فهرست

فصل ۱
ترسیم‌های هندسی و استدلال

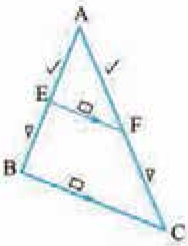
فصل ۲
قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳
چندضلعی‌ها

فصل ۴
تجسم فضایی

درس ۲

قضیهٔ تالس



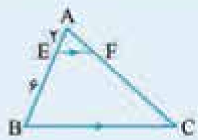
چند صد سال قبل از میلاد مسیح، یک آقایی به نام تالس، قضیهٔ مهمی را بیان کرد که هم در هندسه و هم در علوم دیگری مثل فیزیک، کلی کاربرد داشت.

صورت کلی این قضیه در مثلث را بیان می‌کنیم:

در مثلث ABC اگر EF موازی BC باشد، داریم: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

پس حواستان باشد که AE با AF، EB با FC، AB با AC و EF با BC متناسب‌اند، مثلاً اگر پرسیدند که $\frac{AE}{EB}$ چه می‌شود با خیال راحت می‌گویید: $\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}$، فقط دقت کنید که EF وقتی وارد بازی می‌شود که $\frac{AE}{AB}$ یا $\frac{AF}{AC}$ را داشته باشیم که همان تعمیم قضیه به وجود بیاید!

مثال **با توجه به شکل مقابل، نسبت‌های $\frac{AF}{FC}$، $\frac{FC}{AC}$ و $\frac{EF}{BC}$ را بیابید.**

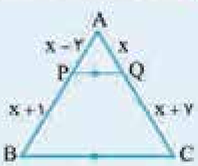


پاسخ دقت کن که $\boxed{AE \text{ و } AF}$، $\boxed{EB \text{ و } FC}$ و $\boxed{AB \text{ و } AC}$ متناسب‌اند، پس بنویسیم:

$$\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \quad , \quad \frac{FC}{AC}=\frac{EB}{AB}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴} \quad , \quad \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

حضور دوتا خط موازی در یک شکل، باید ما را سریعاً یاد قضیهٔ تالس بیندازد و اگر خواستهٔ سؤال یک نسبت یا حاصل‌ضرب باشد، مثلاً $\frac{AE}{FE}$ و یا $AC.BD$، اولین حدسمان استفاده از قضیهٔ تالس است.

تست **در شکل مقابل، اندازهٔ ضلع AB کدام است؟**



۱) ۷ ۲) ۱۲
۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ ۲ خُب! توی شکل ۲ تا خط موازی می‌بینیم، پس برویم سراغ قضیهٔ مرحوم تالس:

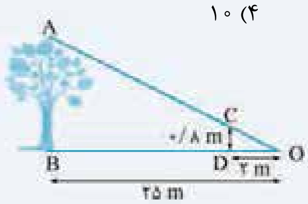
$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{x-۳}{x+۱}=\frac{x}{x+۷} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x-۳}{(x+۱)-(x-۳)}=\frac{x}{(x+۷)-x} \Rightarrow \frac{x-۳}{۴}=\frac{x}{۷}$$

$$\Rightarrow ۷x-۲۱=۴x \Rightarrow ۳x=۲۱ \Rightarrow x=۷$$

ضلع AB هم که $۲x-۲$ است با معلوم‌شدن x داریم: $۲x-۲=۲(۷)-۲=۱۲$.

تست **برای اندازه‌گیری ارتفاع یک درخت از تکه‌چوبی به طول $۸۰\ cm$ استفاده شده است، به گونه‌ای که سایهٔ درخت و تکه‌چوب در یک امتداد بوده و نوک سایه‌ها بر هم منطبق هستند. اگر سایهٔ درخت و تکه‌چوب به طور قائم به ترتیب ۲۵ و ۲ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟**

۱) ۸/۴ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

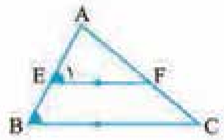


پاسخ ۴ درخت و تکه‌چوب هر دو بر سطح زمین عمود هستند و با هم موازی می‌باشند.

از آن‌جا که $AB \parallel CD$ است، با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث AOB داریم:

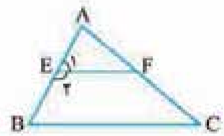
$$\frac{CD}{AB}=\frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{۰/۸}{AB}=\frac{۲}{۲۵} \Rightarrow AB=\frac{۲۵\times ۰/۸}{۲}=۱۰$$

در تست‌های این فصل حتماً خواهید دید که همیشه هم نمی‌آیند خیلی تابلو بگویند که این دو خط با هم موازی‌اند، در بسیاری از تست‌ها مانند شکل‌های زیر به صورت پنهانی این حرف را می‌زنند:



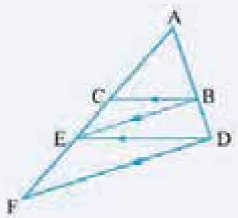
۱ می‌گویند که $\hat{E}_{۱} = \hat{B}$ است پس طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب معلوم می‌شود که $EF \parallel BC$ است.

۲ می‌گویند که $\hat{B}$ و $\hat{E}_{۲}$ مکمل هم هستند. خُب یعنی $\hat{E}_{۱} = \hat{B}$ است و باز هم $EF \parallel BC$ می‌شود.



همیشه هم این‌جوری نیست که دوتا خط موازی ببینیم و یک تالس تابلو بنویسیم و به جواب برسیم، مثلاً در بعضی از مسائل ۲ جفت خط موازی داریم، پس باید ۲ بار قضیهٔ تالس را بنویسیم و سعی کنیم بین تناسب‌های ایجادشده یک ربطی بیابیم. مثال زیر یک تمرین مهم کتاب درسی است که بارها سؤال کنکور بوده است، بیایید با هم حلش کنیم.

مثال **در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$. به کمک قضیهٔ تالس، ثابت کنید که AE واسطهٔ هندسی AF و AC است.**

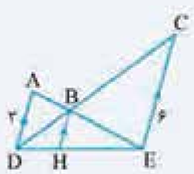


پاسخ اگر AE بخواهد واسطهٔ هندسی AF و AC باشد پس باید $AE^{۲} = AF \times AC$ شود. خُب! حکم مسئله به صورت حاصل‌ضرب است، اما ما می‌دانیم که هر تالس به ما یک تناسب می‌دهد که بعدش خودمان ضرب می‌کنیم و به چنین چیزی می‌رسیم. این حاصل‌ضرب‌ها را باید به تناسب تبدیل کنیم: $AE^{۲} = AF \times AC \Rightarrow AE \times AE = AF \times AC \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AE}$

خوب که نگاه کنید متوجه می‌شوید که با یک تالس، این تناسب ایجاد نمی‌شود، پس با توجه به این‌که ۲ جفت خط موازی داریم، ۲ تا قضیهٔ تالس را می‌نویسیم. البته در نوشتن تالس‌ها هم دقت کنید که می‌خواهیم $\frac{AE}{AF}$ و $\frac{AC}{AE}$ را داشته باشیم! به سراغ مثلث‌های ADE و ADF برویم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ADE} : BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \boxed{\frac{AB}{AD}} \\ \overset{\Delta}{ADF} : BE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \boxed{\frac{AB}{AD}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲} = AC.AF$$

تست **در شکل مقابل، $AD \parallel BH \parallel CE$ است. اگر $AD = ۳$ و $CE = ۶$ باشد، اندازهٔ BH کدام است؟**



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

پاسخ ۴ سه‌تا خط موازی داریم ولی ۲ جفت خط موازی می‌توان از این ۳ تا جور کرد که ۲ تا قضیهٔ تالس بنویسیم، یکی برای AD و BH و یکی هم برای CE و BH:

$$\overset{\Delta}{ADE} : BH \parallel AD \Rightarrow \frac{BH}{AD} = \frac{EH}{ED} \Rightarrow \frac{BH}{۳} = \frac{EH}{ED} \quad (۱)$$

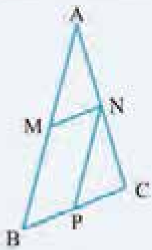
$$\overset{\Delta}{CDE} : BH \parallel CE \Rightarrow \frac{BH}{CE} = \frac{DH}{DE} \Rightarrow \frac{BH}{۶} = \frac{DH}{DE} \quad (۲)$$

