

(فصل ۴)

مثلثات

- ۲۱۷ درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
- ۲۲۳ درس ۲: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
- ۲۳۳ درس ۳: توابع مثلثاتی
- ۲۳۹ پاسخ تشریحی

(فصل ۵)

توابع نمایی و لگاریتمی

- ۲۵۴ درس ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
- ۲۶۳ درس ۲: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن
- ۲۸۱ درس ۳: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی
- ۲۹۴ پاسخ تشریحی

(فصل ۶)

حد و پیوستگی

- ۳۲۷ درس ۱: فرایندهای حدی_ محاسبه حد
- ۳۳۷ درس ۲: محاسبه حد توابع
- ۳۴۵ درس ۳: پیوستگی
- ۳۵۳ پاسخ تشریحی

(فصل ۷)

آمار و احتمال

- ۳۷۰ درس ۱: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل
- ۳۸۶ درس ۲: آمار توصیفی
- ۳۹۷ پاسخ تشریحی

۴۱۵

پاسخ‌نامه کلیدی

(فصل ۱)

هندسه تحلیلی و جبر

- ۸ درس ۱: هندسه تحلیلی
- ۲۵ درس ۲: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲
- ۴۹ درس ۳: معادلات گویا و معادلات رادیکالی
- ۵۶ پاسخ تشریحی

(فصل ۲)

هندسه

- ۹۸ درس ۱: ترسیم‌های هندسی
- ۱۰۳ درس ۲: استدلال و قضیه تالس
- ۱۱۶ درس ۳: تشابه مثلث‌ها
- ۱۲۵ پاسخ تشریحی

(فصل ۳)

تابع

- ۱۴۵ درس ۱: آشنایی با برخی از انواع تابع
- ۱۶۸ درس ۲: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک
- ۱۷۶ درس ۳: اعمال جبری روی توابع
- ۱۸۹ پاسخ تشریحی

(درس ۱)

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

مقدمات

در سال‌های قبل دیدید آزمایش یا پدیده تصادفی کاری است که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد. مجموعه تمام حالت‌های ممکن برای نتیجه آزمایش را فضای نمونه‌ای نامیدیم و با S نشان دادیم.

به هر زیرمجموعه از S ، یک پیشامد تصادفی گفتیم. پس اگر فضای نمونه‌ای S دارای n عضو باشد، 2^n پیشامد تصادفی دارد. پیشامد $A = \emptyset$ غیرممکن است و پیشامد $A = S$ حتمی یا قطعی است. احتمال پیشامد A همیشه نسبت تعداد اعضای A به تعداد اعضای S بود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

در جدول زیر چند فضای نمونه‌ای را در آزمایش‌های تصادفی ببینید:

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای (تعداد کل حالات)	فضای نمونه‌ای (کل حالات ممکن)	آزمایش تصادفی
$n(S) = 2^1 = 2$	$S = \{پ, ر\}$	پرتاب یک سکه
$n(S) = 2^2 = 4$	$S = \{پ, پ, ر, ر\}$	پرتاب دو سکه
$n(S) = 2^3 = 8$	$S = \left\{ \begin{array}{l} پ, پ, پ, ر, ر, ر, پ, ر \\ ر, ر, ر, پ, پ, پ, ر, ر \end{array} \right\}$	پرتاب ۳ سکه
$n(S) = 6^1 = 6$	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	پرتاب یک تاس
$n(S) = 6^2 = 36$	$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6) \\ \dots, (6,1), \dots, (6,6) \end{array} \right\}$	پرتاب دو تاس
$n(S) = 3! = 6$	$S = \left\{ \begin{array}{l} ABC, BCA, CBA \\ ACB, BAC, CAB \end{array} \right\}$	کنار هم قراردادن سه نفر A, B, C
$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$	$S = \left\{ \begin{array}{l} abc, acd, bcd, cde \\ abd, ace, bce \\ abe, ade, bde \end{array} \right\}$	انتخاب ۳ نفر از بین ۵ نفر e, d, c, b, a
$n(S) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$	$S = \left\{ \begin{array}{l} B_1 B_2, B_1 W_1, B_1 W_2, B_1 W_3 \\ B_2 W_1, B_2 W_2, B_2 W_3, W_1 W_2, W_1 W_3, W_2 W_3 \end{array} \right\}$	انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبه شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه
$n(S) = \frac{3}{5 \times 4 \times 3} \times \frac{4}{5 \times 4 \times 3} = 12$	$S = \left\{ \begin{array}{l} 20, 30, 50 \\ 22, 32, 52 \\ 23, 33, 53 \\ 25, 35, 55 \end{array} \right\}$	ساختن عدد دورقمی با ارقام ۰، ۲، ۳ و ۵ با تکرار

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای (تعداد کل حالات)	فضای نمونه‌ای (کل حالات ممکن)	آزمایش تصادفی
$n(S) = \frac{5}{5 \text{ یا } 4 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \text{ یا } 1} \times \frac{4}{\text{به جز رقم اول}} = 20$	$S = \begin{Bmatrix} 12, 13, 14, 15 \\ 21, 23, 24, 25 \\ 31, 32, 34, 35 \\ 41, 42, 43, 45 \\ 51, 52, 53, 54 \end{Bmatrix}$	عددی دورقمی به تصادف با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌سازیم.
$n(S) = \frac{7}{\text{روز}} \times \frac{32}{\text{حرف}} = 224$	$S = \left\{ \begin{array}{l} (\text{ی، شنبه}) \dots (\text{ب، شنبه}) \dots (\text{الف، شنبه}) \\ \vdots \\ (\text{ی، جمعه}) \dots (\text{ب، جمعه}) \dots (\text{الف، جمعه}) \end{array} \right\}$	روز تولد یک نفر در هفته و حرف اول نام او

تست در پرتاب دو تاس با هم چقدر احتمال دارد مجموع ارقام روشده ۴ یا ۹ باشد؟

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{13}{36}$ (۲) $\frac{7}{36}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴)

پاسخ گزینه ۳ فضای نمونه‌ای در پرتاب دو تاس $S = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ است که $6^2 = 36$ عضو دارد. حالت‌های مطلوب عبارت‌اند از:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{مجموع ۴} \\ (1, 3) \\ (3, 1) \\ (2, 2) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{مجموع ۹} \\ (4, 5) \\ (5, 4) \\ (6, 3) \\ (3, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 3 + 4 = 7$$

احتمال برابر است با: $P(A) = \frac{7}{36}$

تست یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال دو پسر و دو دختر دارند؟

$\frac{3}{8}$ (۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ گزینه ۳ فضای نمونه‌ای برای جنسیت ۴ فرزند دارای $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ عضو است. پس $n(S) = 16$. بیش‌امد مطلوب ما، اعضایی به شکل پپ‌دد است که دو پسر و دو دختر دارند. تعداد این اعضا برابر است با:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

پس داریم:

تذکره در میان n فرزند اگر k پسر (یا k دختر) باشند، تعداد حالت‌ها برابر $\binom{n}{k}$ است.

تست در کیفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز هست. سه مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دقیقاً یک سفید و حداقل یک قرمز خارج می‌شود؟

$\frac{3}{11}$ (۱) $\frac{3}{22}$ (۲) $\frac{18}{55}$ (۴) $\frac{18}{33}$ (۳)

پاسخ گزینه ۳ تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220$ تعداد انتخاب‌های ۳ تا از ۱۲ مهره

تذکره برای محاسبه $\binom{n}{r}$ باید $n!$ را به تعداد $r!$ باز کنیم، سپس در مخرج هم $r!$ را باز کرده و ساده می‌کنیم. ببینید:

$$\binom{10}{4} \xrightarrow{\text{در صورت } 10! \text{ را } 4! \text{ باز می‌کنیم و در مخرج } 4! \text{ را باز می‌کنیم.}} \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

چهار تا

اعمال روی پیشامدها

الف) متمم پیشامد A را با A' یا A^c نشان می‌دهیم؛ رخ دادن A' یعنی رخ ندادن A به بیان ریاضی داریم:

$$A' = S - A \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

$$A' \cup A = S \quad \text{و} \quad A' \cap A = \emptyset$$

و نیاز به یادآوری نیست که $\emptyset' = S$ و $S' = \emptyset$. هم‌چنین:



ب) پیشامدی که A و B هر دو با هم رخ بدهند (یعنی هم A و هم B) را $A \cap B$ می‌نامیم.

اگر A و B اشتراک داشته باشند می‌گوییم با هم سازگارند و اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، یعنی A و B اشتراک نداشته باشند (نتوانند با هم رخ بدهند) می‌گوییم A و B ناسازگارند.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$$

پس ناسازگار یعنی:



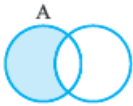
پ) پیشامدی که در آن A یا B یا هر دو (یعنی حداقل یکی از آنها) رخ دهند را $A \cup B$ می‌نامیم. فرمول

احتمال $A \cup B$ را به یاد داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

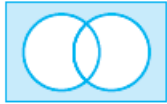
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

که در حالت ناسازگار این‌طور می‌شد:



ت) پیشامدی که در آن فقط A رخ دهد یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد را به صورت $A \cap B'$ یا $A - B$

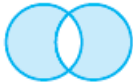
نشان می‌دهیم. فرمول احتمالش به صورت $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ بود.



ث) پیشامدی که در آن نه A و نه B یعنی هیچ‌کدام از آنها رخ ندهند به صورت $A' \cap B'$ بیان می‌شود

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

که برای احتمالش می‌نویسیم:



ج) راستی پیشامدی که در آن فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند (A یا B و نه هر دو) به صورت

$$(B - A) \cup (A - B) \quad \text{یا} \quad (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{قابل بیان است.}$$

و بد نیست همین‌جا یادآوری کنیم که:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B', \quad B - A = B \cap A'$$

تست اگر $P(A) = \frac{1}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ، چه قدر احتمال دارد فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند؟

$$\frac{7}{30} \quad (4)$$

$$\frac{1}{30} \quad (3)$$

$$\frac{7}{15} \quad (2)$$

$$\frac{14}{15} \quad (1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

پاسخ گزینه ۳ اول $P(A \cap B)$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{30}$$

حالا خواسته سؤال $P(A - B) + P(B - A)$ یا $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ است:



$$P(\text{فقط یکی}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{15-1}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

تست در پرتاب دو تاس با هم چه قدر احتمال دارد ضرب ارقام بیشتر از ۱۵ یا هر دو تاس زوج باشند؟

$$\frac{4}{9} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{17}{36} \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۳ این پیشامد از اجتماع پیشامدهای ضرب بیشتر از ۱۵ و هر دو زوج ساخته شده است.

شماره تاس اول

$$A = \{36, 44, 45, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66\} \Rightarrow n(A) = 11$$

شماره تاس دوم

$$B = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\} \Rightarrow n(B) = 9$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(\{44, 46, 64, 66\}) = 4$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{11+9-4}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

تست اگر احتمال رخ ندادن پیشامد B برابر $\frac{3}{4}$ و احتمال رخ ندادن هیچ یک از دو پیشامد A و B برابر $\frac{1}{10}$ باشد، چه قدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد؟

$$\frac{9}{20} \quad (۴)$$

$$\frac{17}{20} \quad (۳)$$

$$\frac{13}{20} \quad (۲)$$

$$\frac{11}{20} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۲: صورت سؤال می‌گوید $P(B') = \frac{3}{4}$ و $P(A' \cap B') = \frac{1}{10}$ پس داریم:

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

حالا فرمول $P(A \cup B)$ را ببینید:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{9}{10} = P(A) + \frac{1}{4} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{\text{این } P(A-B) \text{ است (فقط } A \text{ رخ دهد)}} = \frac{9}{10} - \frac{1}{4} = \frac{18-5}{20} = \frac{13}{20} \Rightarrow P(A-B) = \frac{13}{20}$$

تست اگر $P(A \cap B) = 0/1$ و $P(A) = 0/2$ باشد، احتمال رخ دادن A' یا B یا هر دوی آن‌ها کدام است؟

$$0/9 \quad (۴)$$

$$0/7 \quad (۳)$$

$$0/4 \quad (۲)$$

$$0/2 \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۲: سؤال از ما $P(A' \cup B)$ را می‌خواهد. با استفاده از مکمل داریم:

$$P(A' \cup B) = 1 - P(A \cap B') = 1 - P(A - B) = 1 - (P(A) - P(A \cap B)) = 1 - (0/2 - 0/1) = 1 - 0/1 = 0/9$$

توضیح مکمل $A' \cup B$ به صورت $A \cap B'$ است.

احتمال شرطی



کل حالت‌ها = S

مطلوب = A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

کل حالت‌ها = B

مطلوب = $A \cap B$

$$P(A) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

البته باید برای خواننده بنویسیم که احتمال پیشامد A در قسمت (ب)، با فرض رخ دادن B است؛ این‌طوری می‌نویسیم: $P(A|B)$ و می‌خوانیم:

احتمال A به شرط B .

مثلاً در پرتاب تاس، احتمال ۴ آمدن برابر $\frac{1}{6}$ است. $P(\{4\}) = \frac{1}{6}$ است. حالا اگر بدانیم که تاس زوج آمده است، احتمال ۴ آمدن می‌شود:

$$P(\{4\} | \text{زوج}) = \frac{1}{3}$$

دقت می‌کنید که فضای نمونه‌ای جدید $S = \{2, 4, 6\}$ است.

دو روش برای محاسبه احتمال شرطی داریم.

