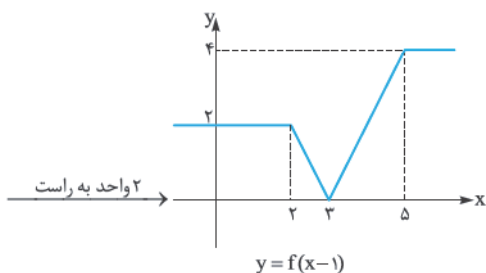
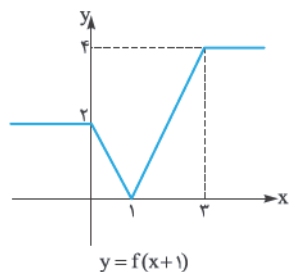
در این مرحله باید نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کنیم:



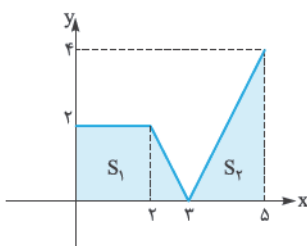
۲) در ضابطه $y = f(x+1)$ ، به جای x ها، $x-2$ می گذاریم:

$y = f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = f((x-2)+1) = f(x-1)$

در این مرحله باید نمودار را ۲ واحد به سمت راست ببریم:



حالا مساحت محصور بین نمودار به دست آمده و محور Xها را در بازه $[0, 5]$ حساب می‌کنیم:



$$S = S_1 + S_2 = \frac{(2+3) \times 2}{2} + \frac{2 \times 4}{2} = 5 + 4 = 9$$

۲۰- **گزینه ۲:** اول ضابطه تابع g را به شکل $g(x) = a(x+b)^2 + c$ می‌نویسیم:
 $g(x) = -2x^2 + 8x - 3 = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 3$
 $= -2(x-2)^2 + 8 - 3 \Rightarrow g(x) = -2(x-2)^2 + 5$

حالا مراحل رسم نمودار $g(x) = -2(x-2)^2 + 5$ از روی $f(x) = x^2$ را می‌نویسیم:

- ۱ اول جای X ها، $X-2$ می‌گذاریم و نمودار 2 واحد به راست می‌رود:
 $y = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = (x-2)^2$
- ۲ بعد ضابطه را در 2 ضرب می‌کنیم که باعث می‌شود نمودار با ضریب 2 انبساط عمودی پیدا کند:
 $y = (x-2)^2 \xrightarrow{f \rightarrow 2f} y = 2(x-2)^2$
- ۳ ضابطه را در منفی ضرب می‌کنیم که باعث قرینه‌شدن نمودار نسبت به محور X ها می‌شود:
 $y = 2(x-2)^2 \xrightarrow{f \rightarrow -f} y = -2(x-2)^2$
- ۴ آخر سر 5 واحد به ضابطه اضافه می‌کنیم که به خاطر آن نمودار 5 واحد به بالا می‌رود:
 $y = -2(x-2)^2 \xrightarrow{f \rightarrow f+5} y = -2(x-2)^2 + 5$

۲۱- **گزینه ۲ راه اول:** می‌خواهیم بینیم نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ به چه نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = \frac{1}{4}f(-x) + 1$ نظیر می‌شود. مرحله به مرحله جلو می‌رویم:

۱ به جای X ها، $-X$ می‌گذاریم، $y = f(x)$ به $y = f(-x)$ تبدیل می‌شود؛ در این حالت نمودار نسبت به محور Y ها قرینه می‌شود:

$$(-8, 6) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } Y} (8, 6)$$

۲ بعد مقدار تابع را در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم تا $y = f(-x)$ به $y = \frac{1}{4}f(-x)$ تبدیل شود؛ در این حالت طول نقاط ثابت می‌ماند و عرض آن‌ها نصف می‌شود.
 $(8, 6) \xrightarrow{\text{عرض نصف می‌شود}} (8, 3)$

۳ در آخر به مقدار تابع 1 واحد اضافه می‌کنیم تا $y = \frac{1}{4}f(-x)$ به $y = \frac{1}{4}f(-x) + 1$ تبدیل شود؛ این‌جا هم طول نقاط ثابت و به عرضشان 1 واحد اضافه می‌شود:
 $(8, 3) \xrightarrow{1 \text{ واحد به عرض اضافه می‌شود}} (8, 4)$