به $\frac{EH}{ED}$ و $\frac{DH}{DE}$ دقت کنید! مخرج‌های یکسان ما را تشویق می‌کند که جمعشان کنیم: $\frac{EH}{ED} + \frac{DH}{DE} = \frac{EH + DH}{DE} = \frac{DE}{DE} = ۱$

خیلی خوب شد، از شرِ ۲ تا نسبت خلاص شدیم و به عدد رسیدیم، پس طرفین تناسب‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

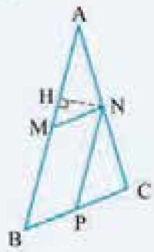
$$\frac{BH}{۳} + \frac{BH}{۶} = ۱ \Rightarrow \frac{۲BH + BH}{۶} = ۱ \Rightarrow \frac{۳BH}{۶} = ۱ \Rightarrow BH = ۲$$

تست **در شکل مقابل، اگر مساحت مثلث AMN با مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB برابر باشد، نسبت $\frac{AN}{NC}$ برابر با کدام است؟**



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ (۳) از نقطهٔ N عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم، داریم:



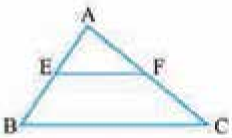
$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{AMN}} = \frac{AM \times NH}{۲} \\ S_{MNPB} = BM \times NH \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{AMN}} = S_{MNPB}}$$

$$\frac{AM \times NH}{۲} = BM \times NH \Rightarrow \frac{AM}{۲} = BM \Rightarrow AM = ۲BM$$

با نوشتن تالس (جزء به جزء) در مثلث ABC داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{BM} = ۲$$

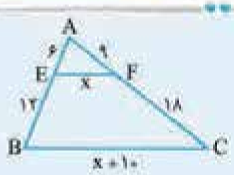
عکس قضیهٔ تالس



اگر خطی روی دو ضلع مثلثی، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

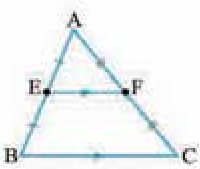
تست **با توجه به شکل مقابل، اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟**



۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

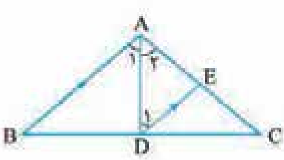
پاسخ (۲) با توجه به این‌که $\frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۱۸} = \frac{۶}{۱۲}$ است، پس $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$؛ یعنی EF روی دو ضلع AB و AC، ۴ پاره‌خط متناسب پدید آورده است که این کار فقط از دستِ یک خط موازی برمی‌آید، یعنی EF با BC موازی است، پس طبق خودِ قضیهٔ تالس داریم:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۶}{۱۸} = \frac{x}{x + ۱۰} \Rightarrow \frac{x}{x + ۱۰} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳x = x + ۱۰ \Rightarrow x = ۵$$



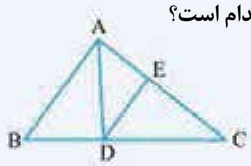
یک حالت خاص مهم: اگر وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل موازی ضلع سوم و نصف آن ضلع خواهد بود و اگر از وسط یک ضلع، موازی ضلعِ دیگر خطی بکشیم، این خط، ضلع سوم را در وسطش قطع می‌کند و باز هم پاره‌خط حاصل، نصف ضلعی است که با آن موازی بوده است.

نیمساز وارد می‌شود!



نیمساز یک زاویه، دو زاویهٔ مساوی به وجود می‌آورد که تا وقتی این‌ها در کنار هم هستند به درد نمی‌خورند ولی وقتی یک خط موازی از پای نیمساز کشیده شود، داستان عوض می‌شود، مثلاً در شکل مقابل AD نیمساز است و DE موازی AB رسم شده است، در این صورت $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱$ می‌شود و از قبل هم $\hat{A}_۲$ و $\hat{A}_۱$ با هم برابر بوده‌اند پس $DE = AE$ می‌شود. یعنی حضور این خط موازی باعث می‌شود دو زاویهٔ برابر $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ در جای دیگری از مسئله دو ضلع مساوی به وجود بیاورند. از این ویژگی در سؤال‌های تالس و تشابه خیلی استفاده می‌شود که در همین فصل از کاربردهایش بیشتر خواهیم گفت.

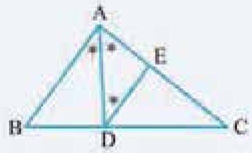
تست **در شکل زیر $AB = ۲۱$ و $AC = ۲۸$ است. اگر AD نیمساز زاویهٔ A و $DE \parallel AB$ باشد، طول CE کدام است؟**



۱) ۱۲ ۲) ۱۶
۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ ۲ قضیهٔ خطوط موازی و مورب به ما می‌گوید:

$DE \parallel AB$ و AD مورب $\Rightarrow \hat{ADE} = \hat{BAD}$



از طرفی می‌دانیم $\hat{DAE} = \hat{BAD}$، لذا نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{DAE} = \hat{ADE} \Rightarrow AE = DE \qquad (۱)$$

حال با استفاده از قضیهٔ تالس (جزء به کل) در مثلث ACB داریم:

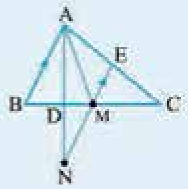
$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{۲۱} = \frac{CE}{۲۸} \Rightarrow DE = \frac{۳}{۴}CE \quad (۲)$$

از طرفی بنا بر فرض مسئله داریم:

$$AC = ۲۸ \Rightarrow AE + CE = ۲۸ \xrightarrow{(۱)} DE + CE = ۲۸$$

$$\xrightarrow{(۲)} \frac{۳}{۴}CE + CE = ۲۸ \Rightarrow \frac{۷}{۴}CE = ۲۸ \Rightarrow CE = ۱۶$$

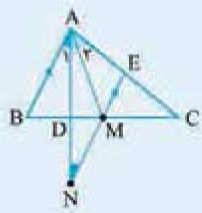
تست **در شکل مقابل، AM میانه و AD نیمساز زاویهٔ A است. اگر $۴AB = ۳BC = ۲AC = ۱۲$ و $AB \parallel ME$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط ME کدام است؟**



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

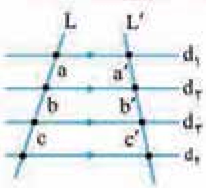
پاسخ ۲ نیمساز را که با خط موازی می‌بینید باید یادِ حرف‌های همین الانم *بیفتید*! که گفتم $\hat{A}_۲ = \hat{A}_۱ = \hat{N}$ و در نتیجه مثلث AEN متساوی‌الساقین است و $EA = EN$ خواهد بود.



چون خط موازی از M وسط ضلع BC کشیده شده‌است پس E وسط ضلع AC است و ME هم نصف AB. خُب! اگر E وسط AC است پس AE نصف AC است یعنی EN هم‌اندازهٔ نصف AC می‌شود، جالب شد! چون $MN = EN - EM$ است، که می‌شود: $MN = EN - EM = \frac{AC}{۲} - \frac{AB}{۲} = \frac{۶ - ۳}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$

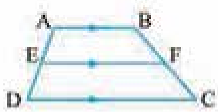
$AB = ۳$ و $BC = ۴$ و $AC = ۶$ بود!

حالت کلی قضیهٔ تالس: اگر چندتا خط موازی داشته باشیم و ۲ تا خط بیایند و این‌ها را قطع کنند، خط‌های موازی با دقت کامل روی این خط‌ها قطعات متناسب ایجاد می‌کنند، شکل را ببینید:



$$d_۱ \parallel d_۲ \parallel d_۳ \parallel d_۴ \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

حالت کلی قضیهٔ تالس خیلی به کارمان نمی‌آید، اما یک حالت خاص آن که در ذوزنقه رخ می‌دهد، در تست‌ها کلی استفاده می‌شود. مثلاً ذوزنقهٔ $ABCD$ را مانند شکل مقابل می‌کشند و می‌گویند EF با قاعده‌ها موازی است، یعنی سه‌تا خط موازی داریم که AD و BC آن‌ها را قطع کرده‌اند، پس می‌توانیم بگوییم:



$$AB \parallel EF \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{BF} = \frac{ED}{FC} \xrightarrow[\text{بنویسیم}]{\text{بهتر است}} \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

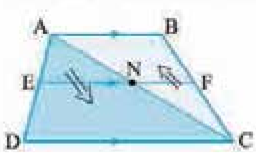
که البته عکس این موضوع هم درست است، یعنی اگر $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ باشد، EF با AB موازی است!