روش محدود کردن فضای نمونه‌ای

در این روش، صورت سؤال باید به ما آزمایش را بدهد؛ یعنی باید بدانیم مسئله درباره چه آزمایش و چه پیشامدهایی است. شرط صورت سؤال

فضای نمونه‌ای را محدود می‌کند و ما احتمال را در فضای جدید حساب می‌کنیم. ببینید:

تست از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سبز و ۶ مهره آبی یک مهره بیرون می‌آوریم. اگر این مهره سبز نباشد با کدام احتمال

سفید است؟

$$\frac{4}{15} \quad (1)$$

$$\frac{2}{7} \quad (2)$$

$$\frac{4}{10} \quad (3)$$

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۱

سؤال از ما (سبز نیست | سفید است) P را می‌خواهد. ببینید:

۴ سفید
۵ سبز
۶ آبی

۴ سفید
۶ آبی

$$n(S) = 15 \xrightarrow{\text{می‌دانیم سبز نیست}} n(S) = 10 \Rightarrow P(\text{سفید است} | \text{سبز نیست}) = \frac{4}{10}$$

تست تاسی را دو بار می‌اندازیم. اگر جمع ارقام روشده ۸ باشد با کدام احتمال هر دو رقم ظاهر شده اول هستند؟

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۲

شرط: جمع ۸ است. $S = \{۳۵, ۵۳, ۲۶, ۴۴, ۶۲\}$ پرتاب دو تاس $n(S) = ۳۶$

$$n(S) = ۵ \rightarrow P(\text{جمع ۸ باشد} | \text{هر دو اول}) = \frac{2}{5}$$

تست از میان اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ دو تا را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع این دو عدد زوج باشد، با کدام احتمال

هر دو فرد هستند؟

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۳

انتخاب ۲ تا از این ۹ عدد دارای $\binom{9}{2} = ۳۶$ حالت است. اما فقط حالت‌هایی مورد نظر هستند که مجموع دو عدد زوج باشد یعنی هر دو زوج یا هر دو فرد باشند:

$$n(S) = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = ۶ + ۱۰ = ۱۶$$

محدود شده

دو تا از بین ۸، ۶، ۴، ۲

دو تا از بین ۹، ۷، ۵، ۳، ۱

حالا در این فضای نمونه‌ای محدود شده، خواسته سؤال این است که هر دو فرد باشند:

$$n(A) = \binom{5}{2} = ۱۰$$

$$P(\text{مجموع زوج} | \text{هر دو فرد}) = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

و داریم:

تست توزیع کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر است. اگر یک کارمند از این اداره انتخاب شده و فوق لیسانس نداشته باشد، با کدام

احتمال مرد است؟

$$۰/۵۲ \quad (1)$$

$$۰/۵۴ \quad (2)$$

$$۰/۵۶ \quad (3)$$

$$۰/۵۸ \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۳

فضای نمونه‌ای محدود شده به صورت زیر است.

	فوق لیسانس	لیسانس	دیپلم
مرد	۸	۱۲	۱۷
زن	۲	۱۶	۵

قسمت فوق لیسانس را خط زدیم، چون پیش فرض این است که شخص فوق لیسانس ندارد.

$$P(\text{مرد} | \text{فوق لیسانس ندارد}) = \frac{n(\text{مرد})}{n(\text{فوق لیسانس ندارد})} = \frac{۱۷+۱۲}{۱۷+۵+۱۲+۱۶} = \frac{۲۹}{۵۰} = ۰/۵۸$$

حالا احتمال مرد بودن:

استفاده از فرمول احتمال شرطی

اگر در صورت سؤال ندانیم فضای نمونه‌ای و پیشامد چه عضوایی دارند و نتوانیم اثر رخ دادن B و محدود شدن S را درک کنیم، باید مقادیر

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال را داشته باشیم. آن وقت:

یعنی احتمال شرطی برابر است با تقسیم احتمال اشتراک بر احتمال پیشامد اول (فرض مسئله).

$$\frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$$

پس مثلاً $P(A'|B')$ برابر است با (احتمال رخ دادن A' به شرط رخ دادن B'):

مثال اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ ، مقدار $P(B|A)$ کدام است؟

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

پاسخ

تست احتمال این که زنی بارداری طبیعی و زایمان طبیعی داشته باشد 0.4 است. در میان زنان یک شهر احتمال بارداری طبیعی $\frac{3}{4}$

است. اگر یک زن، بارداری طبیعی داشته باشد با کدام احتمال زایمان طبیعی خواهد داشت؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{8}{15}$ (۳)

$\frac{8}{10}$ (۲)

$\frac{3}{10}$ (۱)

پاسخ گزینه ۳

$$P(\text{بارداری طبیعی} | \text{زایمان طبیعی}) = \frac{P(\text{بارداری و زایمان طبیعی})}{P(\text{بارداری طبیعی})} = \frac{0.4}{\frac{3}{4}} = \frac{1.6}{3} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

تست در یک کشور ۴۰ درصد سالمندان ناراحتی کلیوی و ۳۰ درصد آن‌ها بیماری خونی دارند. اگر سالمندی به عارضه خونی مبتلا

شود، احتمال بروز ناراحتی کلیوی ۶۰ درصد است. با کدام احتمال یکی از سالمندان این کشور به حداقل یکی از این دو مبتلا است؟

0.52 (۴)

0.58 (۳)

0.6 (۲)

0.7 (۱)

پاسخ گزینه ۳ حداقل یکی، یعنی $A \cup B$ و سؤال به ما این‌ها را گفته: $P(A) = 0.4$ ، $P(B) = 0.3$ ، $P(A|B) = 0.6$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.6 = \frac{P(A \cap B)}{0.3} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.18$$

اول به فرمول شرطی نگاه کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.18 = 0.52$$

حالا داریم:

در مثال بالا دیدیم که با داشتن $P(B)$ و $P(A|B)$ می‌توان $P(A \cap B)$ را به دست آورد. دوباره ببینید: $P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$

این رابطه را قاعده ضرب احتمال می‌نامند و زمانی به کار می‌رود که یک عمل در چند مرحله پشت سر هم انجام می‌شود.

در واقع قاعده ضرب احتمال، یک توقف می‌دهد تا سهم یک پیشامد را در دو مرحله حساب کنیم. یعنی به جای این که از اول کار، $A \cap B$ را

بخواهیم می‌گوییم اول A انجام شود (این می‌شود $P(A)$)؛ حالا در شرایطی که A انجام شده می‌خواهیم مرحله دوم یعنی B انجام شود (این

می‌شود $P(B|A)$). مثلاً دانشجویان دانشگاهی به نسبت ۲ به ۳ پسر و دخترند؛ پس احتمال دختر بودن یک دانشجو می‌شود $P(\text{دختر}) = \frac{3}{5}$.

حالا می‌دانیم احتمال خوابگاهی بودن در دختران ۲۰ درصد است؛ پس $P(\text{دختر} | \text{خوابگاهی}) = \frac{20}{100}$ و می‌توانیم احتمال دختر و خوابگاهی را به

دست آوریم:

$$P(\text{دختر} \cap \text{خوابگاهی}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر} | \text{خوابگاهی}) = \frac{3}{5} \times \frac{20}{100} = \frac{3}{25} = 0.12$$

سهم دختران
از کل دانشجویان
(مرحله اول)

سهم خوابگاهی
از دختران
(مرحله دوم)

تست شاگرد اول مدرسه سمپاد با احتمال $0/6$ در کنکور سراسری یک‌رقمی می‌شود. احتمال این که علی شاگرد اول سمپاد شود $0/8$ است. با کدام احتمال علی هم شاگرد اول می‌شود و هم در کنکور یک‌رقمی می‌شود؟

$0/48$ (۱) $0/12$ (۲) $0/32$ (۳) $0/8$ (۴)

$P(\text{شاگرد اول} \cap \text{تک‌رقمی}) = P(\text{شاگرد اول}) \times P(\text{تک‌رقمی}) = 0/8 \times 0/6 = 0/48$

پاسخ گزینه ۱

یک مثال دیگر هم از ترکیب فرمول شرطی و قوانین احتمال ببینید:

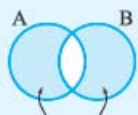
تست اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ و بدانیم فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ داده، با کدام احتمال آن پیشامد A است؟

$\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴)

سؤال از ما $P(A | (A-B) \cup (B-A))$ را می‌خواهد. فرمول شرطی را بنویسیم:

پاسخ گزینه ۲

$$P(A | (A-B) \cup (B-A)) = \frac{P(A \cap [(A-B) \cup (B-A)])}{P((A-B) \cup (B-A))}$$
 فقط یکی رخ دهد.



$(A-B) \cup (B-A)$

نگاهی به نمودار ون کنید:

اشتراک A و «فقط یکی رخ دهد»، ناحیه $A-B$ است، پس داریم:

خواسته سؤال $= \frac{P(A-B)}{P((A-B) \cup (B-A))} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}$

با اعداد $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ مقدار $P(A \cap B)$ می‌شود $\frac{2}{12}$ و داریم:

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

پیشامدهای مستقل

دیدیم که پیش‌فرض رخ دادن B احتمال A را تغییر می‌دهد.

حالا اگر وقوع یا عدم وقوع B بر احتمال وقوع A اثری نگذارد، می‌گوییم A از B مستقل است. به بیان ریاضی اگر $P(A) = P(A | B) = P(A | B')$ باشد (یعنی رخ دادن یا رخ ندادن B اثری بر احتمال A ندارد)، با نوشتن فرمول شرطی داریم:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

یعنی A وقتی از B مستقل است که احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل‌ضرب احتمالشان باشد. از تقارن این شرط نسبت به A و B نتیجه می‌گیریم که وقتی A از B مستقل باشد، B نیز از A مستقل است، پس عبارات زیر معادل‌اند:

$$P(A | B) = P(A | B') = P(A) \iff A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند} \iff P(B | A) = P(B | A') = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

و شرط همه آن‌ها این است که:

حالا چه پیشامدهایی از هم مستقل‌اند؟ هر جا پیشامدها دارای منشأهای مختلف باشند از هم مستقل‌اند. مثلاً سکه و تاس؛ سکه اول و سکه دوم؛ فرزندان مختلف؛ پرتاب‌های مختلف یک تاس؛ قهرمانی دو تیم مختلف در دو لیگ مختلف (دقت می‌کنید که قهرمانی دو تیم A و B در یک لیگ، با هم ناسازگار است)؛ البته بعضی وقت‌ها مستقل بودن دو پیشامد به سادگی و به طور شهودی معلوم نیست. پس حتماً باید شرط

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

را کنترل کنیم یا این که ببینیم $P(A | B)$ با $P(A)$ مساوی هست؟

از مستقل بودن A و B نتیجه می‌شود متمم‌های آن‌ها نیز مستقل‌اند یعنی A' و B' و هم‌چنین A' و B' مستقل هستند.

پس داریم:

$$\begin{cases} P(A' \cap B) = P(A')P(B) \\ P(A|B) = P(A) = P(A|B') \Leftrightarrow P(A'|B) = P(A') \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A' \cap B') = P(A')P(B') \end{cases}$$

پس از مستقل بودن، سه نتیجه می‌گیریم:

۱) نتیجه A بر احتمال B اثر ندارد. ۲) احتمال اشتراک آن‌ها برابر ضرب احتمال‌ها است. ۳) احتمال شرطی برابر احتمال اولی است.

تست در پرتاب یک سکه و یک تاس با هم چه قدر احتمال دارد سکه رو و تاس مضرب ۳ باشد؟

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad \frac{1}{12} \quad (2) \quad \frac{1}{8} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۲ سکه و تاس مستقل هستند. احتمال روشن شدن سکه $\frac{1}{2}$ و احتمال مضرب ۳ در تاس برابر $\frac{1}{3}$ است و چون از هم

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

مستقل‌اند:

برای بیش از دو پیشامد هم با فرض مستقل بودن تمام آن‌ها از هم، می‌توانیم از نتایج بالا استفاده کنیم. یعنی احتمال اشتراک برابر ضرب

احتمال‌های آن‌ها است.

تست شانس برد تیم فوتبال ایران مقابل کره $\frac{1}{8}$ است. با کدام احتمال تاس ۴ می‌آید، سکه رو ظاهر می‌شود و ایران کره را می‌برد؟

$$\frac{1}{8} \quad (1) \quad \frac{1}{24} \quad (2) \quad \frac{1}{15} \quad (3) \quad \frac{1}{20} \quad (4)$$

$$P(\text{برد ایران} \cap \text{سکه رو} \cap \text{تاس ۴}) = P(\text{برد ایران}) \times P(\text{سکه رو}) \times P(\text{تاس ۴}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{120}$$

پاسخ گزینه ۲

تست در پرتاب دو تاس در بین پیشامدهای

A: جمع ارقام دو تاس ۷ باشد. B: جمع ارقام دو تاس ۹ باشد. C: تاس اول ۱ باشد.

کدام دو پیشامد مستقل‌اند؟

$$C, A \quad (1) \quad B, A \quad (2) \quad C, B \quad (3) \quad \text{هیچ کدام} \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۲ احتمال هر کدام و احتمال اشتراک‌ها را به دست می‌آوریم:

$$A = \{16, 15, 14, 13, 12, 11\} \quad B = \{36, 63, 45, 54\} \quad C = \{16, 15, 14, 13, 12, 11\}$$

$$P(A) = P(\text{مجموع ۷}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(B) = P(\text{مجموع ۹}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(C) = P(\text{اولی ۱}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

اما A و B و هم‌چنین B و C اشتراک ندارند؛ پس A با B و A با C ناسازگار است. برویم سراغ A و C :

$$A \cap C = \{16\} \quad P(A \cap C) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

می‌بینید که تساوی شرط مستقل بودن برقرار است. پس A و C مستقل‌اند.