راه دوم: $f(-8)$ را داریم. در ضابطه $y = \frac{1}{4}f(-x) + 1$ باید به جای x عددی قرار دهیم تا $-x = -8$ شود:

$$\triangleright -x = -8 \Rightarrow x = 8$$

$$\triangleright y = \frac{1}{4}f(-x) + 1 \xrightarrow{x=8} y = \frac{1}{4}f(-8) + 1 = 3 + 1 = 4$$

پس نقطه مورد نظر $(8, 4)$ است.

۲۲- **گزینه ۲:** نقطه (x_0, y_0) روی تابع f است، پس: $f(x_0) = y_0$
 نقطه $(\frac{x_0}{p}, 1 - y_0)$ روی تابع g است، پس:

$$g(\frac{x_0}{p}) = 1 - y_0 \xrightarrow{y_0 = f(x_0)} g(\frac{x_0}{p}) = 1 - f(x_0) \quad (I)$$

با قراردادن $\frac{x_0}{p} = t$ ، داریم:

$$\frac{x}{p} = t \Rightarrow x = 2t$$

حالا $x_0 = 2t$ را در رابطه (I) قرار می‌دهیم:

$$g(t) = 1 - f(2t)$$

در رابطه آخر به جای تمام t ها، خود x را می‌گذاریم؛ حالا مراحل رسم g از روی f را می‌نویسیم:

۱ به جای X ها، $2X$ می‌گذاریم، پس انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = f(2x)$$

۲ ضابطه را قرینه می‌کنیم، پس نمودار نسبت به محور X ها قرینه می‌شود:

$$y = f(2x) \xrightarrow{f \rightarrow -f} y = -f(2x)$$

۳ در آخر 1 واحد به ضابطه اضافه می‌کنیم، پس نمودار 1 واحد به بالا می‌رود:

$$y = -f(2x) \xrightarrow{f \rightarrow f+1} y = -f(2x) + 1$$

۲۳- **گزینه ۲:** نقطه (x_0, y_0) روی تابع f است، پس: $f(x_0) = y_0$
 نقطه $(\frac{1-x_0}{p}, y_0 + 1)$ روی تابع g است، پس: $g(\frac{1-x_0}{p}) = y_0 + 1$

$$\xrightarrow{y_0 = f(x_0)} g(\frac{1-x_0}{p}) = f(x_0) + 1 \quad (I)$$

با فرض $t = \frac{1-x_0}{p}$ داریم:

$$t = \frac{1-x_0}{p} \Rightarrow x_0 = 1 - 2t$$

تساوی $x_0 = 1 - 2t$ را در (I) قرار می‌دهیم:

$$g(t) = f(1 - 2t) + 1$$

۲۴- **گزینه ۲:** نقطه $(2, 2)$ روی تابع $g(x) = 2f(1 - \frac{x}{p})$ است. می‌خواهیم بینیم این نقطه با چه نقطه‌ای روی تابع $y = f(x)$ نظیر بوده است.

نقطه $(2, 2)$ را روی تابع $y = 2f(1 - \frac{x}{p})$ قرار می‌دهیم:

$$g(x) = 2f(1 - \frac{x}{p}) \xrightarrow{\frac{x}{p}=2} 2 = 2f(1 - \frac{2}{p})$$

$$\Rightarrow 2 = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 1$$

از $f(0) = 1$ می‌فهمیم نقطه $(0, 1)$ روی f بوده است.

۲۵- **گزینه ۲ نکته:** اگر دامنه تابع f مجموعه D_f باشد برای به دست آوردن دامنه تابع $y = af(g(x)) + b$ باید $g(x) \in D_f$ باشد، پس این‌جا $1 - \frac{x}{p} + 1 \in D_f$ باید

$$-1 \leq -\frac{x}{p} + 1 < 2 \xrightarrow{-1} -2 \leq -\frac{x}{p} < 1$$

$$\xrightarrow{x(-2)} 4 \geq x > -2 \Rightarrow D_y = (-2, 4]$$