مثال **در شکل مقابل، x را بیابید.**

پاسخ با این همه توضیحی که خوانده‌اید، فقط بنویسیم که:

$$\frac{x+۱}{x-۳} = \frac{x+۳}{x-۲} \Rightarrow (x+۱)(x-۲) = (x+۳)(x-۳) \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = x^۲ - ۹ \Rightarrow -x - ۲ = -۹ \Rightarrow x = ۷$$

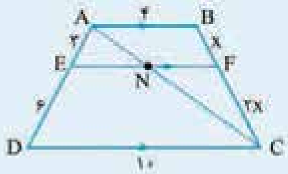
در مسائل تالس در ذوزنقه یادتان باشد که با رسم قطر ذوزنقه دوتا مثلث ایجاد می‌شود و مسئله به تالس در مثلث تبدیل می‌شود که برای ما راحت‌تر است و زبانش را بهتر می‌دانیم:



۱ $\overset{\Delta}{ADC} : EN \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \cdots$ ۲ $\overset{\Delta}{ABC} : FN \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \cdots$

تست در ذوزنقهٔ ABCD $(AB \parallel CD)$، نقاط E و F بر روی ساق‌های AD و BC طوری قرار دارند که $EF \parallel AB$ ، $AE = ۳$ و $ED = ۶$. اگر $AB = ۴$ و $CD = ۱۰$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵/۵ ۳) ۵ ۴) ۶/۵



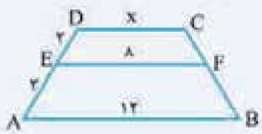
پاسخ ۱ با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{BF}{FC} = \frac{AE}{ED} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ برقرار است پس اگر BF را x بنامیم، FC برابر ۲x است.

قرار شد که در مسائل ذوزنقه سریعاً قطر را بکشید! و قضیهٔ تالس‌ها را بنویسیم، *بسم الله*، این شما و این هم قضیهٔ تالس: $\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AE}{AD} = \frac{EN}{DC} \Rightarrow \frac{۳}{۹} = \frac{EN}{۱۰} \Rightarrow EN = \frac{۱۰}{۳}$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{CF}{CB} = \frac{FN}{AB} \Rightarrow \frac{۲x}{۳x} = \frac{FN}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{FN}{۴} \Rightarrow FN = \frac{۸}{۳}$$

و در آخر از جمع‌کردن اندازه‌های EN و FN، اندازهٔ EF به دست می‌آید: $EF = \frac{۱۰}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱۸}{۳} = ۶$.

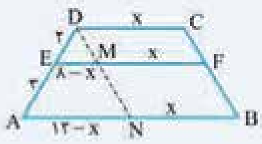
تست در شکل زیر اگر $AB \parallel CD \parallel EF$ باشد، طول DC کدام است؟



۱) ۵ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$

۳) ۶ ۴) $\frac{۲۲}{۳}$

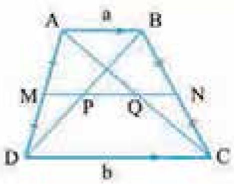
پاسخ ۲ از D به موازات CB رسم می‌کنیم.



DCBN متوازی‌الاضلاع است و $DC = MF = NB = x$. در مثلث ADN، $EM \parallel AN$ است، با نوشتن تالس (از نوع جزء به کل) داریم: $\frac{DE}{DA} = \frac{EM}{AN}$

بنابراین: $\frac{۲}{۵} = \frac{۸-x}{۱۲-x} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳}$

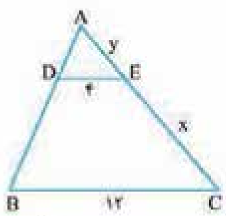
اگر نقاط M و N وسط‌های ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD باشند، داریم:



۱ $MN \parallel AB \parallel DC$ ۲ $MN = \frac{a+b}{۲}$ ۳ $PQ = \frac{b-a}{۲}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

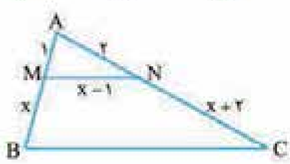
۲۲- در شکل مقابل اگر $DE \parallel BC$ و $AC = ۱۵$ باشند، $x - y$ کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۸

۳) ۴ ۴) ۶

۲۳- در شکل زیر اگر $MN \parallel BC$ باشد، طول BC کدام است؟



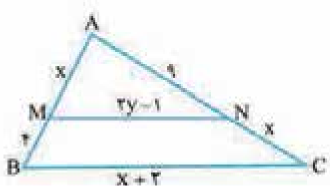
۱) ۳

۲) ۲

۳) ۶

۴) ۴

۲۴- در شکل زیر $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ (تمرین کتاب درسی)



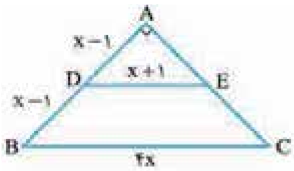
۱) ۶ و ۲/۹

۲) ۶ و $\frac{۱۳}{۲}$

۳) ۲/۹ و ۶

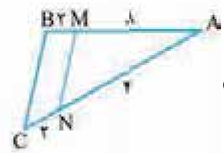
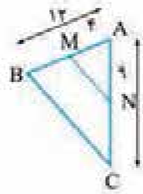
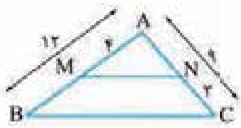
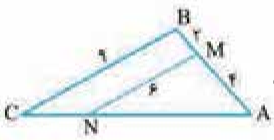
۴) $\frac{۱۳}{۲}$ و ۶

۲۵- در شکل زیر $DE \parallel BC$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است. اندازهٔ پاره‌خط AC کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)*

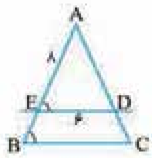


۱) $۷\sqrt{۲}$
۲) $۸\sqrt{۲}$
۳) $۵\sqrt{۳}$
۴) $۶\sqrt{۳}$

۲۶- در کدام‌یک از شکل‌های زیر، خط MN موازی BC است؟

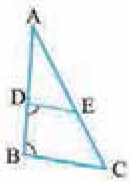
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۷- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{E}$ ، $AE = ۸$ ، $ED = ۶$ و $BC = ۹$. طول BE کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴/۲
۳) ۴/۴
۴) ۴/۶

۲۸- در شکل مقابل دو زاویهٔ B و D از چهارضلعی BDEC مکمل هم هستند و $BC = \frac{۴}{۳}DE$ و $AB = ۲۰$. اندازهٔ BD کدام است؟



۱) ۲/۵
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

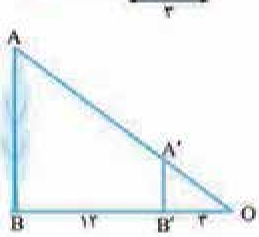
۲۹- در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۴ و ۹ واحد و اندازهٔ ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می‌شود، کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۴)*

۱) ۱۱/۴
۲) ۱۱/۶
۳) ۱۲/۲
۴) ۱۲/۸

۳۰- در شکل زیر اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

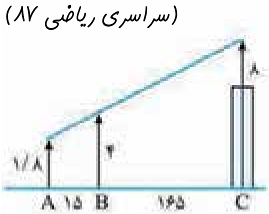
۱) ۳۰
۲) ۲۰
۳) ۱۰
۴) ۵

۳۱- شخصی برای اندازه‌گیری ارتفاع یک درخت، مطابق شکل از یک شاخص $(A'B')$ استفاده می‌کند. اگر شخص دیگری بخواهد زمانی که نوک سایهٔ درخت در نقطهٔ B' قرار می‌گیرد از همان شاخص استفاده کند، باید آن را چند متر به درخت نزدیک کند تا نوک سایهٔ شاخص و درخت بر هم منطبق باشند؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*