راه دوم احتمال شرطی را حساب کنیم:

$$P(A|C) = P(\text{اولی ۱} | \text{مجموع ۷}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A|C) = P(A) \Rightarrow P(A|C) = \frac{1}{6}$$

می‌بینیم که $P(A|C)$ با $P(A)$ مساوی شد. پس A و C مستقل‌اند.

پس وقتی دو پیشامد A و B مستقل هستند این روابط را داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad P(A|B) = P(A|B') = P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$P(A - B) = P(A)P(B') = P(A) - P(A)P(B)$$

$$P(B - A) = P(B)P(A') = P(B) - P(A)P(B)$$

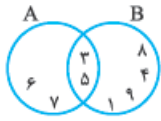
$$P(A|B) + P(A'|B) = 1$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

احتمال شرطی شهودی

۳۷۹

آمار و احتمال



$\frac{1}{4}$ (۴)

۱- در فضای نمونه‌ای S دو پیشامد A و B نشان داده شده‌اند. مقدار $P(A|B)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۲- در سؤال بالا مقدار $P(A-B|A)$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

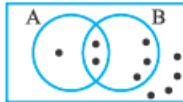
۳- هر نقطه بیانگر عضوی متمایز است. اگر A رخ ندهد با کدام احتمال B رخ می‌دهد؟

$\frac{3}{7}$ (۲)

$\frac{4}{7}$ (۱)

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)



۴- از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه، مهره‌ها را یکی یکی بیرون می‌آوریم. اگر مهره اول سفید باشد با کدام احتمال مهره دوم نیز سفید است؟

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{4}{9}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

۵- واحدهای یک مجتمع ۲۵ هستند که یکی مسکونی، ۱۷ تا تجاری و ۱۹ تا اداری هستند. با کدام احتمال یک واحد غیراداری، تجاری است؟

$\frac{7}{8}$ (۴)

$\frac{6}{7}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{5}{6}$ (۱)

۶- در بین ۴۲ دانش‌آموز یک کلاس، ۲۳ نفر دوره اقتصاد و ۲۰ نفر دوره حقوق و ۴ نفر در هیچ دوره‌ای ثبت‌نام نکرده‌اند. یک نفر از این کلاس انتخاب می‌کنیم. اگر در دوره حقوق ثبت نام کرده باشد با کدام احتمال در اقتصاد ثبت‌نام کرده است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{2}{11}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{3}{11}$ (۱)

• دانش‌آموزان یک مدرسه در جدول مقابل دسته‌بندی شده‌اند.

	دوم	سوم
تجربی	۱۸	۱۰
ریاضی	۱۲	۱۵

۷- احتمال تجربی بودن یک دانش‌آموز با فرض سال سومی بودن او چه قدر است؟

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

۸- یک دانش‌آموز ریاضی با کدام احتمال سال دومی است؟

$\frac{4}{9}$ (۴)

$\frac{9}{14}$ (۳)

$\frac{5}{11}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

۹- فرض ریاضی بودن، احتمال «سال سومی بودن» را تقریباً چه قدر تغییر می‌دهد؟

$0/4$ (۴)

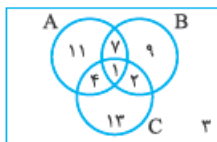
$0/3$ (۳)

$0/2$ (۲)

$0/1$ (۱)

• ۵۰ نفر پرسنل خیلی خیلی سبز در طبقه دوم، در صبحانه انتخاب‌های مقابل را داشته‌اند:

A: شیر B: چای C: قهوه



۱۰- اگر یکی از پرسنل چای خورده باشد، با کدام احتمال قهوه هم خورده است؟

$\frac{3}{19}$ (۲)

$\frac{2}{19}$ (۱)

$\frac{3}{16}$ (۴)

$\frac{2}{9}$ (۳)

۱۱- اگر یکی از پرسنل شیر نخورده باشد، با کدام احتمال چای هم نخورده است؟

$\frac{14}{25}$ (۴)

$\frac{16}{27}$ (۳)

$\frac{13}{24}$ (۲)

$\frac{4}{7}$ (۱)

افزایش	ثابت	کاهش	تعداد شعب
۶	۵	۴	۱-۴
۸	۲	۱	۵-۹
۹	۷	۳	۱۰-۱۵

• در بررسی فروشگاه‌های زنجیره‌ای در سال قبل، تعداد کارمندان کنترل شده‌اند. به سؤالات «۱۲» تا «۱۴» پاسخ دهید.

۱۲- اگر یک فروشگاه دارای ۵ تا ۹ شعبه باشد، با کدام احتمال افزایش تعداد کارمندان داشته است؟

- (۱) $\frac{8}{11}$ (۲) $\frac{8}{1}$ / ۰
 (۳) $\frac{8}{23}$ (۴) $\frac{3}{0}$ / ۰

۱۳- اگر در یک فروشگاه تعداد کارمندان ثابت مانده باشد، با کدام احتمال بیش از ۹ شعبه داشته است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{11}$ (۴) $\frac{2}{9}$

۱۴- با کدام احتمال یک فروشگاه انتخابی، کاهش تعداد کارمندان داشته است؟

- (۱) $\frac{7}{45}$ (۲) $\frac{7}{46}$ (۳) $\frac{8}{45}$ (۴) $\frac{4}{23}$

۱۵- شش کارت قرمز و شش کارت آبی با شماره‌های ۱ تا ۶ داریم. اگر مجموع شماره‌های دو کارت انتخابی ۷ باشد، با کدام احتمال دو کارت هم‌رنگ هستند؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۶- از میان کارت‌های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ سه کارت به تصادف برمی‌داریم. اگر جمع شماره‌های این ۳ کارت فرد باشد، با کدام احتمال هر سه فرد هستند؟

- (۱) $\frac{4}{19}$ (۲) $\frac{1}{19}$ (۳) $\frac{3}{19}$ (۴) $\frac{2}{19}$

۱۷- در سؤال قبل اگر ضرب شماره‌های سه کارت انتخابی زوج باشد، با کدام احتمال جمع آن‌ها زوج است؟

- (۱) $\frac{6}{17}$ (۲) $\frac{7}{17}$ (۳) $\frac{8}{17}$ (۴) $\frac{5}{17}$

۱۸- از بین ۴ داوطلب ریاضی و ۶ داوطلب تجربی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. اگر در بین افراد انتخابی داوطلب رشته ریاضی باشد، با کدام احتمال فقط یک داوطلب ریاضی انتخاب شده است؟

- (۱) $\frac{0}{15}$ (۲) $\frac{0}{4}$ (۳) $\frac{0}{6}$ (۴) $\frac{0}{45}$

۱۹- در کیسه‌ای ۵ جفت کفش داریم. ۴ لنگه بیرون می‌آوریم. اگر در بین آن‌ها حداقل یک جفت باشد، با کدام احتمال فقط یک جفت هست؟

- (۱) $\frac{11}{13}$ (۲) $\frac{11}{13}$ (۳) $\frac{2}{13}$ (۴) $\frac{12}{13}$

۲۰- خانواده‌ای ۲ فرزند دارند. اگر فرزند بزرگ‌تر دختر باشد، با کدام احتمال هر دو دختر هستند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۱- خانواده‌ای ۲ فرزند دارند. اگر بدانیم یک فرزند آن‌ها دختر است با کدام احتمال فرزند دیگر هم دختر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۲- در پرتاب سه سکه با هم می‌دانیم حداقل یکی رو ظاهر شده است. با کدام احتمال فقط یک رو ظاهر شده است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{7}$

۲۳- خانواده‌ای با ۳ فرزند حداقل ۲ دختر دارند. با کدام احتمال فقط یک پسر دارند؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{7}$

۲۴- در میان ۴ فرزند یک خانواده می‌دانیم حداقل ۲ پسر وجود دارد. با کدام احتمال فرزند اول پسر است و فقط یک برادر دارد؟

- (۱) $\frac{3}{10}$ (۲) $\frac{3}{11}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{11}$

۲۵- سکه‌ای را ۴ بار انداخته‌ایم. اگر ببینیم پرتاب اول «رو» است، با کدام احتمال حداقل دو تا «رو» و حداقل یک «پشت» داریم؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۲۶- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر فرزند اول و آخر هم‌جنس باشند، با کدام احتمال تعداد دخترها بیشتر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۲۷- خانواده‌ای با ۵ فرزند، هم پسر و هم دختر دارند. با کدام احتمال دقیقاً ۲ پسر دارند؟

$$\frac{2}{5} \text{ (۱)} \quad \frac{5}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

۲۸- اگر ضرب ارقام روبرو شده در پرتاب ۲ تاس، ۱۲ باشد با کدام احتمال جمع آن‌ها ۷ است؟

$$1 \text{ (۱)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۴)}$$

۲۹- اگر جمع ارقام دو تاس ۷ باشد، با کدام احتمال ضرب ارقام ۱۲ است؟

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

۳۰- تاسی را دو بار می‌اندازیم. اگر عدد بار دوم کم‌تر از عدد بار اول باشد، با کدام احتمال حاصل ضرب دو رقم ظاهر شده فرد است؟

$$\frac{1}{5} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{5} \text{ (۴)}$$

۳۱- در پرتاب دو تاس اگر حداقل یکی ۲ باشد، با کدام احتمال رقم ۳ دیده می‌شود؟

$$\frac{1}{6} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{11} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{11} \text{ (۴)}$$

۳۲- در پرتاب دو تاس با کدام شرط، احتمال روشن شدن دو عدد فرد به ۶۰ درصد می‌رسد؟

$$(۱) \text{ مجموع ۷ باشد.} \quad (۲) \text{ اختلاف ۲ باشد.} \quad (۳) \text{ هر دو مضرب ۳ باشند.} \quad (۴) \text{ مجموع ۶ باشد.}$$

۳۳- در پرتاب دو تاس با هم اگر مجموع ارقام مضرب ۳ باشد، با کدام احتمال هیچ‌یک از اعداد مضرب ۳ نیستند؟

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{9} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

۳۴- در پرتاب دو تاس با هم، A پیشامد روشن شدن دو عدد مضرب ۳ است. $P(A | B)$ با کدام انتخاب برای پیشامد B از بقیه کم‌تر است؟

$$(۱) \text{ مجموع ۹ باشد.} \quad (۲) \text{ مجموع بیشتر از ۸ باشد.} \quad (۳) \text{ دو عدد یکسان باشند.} \quad (۴) \text{ تفاضل ارقام ۴ باشد.}$$

۳۵- اگر بدانیم جمع ارقام روبرو شده در پرتاب ۲ تاس عددی اول است، با کدام احتمال اختلاف ارقام زوج است؟

$$\frac{1}{11} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{11} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{15} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{15} \text{ (۴)}$$

۳۶- در پرتاب سه تاس اگر جمع ارقام روبرو شده ۱۵ باشد، با کدام احتمال حداقل یک رقم تکراری در بین برآمدها وجود دارد؟

$$0/4 \text{ (۱)} \quad 0/5 \text{ (۲)} \quad 0/6 \text{ (۳)} \quad 0/7 \text{ (۴)}$$

۳۷- هیچ‌یک از ارقام روبرو شده در پرتاب ۳ تاس مضرب ۳ نیستند. با کدام احتمال هر سه رقم روبرو شده فرد هستند؟

$$\frac{1}{6} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{9}{64} \text{ (۳)} \quad \frac{8}{27} \text{ (۴)}$$

۳۸- اگر ارقام سه تاس متمایز باشند، با کدام احتمال اعداد متوالی ظاهر شده‌اند؟

$$\frac{1}{120} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{20} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{30} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{5} \text{ (۴)}$$

۳۹- در پرتاب ۳ تاس، هر سه رقم روبرو شده بیشتر از ۲ هستند. با کدام احتمال سه رقم مختلف ظاهر شده است؟

$$\frac{3}{16} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{12} \text{ (۴)}$$

۴۰- A، B، C، D و E در محلی سخنرانی می‌کنند. اگر سخنرانی A و B پشت سر هم نباشد، با کدام احتمال فقط دو نفر بین A و B هستند؟

$$\frac{1}{6} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

۴۱- ۳ زن و ۴ مرد در یک ردیف قرار می‌گیرند. اگر زن‌ها کنار هم باشند، با کدام احتمال مردها نیز کنار هم هستند؟

$$0/5 \text{ (۱)} \quad 0/4 \text{ (۲)} \quad 0/3 \text{ (۳)} \quad 0/6 \text{ (۴)}$$

فرمول احتمال شرطی

۴۲- اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{2}{5}$ و احتمال رخ دادن حداقل یکی از آن‌ها $\frac{1}{4}$ باشد، $P(A | B)$ چه قدر کم‌تر از $P(B | A)$ است؟

$$\frac{7}{30} \text{ (۱)} \quad \frac{7}{24} \text{ (۲)} \quad \frac{7}{36} \text{ (۳)} \quad \frac{7}{60} \text{ (۴)}$$

۴۳- A و B دو پیشامد هم‌شانس از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A | B) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(A | B')$ کدام است؟

$$\frac{3}{10} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{8} \text{ (۴)}$$

۴۴- اگر $P(A|B) = \frac{1}{4}$ و $P(B|A) = \frac{1}{5}$ و جمع احتمال‌های دو پیشامد A و B برابر ۱ باشد، مقدار $P(A|B')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۴۵- اگر $P(A \cup B) = 0.87$ و $P(B|A) = 3P(A|B) = 0.3$ ، آن‌گاه با کدام احتمال هم A و هم B رخ می‌دهند؟