۱) ۲/۴
۲) ۳
۳) ۳/۲
۴) ۳/۶

۳۲- در شکل زیر دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشم ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ *(سراسری ریاضی ۸۷)*



۱) ۱۹/۸
۲) ۲۰/۲
۳) ۲۰/۸
۴) ۲۱/۲

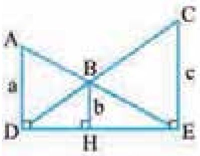
۳۳- در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۶$ ، $AC = ۴$ و $BC = ۳$ نقاط D ، E و F را به ترتیب بر AB ، BC و AC انتخاب کرده‌ایم. اگر چهارضلعی ADEF لوزی باشد، آن‌گاه طول AD کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۳۴- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، مربعی را چنان محاط کرده‌ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و رأس دیگرش روی رأس قائمهٔ مثلث قرار دارد. اگر طول ضلع مربع ۹ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{۱}{c}+\frac{۱}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۵- در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A ، B و C را از خط DE به ترتیب a ، b و c نامیده‌ایم. $\frac{۱}{c}+\frac{۱}{a}$ کدام است؟

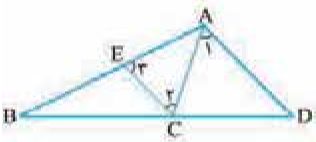


۱) ۱
۲) $\frac{۱}{abc}$
۳) $\frac{۱}{b}$
۴) $\frac{b}{ac}$

۳۶- در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کنند. اندازهٔ MN چه‌قدر است؟ *(خارج ریاضی ۸۷)*

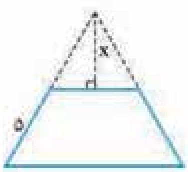
۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۵}{۶}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

۳۷- در شکل زیر داریم: $\hat{C}_۲ = \hat{E}_۳ = \hat{A}_۱$. اگر $AB = ۱۵$ و $AC = ۶$ باشد، آن‌گاه $\frac{BD}{CD}$ چه‌قدر است؟



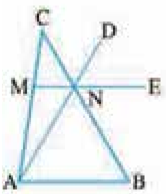
۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۳۸- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازهٔ ساق‌ها ۵ واحد است. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو ساق این ذوزنقه از قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟ *(خارج ریاضی ۸۵)*



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۳۹- در شکل زیر ME موازی AB و $MN = ۴$ و $AB = ۱۰$ است. اگر امتداد AN نیمساز $C\hat{N}E$ باشد، اندازهٔ CN کدام است؟

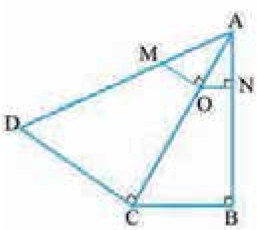


۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۱۴}{۳}$
۳) $\frac{۱۰}{۳}$
۴) $\frac{۲۰}{۳}$

۴۰- در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطهٔ M متقاطع‌اند. فاصلهٔ M از قاعدهٔ بزرگ‌تر، چه‌قدر است؟ *(سراسری تجربی ۸۷)*

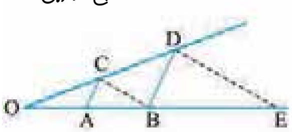
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۴۱- در شکل مقابل اگر $\frac{DM}{AD} = \frac{۲}{۳}$ ، $CB = ۶$ و $NB = ۴$ باشند، مساحت مثلث OAN کدام است؟



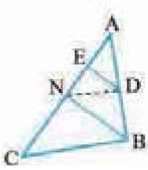
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۴۲- در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند، $OA = ۳$ و $AB = ۵$ ، اندازهٔ BE کدام است؟ *(خارج تجربی ۹۴)*



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$
۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$
۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$
۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

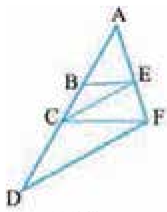
۴۳- در شکل مقابل اگر $BN \parallel DE$ ، $BC \parallel DN$ ، $AE = ۴$ و $EN = ۶$ باشد، اندازهٔ AC کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۲۵

۴۴- در شکل مقابل $CF \parallel BE$ و $DF \parallel CE$. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ CD کدام است؟

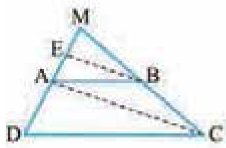
(سراسری تجربی ۸۱)



۱) ۴/۵
۲) ۴/۸
۳) ۵/۴
۴) ۵/۶

۴۵- در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟

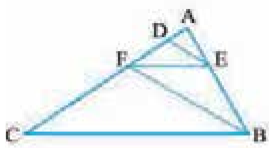
(خارج ریاضی ۹۳)



۱) ۱۲
۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۲/۷۵

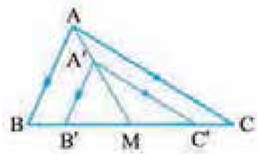
۴۶- در شکل زیر $DE \parallel FB$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $AD = ۳$ و $DF = ۶$، آن‌گاه BC چند برابر EF است؟

(خارج تجربی ۸۴)



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۲/۷۵
۴) ۳

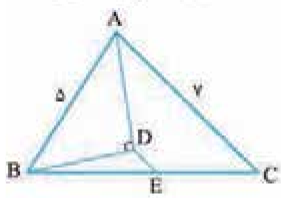
۴۷- در شکل زیر $A'C' \parallel AC$، $A'B' \parallel AB$ و AM میانهٔ مثلث ABC می‌باشد. اگر $A'M$ میانهٔ مثلث $A'B'C'$ باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $AA' = \frac{۱}{۲}AM$
۲) $AA' = \frac{۲}{۳}AM$
۳) $AA' = \frac{۳}{۴}AM$
۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۴۸- در شکل روبه‌رو، AD نیمساز داخلی زاویهٔ BAC و $DE \parallel AC$ است. طول پاره‌خط DE کدام است؟

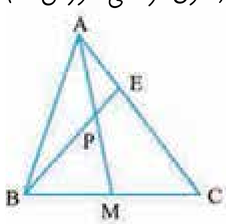
(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۹- در شکل زیر، P وسط میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AE}{CE}$ کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)



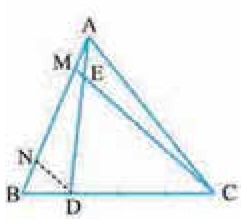
۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۰- روی ضلع BC از مثلث ABC نقطهٔ دلخواه M را اختیار می‌کنیم و از آن خطی موازی میانهٔ AD رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آن‌ها را در E و F قطع کند. $ME + MF$ کدام است؟

۱) AD
۲) $\frac{۴}{۳}AD$
۳) $\frac{۳}{۲}AD$
۴) $۲AD$

۵۱- در شکل زیر، $BD = \frac{۱}{۴}BC$ و $AE = \frac{۱}{۴}AD$ و $DN \parallel CM$، اندازهٔ AB چند برابر AM است؟

(خارج ریاضی ۹۷)



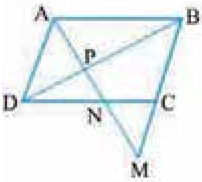
۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۶

۵۲- در یک مربع به ضلع $۴\sqrt{۲}$ خط واصل از رأس به وسط ضلع مقابل آن، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از مرکز مربع کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) ۱

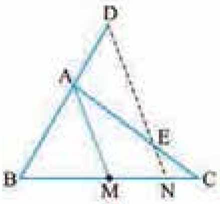
۵۳- در ذوزنقهٔ ABCD از نقطهٔ O محل تلاقی قطرها، پاره‌خط‌های OE و OF را به ترتیب موازی AD و BC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در E و F قطع کند. $\frac{AE}{FB}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{AB}{CD}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{OA}{OC}$



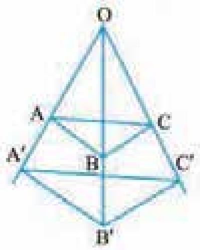
۵۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD، AM پاره‌خطی دلخواه است. کدام درست است؟