- (۱) ۱ درصد (۲) ۴ درصد (۳) ۲ درصد (۴) ۳ درصد

۴۶- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A|B) = \frac{1}{5}$ ، حاصل $P(B' - A')$ کدام است؟

- (۱) 0.43 (۲) 0.4 (۳) 0.5 (۴) 0.2

۴۷- اگر $P(A|B) = \frac{12}{25}$ ، حاصل $P(A'|B)$ کدام است؟

- (۱) 0.48 (۲) 0.26 (۳) 0.52 (۴) 0.62

۴۸- اگر $P(A) = 0.2$ و $P(B) = 0.3$ و $P(A|B) = 0.4$ ، مقدار $P(B|A)$ کدام است؟

- (۱) 0.8 (۲) 0.6 (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) 0.75

۴۹- اگر $P(A \cup B) = 0.74$ و $P(B) = 0.35$ و بدانیم B رخ نداده است، با کدام احتمال A نیز رخ نمی‌دهد؟

- (۱) $\frac{35}{74}$ (۲) $\frac{65}{74}$ (۳) $\frac{26}{35}$ (۴) $\frac{2}{5}$

پیشامدهای مستقل

۵۰- دو پیشامد مستقل A و B به ترتیب ۲ و ۵ عضو دارند و اجتماع آن‌ها دارای ۶ عضو است. فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۳ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۵۱- اگر پیشامد A از خودش مستقل باشد، کدام نتیجه درست است؟

- (۱) A حتماً غیرممکن است.
(۲) A حتماً خود فضای نمونه‌ای است.
(۳) احتمال A ، عددی صحیح است.
(۴) $P(A) < \frac{1}{4}$

۵۲- کدام جمله زیر همواره درست است؟

- (الف) هر پیشامد از \emptyset مستقل است.
(ب) هر پیشامد از S مستقل است.
(۱) هر دو (۲) فقط (الف) (۳) فقط (ب) (۴) هیچ‌کدام

۵۳- در دو پرتاب یک سکه، A پیشامد شیربودن اولی، B پیشامد شیربودن دومی و C پیشامد یکسان‌بودن دو پرتاب است. چندتا گزاره درست‌اند؟

- (الف) A و B مستقل‌اند.
(ب) A و C مستقل‌اند.
(پ) B و C مستقل‌اند.
(ت) A ، B و C مستقل‌اند.
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۴- در کدام حالت، دو پیشامد A و B مستقل‌اند؟

- (۱) $P(A \cup B) = 0.75$ و $P(B) = 0.5$ ، $P(A) = 0.4$
(۲) $P(A|B) = 0.5$ و $P(A) = 0.4$
(۳) $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B') = \frac{1}{6}$ ، $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$
(۴) $P(A|B) > P(A|B')$

۵۵- در پرتاب دو تاس با هم A پیشامد مجموع ۷ و B پیشامد این است که اولی ۴ باشد. اگر C به صورت «دومی ۳ باشد» تعریف شود، چند گزاره درست هستند؟

- (الف) A و B مستقل‌اند.
(ب) A و C مستقل‌اند.
(پ) B و C مستقل‌اند.
(ت) A و $B \cap C$ مستقل‌اند.
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۶- در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را داریم:

- A : تاس اول ۴ باشد.
 B : اختلاف دو رقم روشده k باشد.

به ازای کدام مقدار k این دو پیشامد مستقل‌اند؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۵۷- در پرتاب دو تاس پیشامدهای «تاس اول ۲ باشد» و «اختلاف دو رقم ۳ باشد» چگونه‌اند؟

- (۱) مستقل (۲) ناسازگار (۳) فقط وابسته (۴) یکی زیرمجموعه دیگری

۵۸- در پرتاب ۶ سکه، A پیشامد رخ دادن فقط ۳ رو و B پیشامد رو بودن سکه اول است. کدام گزاره درست است؟

- (۱) A و B ناسازگارند. (۲) $B \subset A$ (۳) $A \subset B$ (۴) A و B مستقل‌اند.

۵۹- در پرتاب یک تاس بین پیشامدهای « A : عدد فرد ظاهر شود»، « B : عدد مضرب ۳ بیاید» و « C : عدد کم‌تر از ۵ بیاید» چند جفت پیشامد مستقل وجود دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۰- در جدول روبه‌رو به ازای کدام مقدار X دو پیشامد مرد بودن و متأهل بودن مستقل‌اند؟

	زن	مرد	
مجرد	۳	۱۵	(۱) ۴
متاهل	X	۲۰	(۳) ۶
			(۲) ۵
			(۴) ۸

۶۱- m نفر که دوتای آن‌ها A و B هستند در صف می‌ایستند. به ازای کدام مقدار m دو پیشامد « A قبل از B است» و « B و A کنار هم هستند» از یکدیگر مستقل‌اند؟

- (۱) هر مقدار $m \geq ۲$ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۲- در دو پیشامد مستقل A و B اگر $P(B'|A) = \frac{1}{3}$ و $P(A'|B) = \frac{1}{4}$ ، مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{11}{12}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۶۳- اگر برای دو پیشامد مستقل A و B بدانیم $P(A|B) = \frac{1}{6}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ ، مقدار $P(B - A)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۶۴- اگر $P(A|B) = \frac{1}{5}$ و $P(B|A') = \frac{1}{7}$ ، برای دو پیشامد مستقل A و B حاصل $P(A' \cap B')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{35}{7}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{15}{15}$

۶۵- اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{7}$ و دو پیشامد A' و B مستقل باشند، احتمال این که هیچ‌یک از دو پیشامد A و B رخ ندهند چه قدر کم‌تر از احتمال این است که A رخ دهد و B ندهد؟

- (۱) $\frac{14}{1}$ (۲) $\frac{7}{1}$ (۳) $\frac{6}{1}$ (۴) $\frac{1}{1}$

۶۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A - B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A - B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B)$ رخ دهد، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{1}$ (۲) $\frac{8}{1}$ (۳) $\frac{7}{1}$ (۴) $\frac{6}{1}$

۶۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A - B) = P(A \cap B)$ باشد، کدام نتیجه درست است؟ ($A \neq \emptyset$)

- (۱) $P(B) = 1$ (۲) $P(B) = 0$ (۳) $P(B) = \frac{1}{2}$ (۴) $P(B) = \frac{1}{3}$

۶۸- احتمال بهبود دو نفر A و B پس از عمل جراحی به ترتیب $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{6}$ است. با کدام احتمال پس از عمل فقط یکی از آن‌ها بهبود نمی‌یابد؟

- (۱) $\frac{48}{1}$ (۲) $\frac{46}{1}$ (۳) $\frac{44}{1}$ (۴) $\frac{42}{1}$

۶۹- احتمال این که حبیب تا بیست سال دیگر زنده بماند $\frac{1}{75}$ و احتمال این که برادرش تا ۲۰ سال بعد زنده بماند $\frac{2}{3}$ است. چه قدر احتمال دارد تا بیست سال بعد فقط برادر حبیب زنده بماند؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۷۰- احتمال این که هر یک از ۳ نفر بتوانند مسئله‌ای را حل کنند به ترتیب $\frac{1}{7}$ ، $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ است. با کدام احتمال مسئله حل می‌شود؟ (لااقل یکی مسئله را حل می‌کند.)

- (۱) $\frac{994}{1}$ (۲) $\frac{96}{1}$ (۳) $\frac{94}{1}$ (۴) $\frac{996}{1}$

۷۱- روی تاسی ارقام ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۳ نوشته شده است. این تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال بار اول زوج و بار دوم فرد می‌آید؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۷۲- سکه‌ای را آن قدر می‌اندازیم تا رو بیاید. با کدام احتمال ۴ پرتاب لازم است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۷۳- در بین ۴ فرزند یک خانواده با کدام احتمال سومی تنها پسر است؟

- $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۱)
 ۷۴- سکه‌ای را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. اگر در پرتاب دوم «رو» بیاید با کدام احتمال در پرتاب سوم و چهارم پشت می‌آید؟

- $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

۷۵- در پرتاب ۳ تاس با کدام احتمال حداقل یکی مضرب ۳ می‌آید؟

- $\frac{19}{27}$ (۴) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{8}{27}$ (۱)

۷۶- با کدام احتمال، ۴ دانش‌آموز، متولد ماه‌های مختلف سال هستند؟

- $\frac{65}{96}$ (۴) $\frac{55}{96}$ (۳) $\frac{41}{96}$ (۲) $\frac{53}{96}$ (۱)

۷۷- در بین ۳ نفر با کدام احتمال روز تولد حداقل دو نفر در هفته مثل هم است؟

- $\frac{20}{49}$ (۴) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{19}{49}$ (۲) $\frac{18}{49}$ (۱)

۷۸- چه قدر احتمال دارد ۶ عضو تیم والیبال همگی متولد یک فصل از سال باشند؟

- $(\frac{1}{2})^8$ (۴) $(\frac{1}{2})^{10}$ (۳) $(\frac{1}{2})^{12}$ (۲) $(\frac{1}{2})^6$ (۱)

۷۹- احتمال این که معلم دسته کلید خود را در یک کلاس جا بگذارد $\frac{1}{3}$ است. یک معلم با کدام احتمال کلید را در کلاس زنگ دوم جا گذاشته است؟

- $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

۸۰- احتمال پیروزی تیم والیبال ایران بر روسیه در هر گیم $\frac{4}{5}$ است. اگر در یک مسابقه خاص تیمی برنده شود که زودتر ۲ گیم را ببرد با کدام احتمال ایران می‌بَرد؟

- $\frac{1}{16}$ (۱) $\frac{1}{92}$ (۲) $\frac{1}{236}$ (۳) $\frac{1}{352}$ (۴)

۸۱- احتمال قبولی A در کنکور دو برابر B است. اگر احتمال قبولی حداقل یکی از آن‌ها $\frac{72}{100}$ باشد، با کدام احتمال فقط یکی از آن‌ها قبول می‌شود؟

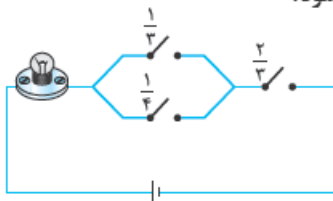
- $\frac{1}{18}$ (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۳) $\frac{1}{54}$ (۴)

۸۲- در یک آزمون زبان، شرکت‌کننده باید در امتحان شفاهی و کتبی نمره قبولی بگیرد. اگر احتمال قبولی او در آزمون شفاهی و کتبی برابر و

در حداقل یک آزمون برابر $\frac{64}{100}$ باشد، با کدام احتمال در آزمون زبان قبول می‌شود؟

- $\frac{1}{12}$ (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{32}$ (۴)

۸۳- در مدار زیر احتمال بسته‌بودن هر کلید روی آن نوشته شده است. با کدام احتمال لامپ روشن می‌شود؟



- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲)
 $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴)

سری

۸۴- سه کارت داریم. اولی دو روی سفید، دومی دو روی سیاه و سومی یک روی سفید و یک روی سیاه دارد. کارتی را برمی‌داریم و می‌بینیم یک روی آن سیاه است. با کدام احتمال روی دیگرش سفید است؟

- $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۸۵- در پرتاب دو تاس با هم به فرض این که هر دو رقم فرد باشند، احتمال این که مجموع دو رقم کمتر از k باشد $\frac{1}{3}$ است. مقدار k کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

۸۶- در پرتاب ۲ تاس، A پیشامد این است که حداقل یک بار ۲ ظاهر شود. با کدام انتخاب برای پیشامد B، مقدار $P(A|B)$ از بقیه کمتر است؟

- مجموع ۷ باشد. (۱) مجموع ۵ باشد. (۲) اختلاف ۲ باشد. (۳) اختلاف ۳ باشد. (۴)

۸۷- به تصادف حروف PEPPER را در کنار هم قرار می‌دهیم. با فرض این‌که دو حرف E کنار هم نیستند، چه قدر احتمال دارد حروف P و E یک‌درمیان باشند؟

$$\begin{array}{cccc} 0/02 & (4) & 0/0125 & (3) & 0/05 & (2) & 0/025 & (1) \end{array}$$

۸۸- علی و رضا و تقی و سعید و مهدی وارد اتاقی می‌شوند. اگر علی قبل از مهدی باشد، با کدام احتمال سعید در بین آن‌ها وارد می‌شود؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & (4) & \frac{1}{6} & (3) & \frac{1}{3} & (2) & \frac{2}{3} & (1) \end{array}$$

۸۹- حروف SANAROM را در کنار هم می‌چینیم. اگر حروف صدادار کنار هم باشند، با کدام احتمال O بین دو حرف A است و حرف S در وسط قرار می‌گیرد؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{36} & (4) & \frac{1}{60} & (3) & \frac{1}{30} & (2) & \frac{1}{20} & (1) \end{array}$$

۹۰- اگر $P(B|A) = 1$ ، مقدار $P(A'|B')$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{P(A)}{P(B)} & (3) & \frac{P(A')}{P(B')} & (3) & 1 & (2) & \text{صفر} & (1) \end{array}$$

۹۱- اگر $P(A|B') = P(B) = x$ باشد، حداکثر چه قدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد؟

$$\begin{array}{cccc} 1 & (4) & \frac{\sqrt{2}}{2} & (3) & \frac{1}{4} & (2) & \frac{1}{2} & (1) \end{array}$$