۱) $AP^۲ = AN \times AM$ ۲) $AP^۲ = PN \times NM$
۳) $AP^۲ = AN \times NM$ ۴) $AP^۲ = PN \times PM$



۵۵- در مثلث ABC $(AB = \frac{۲}{۳}AC)$ پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۴)*

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$



۵۶- در شکل روبه‌رو، $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ است. اگر $\frac{BB'}{OB} = \frac{۲}{۵}$ باشد، حاصل $\frac{A'C'}{AC}$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

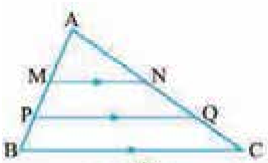
۵۷- در مثلث ABC که در آن $AB = ۸$، $AC = ۱۰$ و $BC = ۱۲$ است، نقاط D، E و F به ترتیب وسط‌های اضلاع AB، AC و BC هستند. مجموع محیط دو چهارضلعی DEFB و DECF برابر با کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۵۸- در مثلث ABC نقطهٔ M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطهٔ O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۸)*

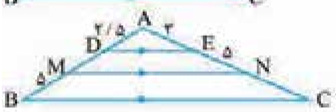
۱) $\frac{۱}{۴}BC$ ۲) AQ ۳) OA ۴) OP

۵۹- با توجه به شکل زیر کدام‌یک از گزینه‌ها نادرست است؟



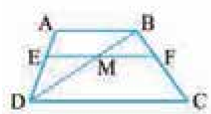
۱) $\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ}$ ۲) $\frac{AM}{PB} = \frac{AN}{QC}$
۳) $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC}$ ۴) $\frac{AM}{MP} = \frac{NQ}{QC}$

۶۰- در شکل مقابل طول پاره‌خط NC کدام است؟



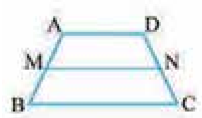
۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۱۰

۶۱- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل، کدام‌یک از روابط زیر درست است؟ $(EF \parallel AB)$



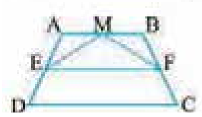
۱) $\frac{MF}{CD} = \frac{ME}{AB}$ ۲) $\frac{BM}{BD} = \frac{AB+MF}{۲AB}$
۳) $\frac{BM}{BD} = \frac{AB}{EM}$ ۴) $\frac{BM}{BD} = \frac{AB-ME}{AB}$

۶۲- در ذوزنقهٔ ABCD وسط‌های اضلاع AB و CD را به هم وصل کرده‌ایم. اگر مساحت چهارضلعی MBCN دو برابر مساحت چهارضلعی AMND باشد، نسبت $\frac{BC}{AD}$ کدام است؟

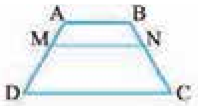


۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۶۳- در ذوزنقهٔ ABCD، نقطهٔ M وسط AB، F وسط BC و E وسط AD است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث MEF است؟



۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

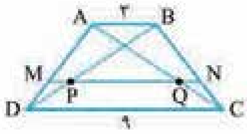


۶۴- در ذوزنقهٔ $ABCD$ ، اگر $AB = ۳$ ، $DC = ۶$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{۱}{۳}$ باشد، آن‌گاه MN کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۵- در ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel CD)$، نقطهٔ M طوری روی AD قرار دارد که $\frac{AM}{MD} = \frac{۷}{۳}$. از نقطهٔ M خطی موازی دو قاعده رسم می‌کنیم تا ساق دیگر را در N و قطرها را در P و Q قطع کند. نسبت $\frac{MP}{NQ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۷}{۳}$



۶۶- در ذوزنقهٔ شکل مقابل $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = ۲$ است. اندازهٔ PQ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}$ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۶۷- در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)*

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۱/۶ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

۶۸- در ذوزنقه‌ای قاعدهٔ بزرگ دو برابر قاعدهٔ کوچک است. خطی موازی قاعده‌ها رسم شده است. اگر بر اثر برخورد آن با قطرها و ساق‌های ذوزنقه، سه پاره‌خط مساوی روی آن ایجاد شده باشد، آن‌گاه این خط ساق‌های ذوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) گزینه‌های (۱) و (۳) درست هستند.

۶۹- در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ O محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده رسم می‌کنیم تا ساق‌های مثلث را در E و F قطع کند. اگر $CD = ۴AB$ و $BC = ۲AD$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $OE = \frac{۱}{۳}OF$ ۲) $OE = \frac{۱}{۲}OF$ ۳) $OE = \frac{۲}{۳}OF$ ۴) $OE = OF$

۷۰- در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه اگر از نقطهٔ O محل تلاقی قطرها، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟ *(سراسری تجربی ۹۷)*

۱) کوچک‌تر از ۱ ۲) مساوی ۱ ۳) بزرگ‌تر از ۱ ۴) متغیر نسبت به اضلاع

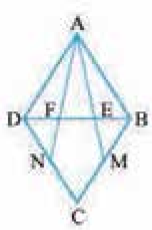
۷۱- در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ O محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده رسم می‌کنیم تا ساق‌های ذوزنقه را در M و N قطع کند. اگر برای قاعده‌های AB و CD در ذوزنقه داشته باشیم $\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{CD} = a$ ، آن‌گاه MN کدام است؟

۱) $\frac{۲}{a}$ ۲) $\frac{۱}{a}$ ۳) a ۴) $۲a$

[Z] سری

۷۲- در مثلث ABC ، میانه‌های نظیر رأس B و رأس C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد، طول ضلع BC چه‌قدر است؟ *(مرحلهٔ اول المپیاد ریاضی ۹۱)*

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹



۷۳- در لوزی شکل مقابل، M و N به ترتیب وسط‌های BC و CD هستند. نسبت $\frac{EF}{BD}$ کدام است؟

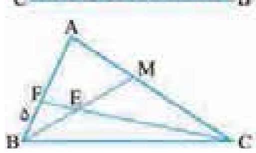
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۷۴- ضلع AC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به وسیلهٔ ۷ نقطه به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌شود. از این نقطه‌ها هفت پاره‌خط موازی AB رسم می‌شود. در صورتی که $AB = ۱۰$ باشد، مجموع طول‌های هفت پاره‌خط ایجادشده کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۴

۳) ۳۵ ۴) ۴۵



۷۵- در شکل روبه‌رو BM میانه و $BE = EM$ است. اگر $BF = ۵$ باشد، AB کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۲- گزینهٔ با توجه به این‌که BC و DE موازی هستند، سراغ تالس می‌رویم. با نوشتن تالس جزءبه‌کل (تعمیم تالس) داریم:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{y}{۱۵}=\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow y=\frac{۱۵\times۴}{۱۲}=۵$$

از طرفی $AC=۱۵$ است، پس: $x+y=۱۵\Rightarrow x+۵=۱۵\Rightarrow x=۱۰$

بنابراین: $x-y=۱۰-۵=۵$

۲۳- گزینهٔ با توجه به این‌که دو خط موازی در مثلث داریم، سراغ تالس می‌رویم و چون طول یکی از اضلاع موازی خواسته شده پس تالس جزءبه‌کل (تعمیم تالس) می‌نویسیم. $\frac{۱}{x+۱}=\frac{۲}{x+۴}=\frac{x-۱}{BC}$

از طرفین وسطین $\frac{۱}{x+۱}=\frac{۲}{x+۴}$ نتیجه می‌گیریم: $x+۴=۲x+۲\Rightarrow x=۲$

اگر $x=۲$ را در $\frac{۲}{x+۴}=\frac{x-۱}{BC}$ جای‌گذاری کنیم، طول BC به دست می‌آید: $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{BC}\Rightarrow BC=۳$

۲۴- گزینهٔ در این مثلث دو خط موازی داریم پس به سراغ تالس می‌رویم.