۹۲- پیشامدی ۸ عضوی در فضای نمونه‌ای ۱۰ عضوی S است. چند پیشامد ۳ عضوی مانند B وجود دارد که $P(B|A) = \frac{1}{4}$ باشد؟

$$\begin{array}{cccc} 42 & (4) & 14 & (3) & 56 & (2) & 28 & (1) \end{array}$$

۹۳- در پرتاب یک تاس، چند پیشامد دو عضوی وجود دارند که از پیشامد {۳, ۶} مستقل باشند؟

$$\begin{array}{cccc} 6 & (4) & 10 & (3) & 14 & (2) & \text{هیچ} & (1) \end{array}$$

۹۴- در فضای نمونه‌ای {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶} چند پیشامد وجود دارد که با {۱, ۲} سازگار و از {۱, ۲} مستقل‌اند؟

$$\begin{array}{cccc} 10 & (4) & 9 & (3) & 8 & (2) & 7 & (1) \end{array}$$

۹۵- A و B دو پیشامد مستقل با احتمال‌های $0/6$ و $0/52$ هستند. رخ دادن پیشامد A احتمال $A - B$ را چه قدر تغییر می‌دهد؟

$$\begin{array}{cccc} 0/312 & (4) & 0/224 & (3) & 0/192 & (2) & \text{صفر} & (1) \end{array}$$

۹۶- در خانواده‌ای شانس تولد پسر $0/6$ است. در بین سه فرزند اگر حداقل یک پسر داشته باشند با کدام احتمال فقط یک پسر دارند؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{13} & (4) & \frac{3}{13} & (3) & \frac{4}{13} & (2) & \frac{2}{13} & (1) \end{array}$$

۹۷- اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ و $P(\{b, c, d\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$ ، حاصل $P(\{a, e\} | \{b, c, d, e\})$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{24} & (4) & \frac{1}{8} & (3) & \frac{1}{9} & (2) & \frac{1}{12} & (1) \end{array}$$

۹۸- در دو پیشامد هم‌شانس و مستقل A و B، مقدار $P(A \cup B)$ برابر $\frac{16}{25}$ است. حاصل $P(A - B)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 0/4 & (4) & 0/36 & (3) & 0/24 & (2) & 0/32 & (1) \end{array}$$

پاسخ تشریحی آمار و احتمال

۳۹۷

آمار و احتمال

حالا سؤال از ما احتمال اقتصاد به شرط حقوق را می‌خواهد:

$$P(\text{حقوق} | \text{اقتصاد}) = \frac{n(\text{حقوق} \cap \text{اقتصاد})}{n(\text{حقوق})}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

۷- گزینه: باید فضای نمونه‌ای را به سومی‌ها محدود کنیم:

$$P(\text{سال سوم و تجربی}) = \frac{n(\text{سال سوم} | \text{تجربی})}{n(\text{سوم})}$$

$$= \frac{10}{10+15} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

۸- گزینه: باید فضای نمونه‌ای را به ریاضی‌ها محدود کنیم:

$$P(\text{ریاضی} | \text{دومی}) = \frac{n(\text{دومی و ریاضی})}{n(\text{ریاضی})} = \frac{12}{12+15} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

۹- گزینه: در حالت عادی احتمال سال سومی بودن برابر

$$P(\text{سومی}) = \frac{10+15}{18+10+12+15} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$

است با فرض ریاضی بودن داریم:

$$P(\text{ریاضی و سومی} | \text{ریاضی}) = \frac{n(\text{ریاضی و سومی})}{n(\text{ریاضی})}$$

$$= \frac{15}{12+15} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{5}{9} - \frac{5}{11} = \frac{5 \times 11 - 5 \times 9}{11 \times 9} = \frac{10}{99} = \frac{10}{99} = \frac{10}{99}$$

۱۰- گزینه: صورت سؤال می‌گوید یکی از پرسنل چای

خورده است پس فضای نمونه‌ای به افرادی که چای خورده‌اند محدود

$$P(\text{چای} | \text{قهوه}) = \frac{n(\text{چای و قهوه})}{n(\text{چای})}$$

$$= \frac{n(B \cap C)}{n(B)} = \frac{2+1}{1+2+7+9} = \frac{3}{19}$$

۱۱- گزینه: فضای نمونه‌ای را به افرادی که شیر نخورده‌اند

محدود می‌کنیم:

$$P(\text{شیر نخورده و چای نخورده} | \text{چای نخورده}) = \frac{n(\text{شیر نخورده و چای نخورده})}{n(\text{شیر نخورده})}$$

$$= \frac{n(A' \cap B')}{n(A')} = \frac{13+3}{9+2+13+3} = \frac{16}{27}$$

۱۲- گزینه: فضای نمونه‌ای به سطر دوم جدول محدود شده

(یعنی فروشگاه‌های دارای ۵ تا ۹ شعبه):

$$P(\text{سطر دوم} | \text{افزایش}) = \frac{n(\text{سطر دوم} \cap \text{افزایش})}{n(\text{سطر دوم})}$$

$$= \frac{8}{1+2+8} = \frac{8}{11}$$

۱- گزینه: پیش‌فرض، B است. پس فضای نمونه‌ای

محدود شده $S=B=\{1,3,4,5,8,9\}$ است. ما می‌خواهیم در

این شرایط A رخ دهد، یعنی پیشامد موردنظر $A \cap B = \{3,5\}$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

است و داریم:

۲- گزینه: پیش‌فرض، A و پیشامد موردنظر $A-B$

$$P(A-B|A) = \frac{n(A-B)}{n(A)}$$

$$= \frac{n(\{6,7\})}{n(\{3,5,6,7\})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

بیان فارسی صورت سؤال هم زیباست: «اگر A رخ دهد، با کدام

احتمال فقط A رخ داده است؟»

۳- گزینه: پیش‌فرض سؤال A' است و می‌خواهیم B رخ

$$P(B|A') = \frac{n(B \cap A')}{n(A')}$$

$$= \frac{\text{تعداد اعضای که در B هست و در A نیست}}{\text{تعداد اعضای که در A نیست}} = \frac{3}{7}$$

۴- گزینه: پیش‌فرض مسئله این است که مهره اول سفید

باشد، پس کیسه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{array}{|c|} \hline 4W \\ \hline 5B \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3W \\ \hline 5B \\ \hline \end{array}$$

و احتمال سفید بودن دومی برابر است با:

$$P(\text{اولی سفید} | \text{دومی سفید}) = \frac{3}{8}$$

احتمال سفید بودن اولی، $\frac{4}{9}$ بود.

۵- گزینه: پیش‌فرض مسئله این است که واحد انتخابی

اداری نیست. پس فضای نمونه‌ای محدود شده $6 = 25 - 19$ عضو دارد.

در بین آن‌ها دنبال واحد تجاری هستیم که تمام این ۶ واحد به جز آن

واحد مسکونی، تجاری‌اند، پس داریم: $P(\text{اداری نیست} | \text{تجاری}) = \frac{5}{6}$



این را هم ببینید:

۶- گزینه: از بین ۴۲ نفر، ۴ نفر در هیچ دوره‌ای ثبت‌نام

نکرده‌اند پس $42 - 4 = 38$ نفر در حداقل یک دوره ثبت‌نام کرده‌اند:

$$n(A \cup B) = 38$$

$$n(A) = 23$$

$$n(B) = 20 \Rightarrow n(A \cap B) = 23 + 20 - 38 = 5$$

۱۳- **گزینه ۱** فضای نمونه‌ای محدود به فروشگاه‌هایی است که

تعداد کارمندان ثابت مانده، پس فقط به ستون دوم جدول نگاه می‌کنیم و داریم:

$$P(\text{ستون دوم} | \text{سطر سوم}) = P(\text{ثابت ماندن} | \text{بیش از ۹}) \\ = \frac{n(\text{ستون دوم و سطر سوم})}{n(\text{ستون دوم})} = \frac{۷}{۵+۲+۷} = \frac{۱}{۲}$$

۱۴- **گزینه ۱** این اصلاً احتمال شرطی نیست و فضای

نمونه‌ای شامل کل فروشگاه‌ها و پیشامد موردنظر، کل ستون اول است:

$$P(\text{کاهش}) = \frac{n(\text{کاهش})}{n(\text{کل})} = \frac{۸}{۴۵}$$

۱۵- **گزینه ۱** فضای نمونه‌ای حالت‌هایی است که مجموع

شماره‌ها ۷ باشد. این حالت‌ها عبارت‌اند از: (۳، ۴) و (۲، ۵) و (۱، ۶)

اما دقت کنید که هر کدام از این جفت اعداد، ۴ حالت دارند. چون عدد اول می‌تواند قرمز یا آبی باشد و عدد دوم نیز همین‌طور. مثلاً

برای ۱ و ۶ داریم: ${}^1B^6B, {}^1R^6B, {}^1B^6R, {}^1R^6R$

پس فضای نمونه‌ای محدودشده دارای $۳ \times ۴ = ۱۲$ عضو است که در

بین آن‌ها تا هم‌رنگ هستند:

$$\{{}^1B^6B, {}^1R^6R, {}^2B^5B, {}^2R^5R, {}^3R^4R, {}^3B^4B\}$$

$$P(\text{مجموع ۷ | هم‌رنگ}) = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

۱۶- **گزینه ۱** جمع شماره‌ها وقتی فرد است که هر سه فرد

باشند یا فقط یکی فرد باشد (۴ تا زوج و ۳ تا فرد داریم):

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = \binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۱} = ۱ + ۶ \times ۳ = ۱۹$$

یک فرد و دو زوج سه‌تای فرد

حالت موردنظر یعنی هر سه فرد، فقط یکی از آن‌ها است پس:

$$P(\text{مجموع فرد | هر سه فرد}) = \frac{۱}{۱۹}$$

۱۷- **گزینه ۱** ضرب شماره‌ها وقتی زوج است که هر سه

شماره فرد نباشند پس:

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = \binom{۷}{۳} - \binom{۳}{۳} = ۳۵ - ۱ = ۳۴$$

هر سه فرد کل

حالا مجموع زوج می‌خواهیم. پس باید هر سه زوج یا دو فرد و یک زوج

$$n(A) = \binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۱} = ۴ + ۳ \times ۴ = ۱۶$$

یک زوج و دو فرد هر سه زوج

$$P(\text{ضرب زوج | جمع زوج}) = \frac{۱۶}{۳۴} = \frac{۸}{۱۷}$$

۱۸- **گزینه ۱** فضای نمونه‌ای محدودشده این است که حداقل

یک ریاضی انتخاب شود:

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} - \binom{۶}{۳} \binom{۴}{۰} = ۱۲۰ - ۲۰ = ۱۰۰$$

هیچ ریاضی کل

حالا می‌خواهیم دقیقاً یک ریاضی انتخاب شده باشد:

$$n(A) = \binom{۴}{۱} \times \binom{۶}{۲} = ۴ \times ۱۵ = ۶۰$$

دو تجربی و یک ریاضی

$$P(\text{حداقل یک ریاضی | یک ریاضی}) = \frac{۶۰}{۱۰۰} = ۰/۶$$

پس:

۱۹- **گزینه ۱** در بین آن‌ها حداقل یک جفت هست یعنی یا

یک جفت و دو لنگه تکی انتخاب شده یا دقیقاً دو جفت. پس تعداد

اعضای فضای نمونه‌ای محدودشده برابر است با:

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۱} \times \binom{۴}{۲} \binom{۲}{۱} \binom{۲}{۱}$$

دو تالنگه تکی و یک جفت یا دو جفت

$$= ۱۰ + ۵ \times ۶ \times ۲ \times ۲ = ۱۳۰$$

برای انتخاب دو تالنگه تکی، ابتدا از جفت‌های مانده ۲ جفت را

برمی‌داریم (این می‌شود ترکیب ۲ از ۴) سپس از هر جفت یک لنگه

برمی‌داریم (دو بار ترکیب ۱ از ۲ را نوشتیم).

حالا مطلوب ما دقیقاً حالت دوم است یعنی فقط یک جفت داشته

$$n(A) = \binom{۵}{۱} \binom{۴}{۲} \binom{۲}{۱} \binom{۲}{۱} = ۵ \times ۶ \times ۲ \times ۲ = ۱۲۰$$

باشیم:

$$P(\text{حداقل یک جفت | فقط یک جفت}) = \frac{۱۲۰}{۱۳۰} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

و بنابراین:

۲۰- **گزینه ۱** فضای نمونه‌ای ۲ فرزند {دد، پد، دپ، پپ} است.