ابتدا تالس جزءبه‌جزء می‌نویسیم که x به راحتی به دست بیاید: $\frac{x}{۴}=\frac{۹}{x}\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=۶$

حال با نوشتن تالس جزءبه‌کل و جای‌گذاری $x=۶$، y را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{x+۴}=\frac{۹}{x+۹}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\Rightarrow\frac{۹}{۶+۹}=\frac{۲y-۱}{۶+۲}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow ۲y=\frac{۲۹}{۵}\Rightarrow y=\frac{۲۹}{۱۰}=۲/۹$$

۲۵- گزینهٔ $DE\parallel BC$ است، با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{x-۱}{۲x}=\frac{x+۱}{۴x}\Rightarrow ۴x^۲-۴x=۲x^۲+۲x$$

$$۲x^۲-۶x=۰\Rightarrow ۲x(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ ق ق}\\ x=۳\end{cases}$$

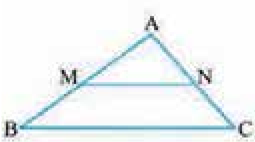
از آن‌جا که $x=۳$ شد، پس: $AD=۲\ ,\ BD=۴\ ,\ BC=۱۲\ ,\ AB=۶$

با نوشتن فیثاغورس در مثلث ABC، اندازهٔ پاره‌خط AC به دست می‌آید.

$$AC^۲=BC^۲-AB^۲\Rightarrow AC^۲=۱۴۴-۳۶=۱۰۸\Rightarrow AC=\sqrt{۱۰۸}=۶\sqrt{۳}$$

۲۶- گزینهٔ در صورتی MN با BC موازی است که روی دو ضلع مثلث، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند (عکس قضیهٔ تالس)؛ یعنی یکی از دو حالت زیر باید برقرار باشد تا MN موازی BC باشد.

$$\begin{cases}۱)\ \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\\ ۲)\ \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\end{cases}$$



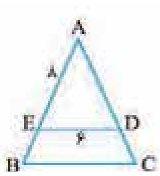
۱) $\frac{۴}{۲}\neq\frac{۸}{۲}$ پس MN موازی با BC نیست.

۲) $\frac{۹}{۱۸}\neq\frac{۴}{۱۲}$ پس MN موازی با BC نیست.

۳) با توجه به شکل $AN=۶$ است. $\frac{۴}{۱۲}\neq\frac{۶}{۹}$ نیست پس MN موازی با BC نیست.

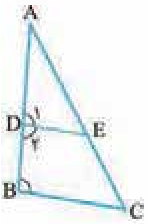
۴) $\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۶}$ پس BC و MN موازی‌اند.

۲۷- گزینهٔ اگر خاطرتان باشد در درس‌نامه گفتیم که یکی از صورت‌های پنهانی برای این‌که بگویند دو خط موازی است، استفاده از قضیهٔ خطوط موازی و مورب است. چون زوایای $\hat{B}$ و $\hat{E}$ مساوی‌اند پس دو پاره‌خط ED و BC موازی‌اند. پس می‌توانیم در این مثلث از تعمیم تالس (جزءبه‌کل) استفاده کنیم.



$$\frac{AE}{AB}=\frac{ED}{BC}\Rightarrow\frac{۸}{۸+BE}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow ۷۲=۴۸+۶BE\Rightarrow ۶BE=۲۴\Rightarrow BE=۴$$

۲۸- گزینهٔ ۴ در درس‌نامه داشتیم یکی از صورت‌های پنهانی برای این‌که بگویند دو خط موازی‌اند، استفاده از مفهوم دو زاویهٔ مکمل است.



$$\begin{cases} \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ : (\text{فرض مسئله}) \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{B}$$

پس طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، DE و BC موازی‌اند.

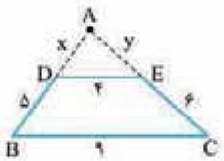
چون نسبت DE به BC در صورت سؤال داده شده $(\frac{DE}{BC} = \frac{۳}{۴})$ بنابراین از تعمیم تالس (جزءبه‌کل) استفاده می‌کنیم.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{AD}{۲۰} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow AD = ۱۵$$

در نتیجه:

$$BD = AB - AD = ۲۰ - ۱۵ = ۵$$

۲۹- گزینهٔ ۴ شکل ذوزنقه را با توجه به اطلاعات مسئله رسم می‌کنیم.



DE و BC موازی‌اند. در مثلث ABC تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم. داریم:

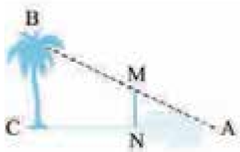
$$\frac{x}{x+۵} = \frac{۴}{۹} = \frac{y}{y+۶}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۰ \Rightarrow ۵x = ۲۰ \Rightarrow x = ۴ \\ \frac{y}{y+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۴ \Rightarrow ۵y = ۲۴ \Rightarrow y = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸ \end{cases}$$

$$ADE \text{ محیط مثلث} = x + y + ۴ = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

۳۰- گزینهٔ ۳ اگر شکل را نام‌گذاری کنیم، به وضوح مشخص است که $MN \parallel BC$ است. چون طول درخت یعنی طول یکی از اضلاع موازی خواسته شده پس تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم.



$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۳}{۶۰} = \frac{۱}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۶۰ \times ۱}{۳} = ۲۰$$

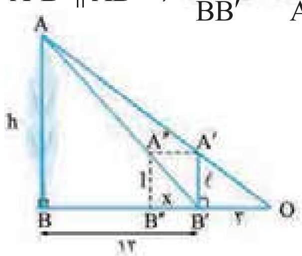
بنابراین بلندی درخت موردنظر ۳۰ متر است.

۳۱- گزینهٔ ۱ با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث AOB داریم:

$$A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۱۵} = \frac{\ell}{h}$$

هم‌چنین با نوشتن تالس در مثلث $AB'B$ خواهیم داشت:

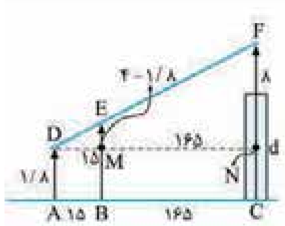
$$A''B'' \parallel AB \Rightarrow \frac{B'B''}{BB'} = \frac{A''B''}{AB} \Rightarrow \frac{x}{۱۲} = \frac{\ell}{h}$$



از مقایسهٔ طرفین دو تساوی بالا داریم:

$$\frac{x}{۱۲} = \frac{۳}{۱۵} \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

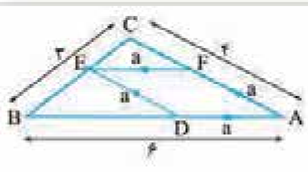
۳۲- گزینهٔ ۲ از نقطهٔ D موازی AC، خطی رسم می‌کنیم تا FC را در N و BE را در M قطع کند. به وضوح مشخص است که $AD = MB = NC = ۱/۸$. حال اگر طول برج d باشد، با نوشتن تالس جزءبه‌کل در مثلث $\overset{\Delta}{DNF}$ داریم:



$$\overset{\Delta}{DNF} : ME \parallel NF \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{ME}{NF} \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۸۰} = \frac{۴ - ۱/۸}{۸ + d - ۱/۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲/۲}{۶/۲ + d} \Rightarrow ۶/۲ + d = ۲۶/۴ \Rightarrow d = ۲۰/۲$$

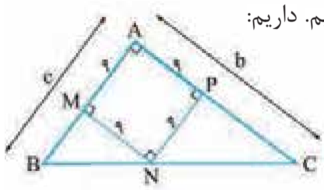
۳۳- گزینهٔ ۴ طبق فرض مسئله چهارضلعی $ADEF$ لوزی است پس اضلاع آن با هم برابرند و اضلاع روبه‌رو با هم موازی‌اند. اگر در مثلث ABC، تالس جزءبه‌کل بنویسیم، داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC} : DE \parallel AC \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{۶ - a}{۶} = \frac{a}{۴} \Rightarrow ۲۴ - ۴a = ۶a$$

$$\Rightarrow ۱۰a = ۲۴ \Rightarrow a = ۲/۴ = AD \Rightarrow AD = \frac{۱۲}{۵}$$

۳۴- گزینه مثلث ABC و مربع موردنظر سؤال را رسم می‌کنیم. APNM مربعی به طول ضلع ۹ است. چون اضلاع روبه‌رو به هم در مربع موازی‌اند پس $PN \parallel AB$ و $MN \parallel AC$ است. در مثلث ABC، دو بار تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم. داریم:

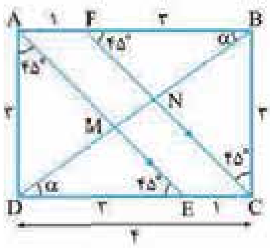


$$\begin{cases} MN \parallel AC \Rightarrow \dfrac{MN}{AC}=\dfrac{BN}{BC} \Rightarrow \dfrac{۹}{b}=\dfrac{BN}{BC} \\ PN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{PN}{AB}=\dfrac{CN}{BC} \Rightarrow \dfrac{۹}{c}=\dfrac{CN}{BC} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{۹}{b}+\dfrac{۹}{c}=\dfrac{BN+CN}{BC}=\dfrac{BC}{BC}=۱ \Rightarrow \dfrac{۱}{b}+\dfrac{۱}{c}=\dfrac{۱}{۹}$$

۳۵- گزینه AD، BH و CE هر سه بر DE عمودند، پس با هم موازی‌اند، بنابراین در مثلث‌های ADE و DCE تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADE}: BH \parallel AD \Rightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{HE}{DE} \\ \overset{\Delta}{DCE}: BH \parallel CE \Rightarrow \dfrac{b}{c}=\dfrac{DH}{DE} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{HE+DH}{DE}=\dfrac{DE}{DE}=۱ \Rightarrow \dfrac{۱}{a}+\dfrac{۱}{c}=\dfrac{۱}{b}$$

۳۶- گزینه پاره‌خط‌های CF و AE نیمساز هستند پس مثلث‌های BCF و ADE قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌شوند، بنابراین:



$\overset{\Delta}{BCF}: BC = BF = ۳$

$\overset{\Delta}{ADE}: AD = DE = ۳$

از همنهشت‌بودن دو مثلث DME و FNB (بنا بر حالت «ز ض ز») می‌توان نتیجه گرفت: $DM = BN$.

اگر در مثلث CDN، تالس جزءبه‌کل بنویسیم، داریم:

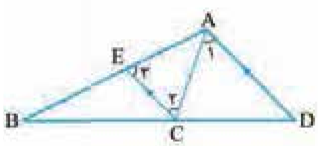
$$\overset{\Delta}{CDN}: ME \parallel NC: \dfrac{DM}{DN}=\dfrac{DE}{DC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \dfrac{DM}{DM+DN}=\dfrac{DE}{DE+DC} \xrightarrow{DM=BN} \dfrac{DM}{BD}=\dfrac{۳}{۷}$$

با توجه به قضیهٔ فیثاغورس:

$$\overset{\Delta}{BCD}: BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ \Rightarrow BD^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow BD = ۵$$

$$\dfrac{DM}{BD}=\dfrac{۳}{۷} \xrightarrow{BD=۵} \dfrac{DM}{۵}=\dfrac{۳}{۷} \Rightarrow DM=\dfrac{۱۵}{۷}, \ MN = BD - ۲DM = ۵ - \dfrac{۳۰}{۷} = \dfrac{۵}{۷}$$

۳۷- گزینه AC خط مورب است و چون $\hat{A}_۱$ و $\hat{C}_۲$ برابرند پس AD و EC موازی‌اند. با توجه به این‌که سؤال از ما $\dfrac{BD}{CD}$ (کل‌به‌جزء) خواسته، از شکل سوم تالس (یعنی جزء پایین مثلث به کل) استفاده می‌کنیم.

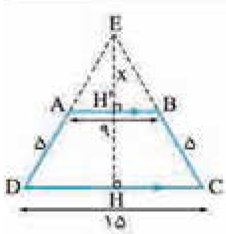


از طرفی چون $\hat{C}_۲ = \hat{E}_۳$، پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و AC و AE هر دو برابر ۶ هستند.

بنابراین با نوشتن تالس جزءبه‌کل داریم:

$$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AE}{AB} \xrightarrow{AE=۶} \dfrac{CD}{BD}=\dfrac{۶}{۱۵}=\dfrac{۲}{۵} \Rightarrow \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{۵}{۲}$$

۳۸- گزینه ابتدا ذوزنقه و نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم. در مثلث ECD خطوط AB و CD موازی‌اند، با نوشتن تالس جزءبه‌کل داریم:

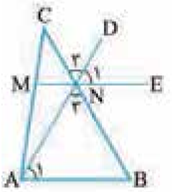


$$\overset{\Delta}{ECD}: AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{AB}{CD} \Rightarrow \dfrac{AE}{AE+۵}=\dfrac{۹}{۱۵} \Rightarrow ۶AE=۴۵ \Rightarrow AE=۷/۵$$

مثلث EAB متساوی‌الساقین است $(\hat{A}=\hat{B})$ بنابراین ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AB حکم میانه را نیز دارد، پس: $AH' = \dfrac{AB}{۲} = \dfrac{۹}{۲} = ۴/۵$. حال طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overset{\Delta}{EAH'}: AE^۲ = EH'^۲ + AH'^۲ \Rightarrow (۷/۵)^۲ = x^۲ + (۴/۵)^۲ \Rightarrow ۵۶/۲۵ = x^۲ + ۲۰/۲۵ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

۳۹- گزینه با نام‌گذاری زوایا داریم:

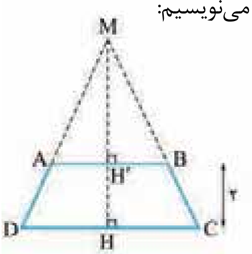


$$\left.\begin{array}{l} ME \parallel AB \text{ و مورب } AD \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{N}_۱ \\ \text{نیمساز } AD \Rightarrow \hat{N}_۱ = \hat{N}_۲ \\ \text{متقابل به رأس } \hat{N}_۲ = \hat{N}_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{N}_۳ \Rightarrow \text{مثلث } ANB \text{ متساوی‌الساقین است} \Rightarrow AB = BN = ۱۰$$

حالا در مثلث ABC تالس جزء‌به‌کل می‌نویسیم:

$$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{CN}{CN + NB} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{CN}{CN + ۱۰} = \frac{۴}{۱۰} \xrightarrow{\text{تفاضل در مخرج}} \frac{CN}{۱۰} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow CN = \frac{۴۰}{۶} = \frac{۲۰}{۳}$$

۴۰- گزینه HH' ارتفاع ذوزنقه است پس $HH' = ۲$. حالا در مثلث‌های MDH و MDC تالس جزء‌به‌کل می‌نویسیم:



$$\left\{\begin{array}{l} \overset{\Delta}{MDH} : AH' \parallel DH \Rightarrow \frac{MH'}{MH} = \frac{MA}{MD} \\ \overset{\Delta}{MDC} : AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{MA}{MD} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{MH'}{MH} = \frac{AB}{DC} = \frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{MH - HH'}{MH} = \frac{۶}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{MH - ۲}{MH} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳MH - ۶ = ۲MH \Rightarrow MH = ۶$$

۴۱- گزینه در مثلث ADC چون MO و DC هر دو بر AC عمودند پس با هم موازی‌اند. با نوشتن تالس جزء‌به‌کل در مثلث ADC خواهیم داشت:

$$\frac{DM}{AD} = \frac{CO}{AC} = \frac{۲}{۳}$$

در مثلث ABC نیز اگر تالس جزء‌به‌کل بنویسیم داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{NB}{AB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۴}{AB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AB = ۶ \Rightarrow AN = AB - NB = ۶ - ۴ = ۲$$

$$\frac{AN}{AB} = \frac{ON}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۶} = \frac{ON}{۶} \Rightarrow ON = ۲$$

حالا که طول AN و ON را داریم مساحت مثلث OAN به راحتی به دست می‌آید.

$$S_{OAN} = \frac{۱}{۲} \times AN \times ON = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$$

۴۲- گزینه در مثلث‌های $\overset{\Delta}{OBD}$ و $\overset{\Delta}{OED}$، خطوط موازی داریم. با نوشتن تالس جزء‌به‌جزء در دو مثلث فوق به جواب سؤال می‌رسیم.

$$\overset{\Delta}{OBD} : AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OC}{CD} = \frac{OA}{AB} \quad (۱) \qquad \overset{\Delta}{OED} : BC \parallel ED \Rightarrow \frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE} \quad (۲)$$

طرف اول دو رابطهٔ (۱) و (۲) یکی است، بنابراین طرف‌های دوم نیز با هم برابرند.