اگر فرزند بزرگ‌تر دختر باشد، فضای نمونه‌ای به صورت {پد،

$$دد} \text{ محدود می‌شود و داریم: } P(\text{اولی دختر | هر دو دختر}) = \frac{۱}{۲}$$

۲۱- **گزینه ۱** فضای نمونه‌ای ۲ فرزند {پپ، دپ، پد، دد} بود

اما این بار فقط می‌دانیم یک فرزند دختر است اما معلوم نیست فرزند اول

است یا دوم؟! پس فضای محدودشده {دد، پد، دپ} است و احتمال «هر

$$\text{دو دختر}» \text{ برابر است با: } P(\text{حداقل یکی دختر | هر دو دختر}) = \frac{۱}{۳}$$

۲۲- **گزینه ۱** فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت زیر است:

$$S = \{ررر, پرر, رپپ, رپر, پرپ, رپر, پرپ, پپپ, رپپ\}$$

$$n(S) = ۷$$

پس:

البته می‌توانستیم بگوییم از $۳^۳ = ۸$ حالت در پرتاب ۳ سکه، حالت

«پپپ» قبول نیست. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای محدودشده

۷ تا است. حالا فقط ۱ «رو» می‌خواهیم یعنی ۳ حالت «رپپ، پرپ،

$$\text{پپر}» \text{ قبول‌اند و داریم: } P(\text{حداقل یک رو | فقط یک رو}) = \frac{۳}{۷}$$

۲۳- **گزینه ۱** حداقل ۲ دختر دارند، پس فضای نمونه‌ای

$$S = \{ددد, دپد, پدد, دپپ\}$$

محدودشده ۴ عضو دارد:

در بین آن‌ها ۳ حالت فقط یک پسر است پس داریم:

$$P(\text{حداقل ۲ دختر | فقط یک پسر}) = \frac{۳}{۴}$$

۳۳- گزینه: مجموع‌های مضرب ۳ عبارت‌اند از:

$$۱۲, ۹, ۶, ۳$$

پس فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت زیر است:

$$S = \{(۱۲, ۲۱), (۱۵, ۵۱, ۲۴, ۴۲, ۳۳), (۶۳, ۳۶, ۴۵, ۵۴), (۶۶)\}$$

که ۱۲ عضو دارد. در بین آن‌ها حالت‌هایی را می‌خواهیم که هیچ یک از دو عدد مضرب ۳ نباشند:

$$A = \{(۴۵, ۵۴), (۱۵, ۵۱, ۲۴, ۴۲), (۱۲, ۲۱)\}$$

$$P(A | \text{مجموع مضرب ۳}) = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$$

پس:

۳۴- گزینه: واضح است که با فرض (۴) یعنی اگر اختلاف

ارقام ۴ باشد، امکان ندارد هر دو عدد مضرب ۳ شوند. پس در این حالت $P(A | B)$ صفر است و حتماً کم‌تر از بقیه خواهد بود.

در (۱) مجموع ۹ دارای حالت‌های $\{۳۶, ۶۳, ۴۵, ۵۴\}$ است که در $\frac{۲}{۴}$ حالت‌ها،

هر دو عدد مضرب ۳ هستند. در (۲) مجموع بیشتر از ۸ دارای حالت‌های $\{۶۶, (۵۶, ۶۵), (۵۵, ۴۶, ۶۴), (۳۶, ۶۳, ۴۵, ۵۴)\}$ است و

در بین آن‌ها $\frac{۳}{۱۰}$ احتمال دارد هر دو مضرب ۳ باشند.

در (۳) هم شش حالت $\{۱۱, ۲۲, ۳۳, ۴۴, ۵۵, ۶۶\}$ مفروض‌اند که با

احتمال $\frac{۲}{۶}$ از بین آن‌ها، هر دو عدد مضرب ۳ هستند.

۳۵- گزینه: مجموع ارقام باید ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ باشد. پس

فضای نمونه‌ای محدودشده دارای $۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷$ عضو است.

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = ۱۵$$

پس:

(۴) در پرتاب دو تاس، مجموع دو رقم می‌تواند از ۲ تا ۱۲ باشد و

تعداد حالت‌ها برابر است با:

جمع دو تاس	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	
	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶

حالاً ما اختلاف ارقام زوج را می‌خواهیم یعنی اختلاف ۰ یا ۲ یا ۴. حالت‌های مطلوب عبارت‌اند از (یادتان نرود که مجموع باید عدد اول باشد): $\{۱۱\}$

دقت کنید که اگر اختلاف ارقام زوج باشد حتماً مجموع آن‌ها

نیز زوج است، پس فقط مجموع ۲ را می‌پذیریم و داریم:

$$P(\text{مجموع اول} | \text{اختلاف زوج}) = \frac{۱}{۱۵}$$

۳۶- گزینه: مجموع ۱۵ در سه تاس، حالت‌های مختلفی دارد:

$$(۱۱۱) \quad ۴, ۵, ۶ \quad (۱۲۱) \quad ۳, ۶, ۶ \quad (۱۳۱) \quad ۵, ۵, ۵$$

در حالت (الف)، ۶ جایگشت و در (ب) سه جایگشت و در (پ) یک جایگشت

داریم پس فضای نمونه‌ای محدودشده $۱۰ = ۱+۳+۶$ عضو دارد.

در بین این‌ها موارد (ب) و (پ) حداقل یک رقم تکراری دارند که روی هم

$$P(\text{تکراری} | \text{مجموع ۱۵}) = \frac{۴}{۱۰} \quad \text{پس داریم: } ۳+۱=۴$$

۳۷- گزینه: ارقام سه تاس ۱، ۲، ۴ و ۵ هستند پس هر تاس

۴ حالت دارد. بنابراین فضای نمونه‌ای محدودشده $۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$

عضو خواهد داشت. حالا می‌خواهیم هر سه رقم رو شده فرد باشند

پس هر تاس باید ۱ یا ۵ آمده باشد: $n(A) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

$$P(\text{هر سه فرد}) = \frac{۸}{۶۴} = \frac{۱}{۸}$$

۳۸- گزینه: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای محدودشده

$$n(S) = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$

می‌باشد. حالت‌های ارقام متوالی عبارت‌اند از: $(۱, ۲, ۳), (۲, ۳, ۴), (۳, ۴, ۵), (۴, ۵, ۶)$. البته هر کدام

$۳! = ۶$ حالت برای جایگشت دارند. پس $۴ \times ۶ = ۲۴$ حالت مطلوب

وجود دارد و بنابراین:

$$P(\text{متمایز} | \text{متوالی}) = \frac{۴ \times ۶}{۶ \times ۵ \times ۴} = \frac{۱}{۵}$$

۳۹- گزینه: ارقام رو شده ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ هستند پس هر

تاس ۴ حالت دارد و فضای نمونه‌ای محدودشده $۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$

عضوی است. برای سه رقم مختلف هم $۴ \times ۳ \times ۲$ حالت داریم. پس

$$P = \frac{۴ \times ۳ \times ۲}{۴ \times ۴ \times ۴} = \frac{۳}{۸}$$

احتمال برابر است با:

(۴) بیان فارسی متمم این پیشامد زیباست:

در پرتاب ۳ تاس، ارقام رو شده بیشتر از ۲ هستند. با کدام احتمال

حداقل یک رقم تکراری ظاهر شده است؟ جواب می‌شود $\frac{۵}{۸}$.

۴۰- گزینه: پیش‌فرض سؤال این است که A و B پشت

سر هم نباشند، پس داریم: $n(S_{\text{محدودشده}})$

تعداد حالت‌هایی که A و B پشت سر هم هستند - کل =

$$= ۷۲ = ۴۸ - ۲۴ = ۱۲۰ - ۲۴ \times ۲ = ۱۲۰ - EDC \quad \text{با } \begin{matrix} \text{A, B} \\ \text{E, D, C} \end{matrix}$$

مطلوب این است که فقط دو نفر بین A و B باشند:

$$n(A) = \binom{۳}{۲} \times \underset{\substack{\text{ترتیب آن‌ها} \\ \text{E, D, C}}}{۲!} \times \underset{\substack{\text{A, B}}}{۲!} \times \underset{\substack{\text{جایگشت این ۴ نفر} \\ \text{با نفر پنجم}}}{۲!} = ۲۴$$

$$P = \frac{۲۴}{۷۲} = \frac{۱}{۳}$$

پس داریم:

۴۱- گزینه: تعداد کل حالت‌هایی که زن‌ها کنار هم باشند

$$\text{مردم} \Rightarrow ۵! \times ۳!$$

برابر است با:

حالا می‌خواهیم مردها نیز کنار هم باشند:

$$\text{مردم} \Rightarrow ۲! \times ۳! \times ۴!$$

$$P(\text{زن‌ها کنار هم} | \text{مردها کنار هم}) = \frac{۲! \times ۳! \times ۴!}{۵! \times ۳!} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

پس داریم:

و خواسته سؤال $P(A|B')$ است:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A-B)}{1-P(B)} = \frac{P(A)-P(A \cap B)}{1-P(B)}$$

$$= \frac{\frac{5}{9} - \frac{1}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$$

۴۵- گزینه: سؤال می‌گوید:

$P(A \cup B) = 0/87$, $P(B|A) = 0/05$ و $P(A|B) = 0/1$
از تجربه تست قبل، می‌دانیم باید همه چیز را به $A \cap B$ ارتباط دهیم. پس اگر $P(A \cap B) = x$ باشد داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{10} \Rightarrow P(B) = 10x$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5}{100} \Rightarrow P(A) = 20x$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{حالا:}$$

$$= 20x + 10x - x = 29x = 0/87 \Rightarrow x = 0/03$$

یعنی با احتمال $0/03$ هم A و هم B رخ می‌دهند.

۴۶- گزینه: با داشتن $P(A|B)$ و $P(B)$ می‌توانیم مقدار

$$P(A \cap B) \text{ را حساب کنیم: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

حالا سؤال $P(B' - A')$ را می‌خواهد:

$$P(B' - A') = P(B') - P(B' \cap A')$$

برای $P(B' \cap A')$ هم متمم $A \cup B$ را در نظر می‌گیریم:

$$P(B' \cap A') = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} \right) = 1 - \frac{15 + 10 - 2}{30} = 1 - \frac{23}{30} = \frac{7}{30}$$

$$\Rightarrow P(B' - A') = \underbrace{P(B')}_{\frac{2}{3}} - \underbrace{P(B' \cap A')}_{\frac{7}{30}} = \frac{13}{30} = 0/43$$

۴۷- گزینه: به فرمول $P(A'|B)$ نگاه کنید:

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

پس این‌طور شد:

$$P(A|B) = \frac{12}{25} \Rightarrow P(A'|B) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = 0/52$$

۴۲- گزینه: احتمال رخ دادن حداقل یکی از آن‌ها همان

$P(A \cup B)$ است. پس می‌توانیم $P(A \cap B)$ را به دست بیاوریم

و از روی آن احتمال شرطی‌ها را پیدا کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{10 + 12 - 15}{30} = \frac{7}{30}$$

پس داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{12}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{10}$$

و در نتیجه:

$$P(B|A) - P(A|B) = \frac{7}{10} - \frac{7}{12} = \frac{42 - 35}{60} = \frac{7}{60}$$

۴۳- گزینه: فرمول احتمال شرطی را ببینید:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{3}{5}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{20}$$

حالا مقدار $P(A|B')$ برابر است با:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A-B)}{1-P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - \frac{3}{5}}$$

اما سؤال گفته بود A و B هم‌شانس هستند پس $P(A)$ هم همان

$$P(B) \text{ است: } \frac{P(A) = P(B) = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{12 - 9}{20} = \frac{3}{20} = \frac{3}{8}}$$

۴۴- گزینه: فرمول‌های دو قسمت را بنویسیم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}$$

با طرفین‌وسطین داریم:

$$\Delta P(A \cap B) = P(A) \quad \text{و} \quad 4P(A \cap B) = P(B)$$

سؤال گفته مجموع احتمال B و A برابر ۱ است پس:

$$P(A) + P(B) = \Delta P(A \cap B) + 4P(A \cap B) = 9P(A \cap B) = 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} P(B) = \frac{4}{9} \\ P(A) = \frac{5}{9} \end{cases}$$

حالا اشتراک‌ها را کنترل کنیم: (اولی ش و مثل هم) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

$$= P(\text{ش ش}) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C)$$

(دومی ش و مثل هم) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

$$= P(\text{ش ش}) = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C)$$

(اولی ش و دومی ش) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$= P(\text{ش ش}) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$$

پس این سه پیشامد دوبه‌دو مستقل‌اند. اما:

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$$

پس سه پیشامد از هم مستقل نیستند، یعنی ۳ تا از گزاره‌ها درست هستند.

۵۴- گزینه ۳ برای مستقل بودن دو پیشامد A و B باید یکی از

این دو شرط کنترل شود: $P(A|B) = P(A|B') = P(A)$ (الف)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
 (ب)

پس (۲) و (۴) نادرست هستند، چون شرط (الف) در آن‌ها برقرار نیست.

برای (۱) و (۳) اول باید فرمول اجتماع را بنویسیم و

را به دست آوریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\textcircled{1} \quad 0/75 = 0/4 + 0/5 - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/15 \neq 0/4 \times 0/5$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{7}{8} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{24} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{6}$$

پس (۳) مستقل‌اند.

۵۵- گزینه ۳ تکلیف (پ) از همه زودتر معلوم است چون

پرتاب اول و دوم از هم مستقل‌اند پس B و C مستقل‌اند؛ دقت کنید

که $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(C) = \frac{1}{6}$. برای پیشامد A داریم:

$$A = \text{مجموع } 7 = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap C = \text{مجموع } 7 \text{ و دومی } 3 = \{43\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{36}$$

$$A \cap B = \text{مجموع } 7 \text{ و اولی } 4 = \{43\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$B \cap C = \text{دومی } 3 \text{ و اولی } 4 = \{43\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{36}$$

حالا دقت کنید که A و C مستقل‌اند: $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ، هم‌چنین A و

B هم مستقل‌اند. اما A و B مستقل نیستند چون:

$$P(\underbrace{A \cap B \cap C}_{\{(4,3)\}}) = \frac{1}{36} \neq P(A) \times P(B \cap C)$$

یعنی ۳ گزاره درست‌اند.

۴۸- گزینه ۳ اگر فرمول احتمال شرطی برای $P(A|B)$ و

$P(B|A)$ را بنویسیم و بر هم تقسیم کنیم داریم:

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

بمعنی‌ها این نتیجه را هم فقط می‌کنند.

در این سؤال داریم:

$$\frac{0/4}{0/3} = \frac{0/2}{0/3} \Rightarrow P(B|A) = \frac{0/3 \times 0/4}{0/2} = 0/6$$

۴۹- گزینه ۳ سؤال $P(A'|B')$ را می‌خواهد:

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{1 - 0/74}{1 - 0/35} = \frac{0/26}{0/65} = \frac{26}{65} \xrightarrow{\div 13} = \frac{2}{5}$$

۵۰- گزینه ۳ شرط مستقل بودن این است که

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ، پس اول احتمال اشتراک را پیدا

کنیم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{6}{n} = \frac{2}{n} + \frac{5}{n} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{n}$$

حالا باید این مقدار را مساوی ضرب احتمال A و B قرار دهیم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \times \frac{5}{n} \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 10$$

یعنی فضای نمونه‌ای، ده‌عضوی است.

۵۱- گزینه ۳ شرط مستقل بودن این است که احتمال

اشتراک برابر ضرب احتمال‌ها باشد. پس A وقتی از خودش

مستقل است که $P(A \cap A) = P(A) \times P(A)$ باشد؛ یعنی:

$$P(A) = (P(A))^2$$

این هم وقتی رخ می‌دهد که $P(A) = 0$ یا $P(A) = 1$ باشد. پس

A پیشامد حتمی یا غیرممکن است.

دقت کنید پیشامد A در این حالت، از مکملش هم مستقل است.

۵۲- گزینه ۳

$$P(A \cap \emptyset) = P(A)P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = P(A) \times 0 = 0$$

$$P(A \cap S) = P(A)P(S) \Rightarrow P(A) = P(A) \times 1$$

پس هر دو درست هستند.

۵۳- گزینه ۳ این فضای نمونه‌ای:

$$S = \{\text{ش ش}, \text{ش خ}, \text{خ ش}, \text{خ خ}\}$$

اول احتمال هر کدام را حساب کنیم:

$$P(A) = P(\text{اولی ش}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(\text{دومی ش}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(\text{مثل هم}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$C = 5$ = پيشامد عدد كم تر از ۵ = $\{1, 2, 3, 4\}$

پس: $A \cap B = \{3\}$, $A \cap C = \{1, 3\}$, $B \cap C = \{3\}$

حالا شرط مستقل بودن را كنترل كنيم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \quad \checkmark$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} \quad \checkmark$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \quad \times$$

پس A و B مستقل اند، A و C نیز مستقل اند اما B و C وابسته اند و فقط ۲ جفت پيشامد مستقل داريم.

$$P(\text{مرد}) = \frac{n(\text{مرد})}{n(\text{كل})} = \frac{35}{38+x} \quad \text{۶۰- كزينه}$$

$$P(\text{متاهل}) = \frac{n(\text{متاهل})}{n(\text{كل})} = \frac{20+x}{38+x}$$

$$P(\text{مرد} \cap \text{متاهل}) = \frac{n(\text{مرد و متاهل})}{n(\text{كل})} = \frac{20}{38+x}$$

شرط مستقل بودن اين است كه:

$$\frac{20}{38+x} = \frac{35}{38+x} \times \frac{20+x}{38+x}$$

$$\Rightarrow 20 = 35 \times \frac{20+x}{38+x} \Rightarrow 20(38+x) = 35 \times (20+x)$$

$$\Rightarrow 760 + 20x = 700 + 35x \Rightarrow 60 = 15x \Rightarrow x = 4$$

چون نسبت متاهل به مجرد در مردان ۴ به ۳ است بايد در زنان هم همين نسبت برقرار باشد.

$$P(\text{قبل از } B \text{ است } A) = \frac{m!}{2!m!} = \frac{1}{2} \quad \text{۶۱- كزينه}$$

$$P(A \text{ و } B \text{ کنار هم هستند}) = \frac{2!(m-1)!}{m!} = \frac{2}{m}$$

$$P(A \text{ و } B \text{ کنار هم و } A \text{ قبل از } B \text{ است}) = \frac{(m-1)! \times 1}{m!} = \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{m} = \frac{1}{m} \quad \text{شرط مستقل بودن:}$$

خُب اين رابطه همواره برقرار است پس اين دو پيشامد همواره مستقل اند ($m \geq 2$).

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{مستقل}} P(A') = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4} \quad \text{۶۲- كزينه}$$

$$P(B'|A) = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{مستقل}} P(B') = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

حالا مقدار $P(A \cup B)$ برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A) \times P(B)}_{\text{چون مستقل اند}}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{9+8-6}{12} = \frac{11}{12}$$

۵۶- كزينه حالت هايي كه تاس اول ۴ باشد

$A = \{41, 42, 43, 44, 45, 46\}$ هستند پس $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

اگر اختلاف دو رقم صفر باشد، فضاي نمونه اي به $B = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$ محدود مي شود و در اين حالت

$P(A|B) = \frac{1}{6}$ خواهد بود كه با $P(A)$ فرقي ندارد پس B و A مستقل اند.

دقت مي كنيد كه وقتي تاس اول ۴ باشد اختلاف دو تاس هرگز ۵ يا ۴ نيست. در مورد اختلاف ۲ هم فضا به $B = \{13, 31, 24, 42, 35, 53, 46, 64\}$ محدود مي شود و داريم:

$$P(A|B) = \frac{2}{8} \neq P(A)$$

۵۷- كزينه احتمال اين كه تاس اول ۲ باشد $P(A) = \frac{1}{6}$ است.

احتمال اين كه اختلاف دو رقم ۳ باشد $\frac{1}{6}$ است:

$$B = \{14, 25, 36, 63, 52, 41\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

حالا احتمال اشتراك آن ها: $A \cap B = \{25\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

و چون $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ يعني $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ برقرار است دو پيشامد از هم مستقل اند.

به خاطر مي سپاريم كه در پرتاب دو تاس، «اختلاف دو رقم ۳ باشد» و «تاس اول a باشد» همواره مستقل اند. هم چنين پيشامد «تاس اول a باشد» از پيشامد «دو تاس يكسان باشند» مستقل است. ضمناً مجموع ۷ از هر عددي در تاس اول مستقل است.

۵۸- كزينه احتمال رخ دادن فقط ۳ رو برابر است با:

$$n(S) = 2^6 = 64$$

$$n(A) = \binom{6}{3} = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{20}{64}$$

احتمال رو بودن سكه اول برابر است با:

حالا اشتراك اين ها يعني فقط ۳ رو رخ دهد و اولي هم رو باشد (پس در ۵ پرتاب بعدي فقط دو رو داريم) برابر است با:

$$n(A \cap B) = 1 \times \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{10}{64}$$

مي بينيد كه شرط $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ برقرار است پس دو پيشامد مستقل اند.

هميشه در پرتاب n سكه (n زوج)، پيشامد اين كه نصف سكه ها، رو بيايند از پيشامد رو بودن اولي مستقل است.

۵۹- كزينه پيشامدها را بنويسيم:

$A = \{1, 3, 5\}$ = پيشامد عدد فرد

$B = \{3, 6\}$ = پيشامد عدد مضرب ۳

و با قراردادن این مقادیر در یکی از دو رابطه بالا داریم: $P(A) = 0/5$
 حالا احتمال $A \cup B'$ را می‌خواهیم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A)P(B')$$

$$= 0/5 + 0/8 - 0/5 \times 0/8 = 0/9$$

راه دوم استفاده از متمم است: $(A \cup B')' = A' \cap B$

$$P(A \cup B') = 1 - P(A' \cap B)$$

$$= 1 - P(A')P(B) = 1 - 0/5 \times 0/2 = 1 - 0/1 = 0/9$$

۶۷- گزینه طبق فرمول مستقل داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A)P(B')$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

حالا سؤال می‌گوید این‌ها مساوی‌اند، پس:

$$P(A)P(B') = P(A)P(B) \Rightarrow P(B) = P(B')$$

جمع $P(B)$ و $P(B')$ باید ۱ باشد پس: $P(B) = P(B') = \frac{1}{2}$

۶۸- گزینه فقط یکی بهبود نمی‌یابد یعنی فقط یکی بهبود

می‌یابد (چه‌طور؟). این پیشامد را قبلاً به صورت $(A - B) \cup (B - A)$

یا $(A \cup B) - (A \cap B)$ معرفی کردیم:

$$P(\text{فقط یکی}) = P(A - B) + P(B - A)$$

$$= P(A \cap B') + P(B \cap A')$$

$$= P(A)P(B') + P(B)P(A')$$

$$= 0/7(1 - 0/6) + 0/6(1 - 0/7)$$

$$= (0/7)(0/4) + (0/6)(0/3)$$

$$= 0/28 + 0/18 = 0/46$$

۶۹- گزینه زنده ماندن و نماندن افراد از هم مستقل است

(عمر دست فداست!) پس داریم:

$$P(B \text{ بماند و } A \text{ نماند}) = P(B \text{ زنده بماند})$$

$$= P(B \cap A') = P(B) \times P(A') = \frac{2}{3} \times (1 - 0/75)$$

$$= \frac{2}{3} \times 0/25 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

۷۰- گزینه ما فرمولی برای $P(A \cup B \cup C)$ بلد

نیستیم! پس با استفاده از متمم می‌گوییم:

$$P(\text{هیچ‌کدام حل نکنند}) = 1 - P(\text{حداقل یکی حل کند})$$

$$= 1 - P(A' \cap B' \cap C')$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل}} = 1 - P(A')P(B')P(C')$$

$$= 1 - 0/3 \times 0/4 \times 0/5$$

$$= 1 - 0/06 = 0/94$$

۷۱- گزینه پرتاب‌ها از هم مستقل‌اند پس داریم:

$$P(\text{بار دوم فرد}) \times P(\text{بار اول زوج}) = P(\text{بار دوم فرد و بار اول زوج})$$

راه دوم متمم پیشامد $A \cup B$ به صورت $A' \cap B'$ است، پس داریم:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \underbrace{P(A') \times P(B')}_{\text{چون مستقل‌اند}}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

۶۳- گزینه در پیشامدهای مستقل $P(A|B) = P(A)$

است. پس $P(A) = 0/6$ را در فرمول $P(A \cup B)$ جای‌گذاری

$$\text{می‌کنیم: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{P(A) \times P(B)}{P(A \cap B)}$$

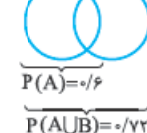
$$\Rightarrow 0/72 = 0/6 + P(B) - 0/6P(B)$$

$$\Rightarrow 0/12 = 0/4P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0/12}{0/4} = 0/3$$

حالا $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ برابر است با:

$$= P(B) - P(A) \times P(B) = 0/3 - 0/6 \times 0/3 = 0/3 - 0/18 = 0/12$$

راه دوم به نمودار ون دقت کنید:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$$

$$\Rightarrow 0/72 = 0/6 + P(B - A)$$

$$\Rightarrow P(B - A) = 0/12$$

۶۴- گزینه در پیشامدهای مستقل، احتمال شرطی برابر

احتمال پیشامد سمت چپ است. پس:

$$\xrightarrow{\text{مستقل}} \begin{cases} P(B|A') = 0/7 = P(B) \\ P(A|B) = 0/5 = P(A) \end{cases}$$

حالا $P(A' \cap B')$ را می‌خواهیم:

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$

$$= (1 - 0/5) \times (1 - 0/7) = 0/5 \times 0/3 = 0/15$$

۶۵- گزینه از این‌که A' و B مستقل‌اند نتیجه می‌شود

که A و B نیز مستقل‌اند. احتمال این‌که هیچ‌یک از آن‌ها رخ ندهند

برابر است با: $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

$$= (1 - 0/6) \times (1 - 0/7) = 0/4 \times 0/3 = 0/12$$

احتمال این‌که A رخ دهد و B ندهد برابر است با:

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

$$= 0/6 \times (1 - 0/7) = 0/6 \times 0/3 = 0/18$$

پس اختلاف آن‌ها می‌شود $0/06$.

۶۶- گزینه در حالت مستقل، فرمول‌ها را می‌نویسیم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A)P(B') = 0/4$$

$$4P(A \cap B) = 4P(A)P(B) = 0/4 \Rightarrow P(A)P(B) = 0/1$$

و اگر دو رابطه بالا را بر هم تقسیم کنیم:

$$\frac{P(B')}{P(B)} = 4 \frac{P(B) + P(B')}{P(B)} \Rightarrow P(B) = 0/2 \text{ و } P(B') = 0/8$$

همان ماه باشند و احتمال هر کدام $\frac{1}{4}$ است. پس داریم:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

۷۹- گزینه: باید در کلاس زنگ اول جا نگذارد و در کلاس

دوم جا بگذارد: $P = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

۸۰- گزینه: ایران باید دو گیم اول را ببرد یا گیم اول را ببرد

و دوم را ببازد و سوم را ببرد یا گیم اول را ببازد و دوم و سوم را ببرد.

پس ۳ حالت داریم که ناسازگارند: $WW + WLW + LWW$

$$P = 0/4 \times 0/4 + 0/4 \times 0/6 \times 0/4 + 0/6 \times 0/4 \times 0/4 \\ = 0/16 + 0/96 + 0/96 = 0/352$$

۸۱- گزینه: سؤال می‌گوید $P(A) = 2x$ و $P(B) = x$ و

چون دو نفر از هم مستقل اند $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 2x^2$.

حالا احتمال قبولی حداقل یک نفر برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 2x + x - 2x^2 = 3x - 2x^2 = 0/72$$

$$2x^2 - 3x + 0/72 = 0$$

پس داریم:

از حل این معادله $x = 1/2$ و $x = 0/3$ به دست می‌آیند که فقط

$x = 0/3$ قبول است. حالا احتمال قبولی فقط یکی برابر است با:

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0/72 - \frac{0/18}{2x^2} = 0/54$$

۸۲- گزینه: احتمال قبولی در حداقل یک آزمون همان

$P(A \cup B)$ است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{P(A \cap B)}{P(A) \times P(B)}$$

$$\frac{\text{دو آزمون از هم مستقل و هم‌شانسانند.}}{\rightarrow} = x + x - xx = 0/64$$

$$x^2 - 2x + 0/64 = 0$$

پس داریم:

از حل این معادله مقادیر x عبارت‌اند از: $x = 1/6$ ، $0/4$ که فقط

$x = 0/4$ قبول است.

حالا احتمال قبولی در آزمون زبان برابر است با:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B) = x^2 = 0/4^2 = 0/16$$

۸۳- گزینه: باید کلید سری (با احتمال $\frac{2}{3}$) بسته باشد و از

بین دو کلید موازی هم حداقل یکی بسته باشد. پس داریم:

$$P = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{6}{12} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

حداقل یکی بسته باشد

احتمال زوج آمدن تاس، $\frac{2}{6}$ و احتمال فرد آمدن تاس، $\frac{4}{6}$ است و

$$= \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

داریم:

۷۲- گزینه: وقتی تا رسیدن به «رو» ۴ پرتاب لازم شده

یعنی سه پرتاب اول پشت و چهارمی «رو» بوده است (از هم

مستقل‌اند): $P(\text{ر پ پ پ}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

۷۳- گزینه: فرزندان از هم مستقل‌اند، پس باید احتمال

دختر بودن اولی، دومی و چهارمی و پسر بودن سومی را در هم ضرب کنیم:

$$P(\text{د پ د د}) = P(\text{د})P(\text{د})P(\text{پ})P(\text{د}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

۷۴- گزینه: چون پرتاب‌ها از هم مستقل‌اند، احتمال این‌که

پرتاب سوم و چهارم پشت باشند، با شرط رو بودن پرتاب دوم، عوض

نی‌شود. پس داریم: (دومی رو | سومی و چهارمی پشت)

$$= P(\text{چهارمی پشت}) \times P(\text{سومی پشت}) = P(\text{سومی و چهارمی پشت})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۷۵- گزینه: از متمم استفاده می‌کنیم:

$$P(\text{هیچ کدام مضرب ۳ نباشد}) = 1 - P(\text{حداقل یکی مضرب ۳})$$

احتمال این‌که یک تاس مضرب ۳ نباشد برابر است با:

$$P = \frac{n(\{1, 2, 4, 5\})}{n(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

چون تاس‌ها از هم مستقل‌اند:

$$P(\text{۳ مضرب ۳}) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

۷۶- گزینه: نفر اول ۱۲ ماه را دارد و احتمالش $\frac{12}{12}$ است.

نفر دوم یک ماه را ندارد و احتمالش $\frac{11}{12}$ است. نفر سوم دو ماه

را ندارد و احتمالش $\frac{10}{12}$ است. نفر چهارم هم سه ماه را ندارد و

احتمالش می‌شود $\frac{9}{12}$. پس داریم:

$$\frac{\text{از هم مستقل‌اند}}{\rightarrow} \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} = 1 \times \frac{11}{12} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{55}{96}$$

۷۷- گزینه: از متمم استفاده کنیم:

$$P(\text{هیچ دو نفری مثل هم نباشند}) = 1 - P(\text{حداقل دو نفر مثل هم})$$

(سه روز مختلف)

$$= 1 - P(\text{سه روز مختلف}) \\ = 1 - \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$$

سومی دومی اولی

۷۸- گزینه: نفر اول آزاد است که هر یک از ۴ فصل را

انتخاب کند پس احتمالش می‌شود $\frac{4}{4}$ اما پنج نفر دیگر باید همگی

۸۴- گزینه ۳ وقتی یک روی کارت انتخابی سیاه است، پس فضای نمونه‌ای شامل کارت «دو رو سفید» نیست. یعنی دو کارت $B_1 B_2$ و $B_3 W$ در فضای محدودشده هستند و روی سیاه که دیده‌ایم یکی از ۳ حالت B_1, B_2, B_3 است. پس $n(\text{محدودشده } S) = 3$ ؛ حالا می‌خواهیم روی دیگرش سفید باشد یعنی فقط B_3 مورد قبول است. بنابراین:

$$P = \frac{1}{3}$$

۸۵- گزینه ۳ فضای نمونه‌ای محدودشده ۹ عضو دارد:

$$S = \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}$$

$$n(S) = 3 \times 3 = 9$$

حالا احتمال این‌که مجموع دو عدد کم‌تر از k باشد $\frac{1}{3}$ شده؛ پس تا از عضوهای فضای نمونه‌ای محدودشده در شرط مجموع کم‌تر از k صدق می‌کنند (چون $\frac{3}{9}$ می‌شود $\frac{1}{3}$) ببینید:

$$S_{\text{محدودشده}} = \{ \underbrace{11, 13, 31}_{\substack{\downarrow \\ \text{جمع: } 2}}, \underbrace{51, 15, 33}_{\substack{\downarrow \\ 4}}, \underbrace{35, 53}_{\substack{\downarrow \\ 6}}, \underbrace{55}_{\substack{\downarrow \\ 8}} \}$$

با کمی دقت احتمال این‌که مجموع کم‌تر از ۵ و یا ۶ (کم‌تر یا مساوی ۴) باشد، می‌شود $\frac{3}{9}$. پس: $k = 5$ یا 6

۸۶- گزینه ۳ باید پیشامدی را انتخاب کرد که تعداد بیشتری عضو دارد و با پیشامد A کم‌تر اشتراک دارد. پس اعضای پیشامدها را بنویسیم.

۱) مجموع ۷، دارای ۶ حالت است: $\{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$

در ۲ حالت از بین این‌ها ۲ ظاهر شده پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{2}{6}$.

۲) مجموع ۵، دارای ۴ حالت است: $\{14, 23, 32, 41\}$

دو تا از حالت‌ها ۲ دارند، پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{1}{4}$.

۳) اختلاف ۲، دارای ۸ حالت است: $\{13, 24, 35, 46, 31, 42, 53, 46\}$

که در ۲ تا از آن‌ها ۲ هست پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{2}{8}$.

۴) اختلاف ۳، دارای ۶ حالت است: $\{14, 25, 63, 41, 52, 36\}$

و باز هم ۲ تا از آن‌ها ۲ دارند، پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{2}{6}$.

۸۷- گزینه ۳ فضای نمونه‌ای محدودشده شامل جایگشت‌هایی است که دو حرف E کنار هم نباشند:

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = \frac{6!}{3!2!} - \frac{5!}{3!} = 60 - 20 = 40$$

تعداد حالات
تعداد کل حالات

PEPPER PPP(E)ER

حالا می‌خواهیم حروف P و E یک‌درمیان باشند: $\{PEPEP\}, R$

پس فقط ۲! حالت داریم (درون جعبه فقط همین حالت قبول است) بنابراین:

$$P = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 0.05$$

۸۸- گزینه ۳ فضای نمونه‌ای محدودشده شامل حالت‌هایی است که علی قبل از مهدی باشد: $n(S_{\text{محدودشده}}) = \frac{5!}{2!} = 60$

مطلوب سؤال این است که سعید هم بین آن‌ها باشد. یعنی به ترتیب علی، سعید و مهدی وارد شوند:

$$n(A) = \frac{5!}{3!} = 20$$

و داریم:

$$P = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

۸۹- گزینه ۳ پیش‌فرض سؤال این است که حروف صدادار کنار هم باشند:

$$SNRM \{AAO\} \Rightarrow 5! \times \frac{3!}{2!} = 360$$

درون دسته

حالا می‌خواهیم اولاً درون جعبه، حرف O باشد و ثانیاً حرف S در وسط باشد پس دو حالت، قابل قبول است:

$N, M, R, \{S\} \{A\} \{O\} \{A\}$ یا $\{A\} \{O\} \{S\} \{N, M, R\}$

که در هر مورد $3! = 6$ حالت داریم. پس:

$$P = \frac{2 \times 6}{360} = \frac{1}{30}$$

۹۰- گزینه ۳ فرمول احتمال شرطی را بنویسیم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 \Rightarrow P(B \cap A) = P(A)$$

این یعنی $B \cap A = A$ و به بیان دیگر $A \subseteq B$ است. حالا داریم:

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}$$

در سال‌های قبل دیده‌اید که اگر $A \subseteq B$ باشد $B' \subseteq A'$ است.

بنابراین $A' \cap B' = B'$ و داریم:

$$P(A'|B') = \frac{P(B')}{P(B')} = 1$$

۹۱- گزینه ۳

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)}$$

سؤال گفته $P(A|B')$ و $P(B)$ هر دو برابر x هستند پس داریم:

$$x = \frac{P(A - B)}{1 - x} \Rightarrow P(A - B) = x(1 - x) = x - x^2$$

$$x_S = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$$

پس حداکثر احتمال آن برابر است با:

$$y = x - x^2 \Rightarrow y_{\max} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

۹۲- گزینه ۳ فرمول احتمال شرطی را ببینید:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{n(B \cap A)}{8} = \frac{1}{4}$$

پس باید $B \cap A$ دو عضوی باشد. یعنی B پیشامدی است که دو عضو با A مشترک دارد. این دو عضو را به $\left(\begin{smallmatrix} A \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ حالت انتخاب می‌کنیم و

چون B دارای ۳ عضو است، یک عضو دیگر از بین اعضای A' باید برداریم: $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$

عضوهای A

●● گزینه ۹۶

$$P(\text{فقط یک پسر}) = \frac{P(\text{حداقل یک پسر} | \text{فقط یک پسر})}{P(\text{حداقل یک پسر})}$$

احتمال حداقل یک پسر برابر است با:

$$P(\text{د د د}) = 1 - P(\text{هر سه دختر}) = 1 - P(\text{حداقل یک پسر})$$

$$= 1 - 0/4 \times 0/4 \times 0/4 = 1 - 0/64 = 0/936$$

احتمال فقط یک پسر برابر است با:

$$P(\text{فقط یک پسر}) = P(\text{پ د د}, \text{د پ د}, \text{د د پ}) = 3 \times 0/6 \times 0/4 \times 0/4 = 0/288$$

و احتمال شرطی برابر است با:

$$\frac{0/288}{0/936} = \frac{288}{936} \xrightarrow{\div 12} \frac{24}{78} = \frac{4}{13}$$

●● گزینه ۹۷

$$P(\{a, e\} | \{b, c, d, e\}) = \frac{P(\text{اشتراک})}{P(\text{دومی})}$$

$$= \frac{P(\{a, e\} \cap \{b, c, d, e\})}{P(\{b, c, d, e\})} = \frac{P(\{e\})}{P(\{b, c, d, e\})}$$

حالا به فضای نمونه‌ای و احتمال‌های داده شده دقت کنید:

$$S = \{a, \underbrace{b, c, d}_{\frac{2}{3}}, e\} \quad P(\{e\}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(\{b, c, d, e\}) = 1 - P(\{a\}) = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1/12}{3/4} = \frac{4}{12 \times 3} = \frac{1}{9}$$

پس جواب می‌شود:

●● گزینه ۹۸

وقتی A و B هم‌شانس هستند احتمال هر

کدام از آن‌ها X است، پس داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A)P(B)}_{\text{چون مستقل اند}}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{25} = x + x - xx = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{16}{25} = 0$$

از حل این معادله جواب‌های $x = \frac{8}{5}$ و $x = \frac{2}{5}$ به دست می‌آیند

که $\frac{8}{5}$ قبول نیست (چون احتمال باید بین ۰ و ۱ باشد). بنابراین:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= x - x^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25} = 0/24$$

$$B \text{ تعداد حالت‌های} = \binom{8}{2} \times \binom{2}{1} = 28 \times 2 = 56$$

انتخاب دو عضو
مشترک با A

انتخاب یک عضو
غیرمشترک

●● گزینه ۹۳

احتمال هر پیشامد دو عضوی برابر است با:

$$P(A) = P(\{3, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\{x, y\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ضرب احتمال این‌ها می‌شود $\frac{1}{9}$ که هرگز

نمی‌تواند برابر $P(A \cap B)$ باشد (چون $P(A \cap B)$ می‌تواند $\frac{1}{6}$ یا

$\frac{2}{6}$ یا صفر باشد و هرگز مخرجش ۹ نیست) پس امکان ندارد.

●● گزینه ۹۴

احتمال پیشامد $A = \{1, 2\}$ برابر است با:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

حالا پیشامدی که با A سازگار است یعنی اشتراکش با A $\{1\}$ یا $\{2\}$ است را می‌خواهیم:

(الف) اگر $A \cap B$ یک عضوی باشد، داریم:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

پس B باید دارای ۳ عضو باشد که یکی با A مشترک است:

عضو مشترک با A

$$B \text{ تعداد حالت} = \binom{2}{1} \times \binom{4}{2} = 8$$

دوتا عضو از
۶، ۵، ۴، ۳ بین

(ب) اگر $A \cap B$ دو عضوی باشد، داریم:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = P(A) \times P(B) = \frac{2}{6} \times P(B) \Rightarrow P(B) = 1$$

پس در این حالت B خود S است. بنابراین روی هم $8 + 1 = 9$ حالت داریم.

●● گزینه ۹۵

باید $P(A - B | A)$ را حساب کنیم:

$$P(A - B | A) = \frac{P((A - B) \cap (A))}{P(A)}$$

چون $A - B$ قسمتی از A است، اشتراک A و $A - B$ همان

$$A - B \text{ خواهد بود:} \quad \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B')}{P(A)}$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل}} \frac{P(A)P(B')}{P(A)} = P(B') = 1 - 0/52 = 0/48$$

احتمال خود $(A - B)$ را هم حساب کنیم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = 0/6 \times 0/48 = 0/288$$

میزان تغییر برابر است با $0/288 - 0/48 = 0/192$.