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۳ + ۵}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

۴۳- گزینه با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث‌های ANB و ABC داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ANB} : DE \parallel BN \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AD}{AB} \\ \overset{\Delta}{ABC} : DN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AB} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC}$$

$$\Rightarrow AN^۲ = AE \times AC \xrightarrow[AN=AE+EN]{AE=۴,\ EN=۶} ۱۰^۲ = ۴ \times AC \Rightarrow AC = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵$$

می‌توانستیم از مثال حل‌شده در درس‌نامه کمک بگیریم و خیلی سریع بگوییم در این مثلث با دو جفت خط موازی سروکار داریم پس AN واسطهٔ هندسی AE و AC است؛ یعنی:

$$AN^۲ = AE \times AC \xrightarrow[AN=AE+EN]{AE=۴,\ EN=۶} ۱۰^۲ = ۴ \times AC \Rightarrow AC = ۲۵$$

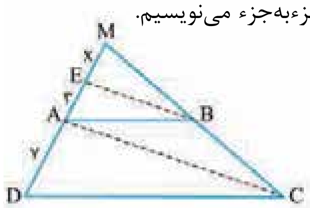
۴۴- گزینه در مثلث داده‌شده دو جفت خط موازی داریم. واضح است که AC واسطهٔ هندسی AB و AD است، بنابراین:

$$AC^۲ = AB \times AD \Rightarrow (۵ + ۳)^۲ = ۵ \times AD \Rightarrow AD = \frac{۶۴}{۵} = ۱۲/۸$$

در نتیجه داریم:

$$CD = AD - AC = ۱۲/۸ - ۸ = ۴/۸$$

۴۵- گزینهٔ با توجه به این‌که $AB \parallel CD$ و $BE \parallel AC$، در دو مثلث AMC و MDC تالس جزءبه‌جزء می‌نویسیم.

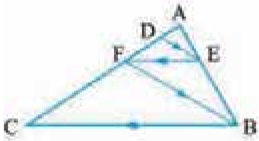


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AMC}: BE \parallel AC \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ \overset{\Delta}{MDC}: AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷}$$

$$\Rightarrow ۷x = ۳x + ۹ \Rightarrow ۴x = ۹ \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

$$MD = ME + AE + AD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$$

۴۶- گزینهٔ در این مثلث دو جفت خط موازی داریم، پس بدون نوشتن تالس می‌گوییم AF واسطهٔ هندسی AD و AC است یعنی:



$$AF^۲ = AD \times AC \xrightarrow[AF=AD+DF]{AD=۳,\ DF=۶} ۹^۲ = ۳ \times AC \Rightarrow AC = ۲۷$$

سؤال از ما $\dfrac{BC}{EF}$ را خواسته، اگر در مثلث ABC تعمیم تالس (جزءبه‌کل) بنویسیم داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۲۷} = \frac{EF}{BC}$$

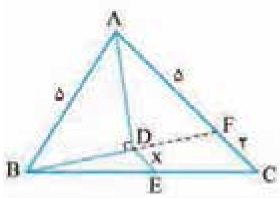
$$\frac{EF}{BC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{۳}{۱}$$

۴۷- گزینهٔ در دو مثلث AMB و AMC تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AMB}: A'B' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{MB'}{MB} = \dfrac{MA'}{MA} \\ \overset{\Delta}{AMC}: A'C' \parallel AC \Rightarrow \dfrac{MC'}{MC} = \dfrac{MA'}{MA} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MB'}{MB} = \frac{MC'}{MC} \xrightarrow[MB=MC]{\text{میانه است } AM} MB' = MC'$$

بنابراین یاد گرفتیم که از هر نقطهٔ دلخواه مانند A' بر روی میانه ، اگر خطوطی موازی دو ضلع رسم کنیم، همواره $A'M$ میانهٔ مثلث $A'B'C'$ خواهد بود، پس در مورد AA' نمی‌توان اظهارنظر کرد و هر اندازه‌ای می‌تواند به خود اختصاص دهد.

۴۸- گزینهٔ امتداد BD، ضلع AC را در F قطع می‌کند. در مثلث ABF، AD نیمساز و ارتفاع است. پس مثلث ABF متساوی‌الساقین است و $AB = AF = ۵$ و در نتیجه $FC = ۷ - ۵ = ۲$ است.



با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث BFC داریم:

$$DE \parallel FC \Rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۱$$

۴۹- گزینهٔ از نقطهٔ M خطی موازی BE رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند.

P وسط AM و M وسط BC است، پس:

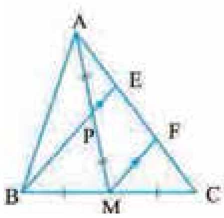
$$\begin{cases} AP = PM \\ BM = CM \end{cases}$$

با نوشتن تالس در مثلث‌های AMF و CBE داریم:

$$\overset{\Delta}{AMF}: PE \parallel MF \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AP}{PM} \xrightarrow{AP=PM} AE = EF \quad (۱)$$

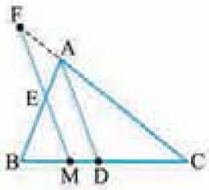
$$\overset{\Delta}{CBE}: MF \parallel BE \Rightarrow \frac{CF}{FE} = \frac{CM}{MB} \xrightarrow{BM=CM} CF = EF \quad (۲)$$

حالا در یک قدمی پاسخ هستیم!



$$\frac{AE}{CE} = \frac{AE}{CF+FE} \xrightarrow{(۲),(۱)} \frac{AE}{CE} = \frac{AE}{۲AE} = \frac{۱}{۲}$$

۵۰- گزینه ابتدا شکل را براساس داده‌های مسئله رسم می‌کنیم. در دو مثلث BAD و CMF خطوط موازی داریم بنابراین در این دو مثلث تالس جزء‌به‌کل می‌نویسیم.



$$\overset{\Delta}{BAD}: ME \parallel AD: \frac{BM}{BD}=\frac{ME}{AD}$$

$$\overset{\Delta}{CMF}: MF \parallel AD: \frac{CD}{CM}=\frac{AD}{MF}$$

$$\xrightarrow[BD=DC]{\text{میانه } AD}\begin{cases}\dfrac{BM}{BD}=\dfrac{ME}{AD}\\[2mm] \dfrac{CM}{BD}=\dfrac{MF}{AD}\end{cases}\xrightarrow{+}\frac{ME+MF}{AD}=\frac{\overbrace{BM+CM}^{BC}}{BD}=\frac{۲BD}{BD}=۲$$

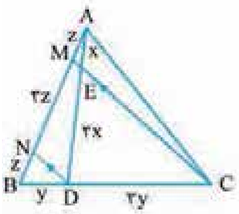
بنابراین:

$$\frac{ME+MF}{AD}=۲ \quad \text{یا} \quad ME+MF=۲AD$$

۵۱- گزینه با توجه به این‌که $\frac{BD}{BC}=\frac{۱}{۴}$ و $\frac{AE}{AD}=\frac{۱}{۴}$ است، با فرض $AE=x$ و $BD=y$ داریم: $ED=۳x$ و $DC=۳y$. در مثلث AND، $DN \parallel EM$ است، با نوشتن تالس جزء به جزء در این مثلث خواهیم داشت:

$$\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{ED}=\frac{۱}{۳}$$

اگر فرض کنیم $AM=z$، واضح است که $MN=۳z$.



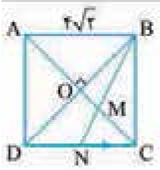
در مثلث $\overset{\Delta}{BCM}$، $DN \parallel CM$ است، با نوشتن تالس جزء به جزء داریم:

$$\frac{BN}{NM}=\frac{BD}{DC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{BN}{۳Z}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BN=z$$

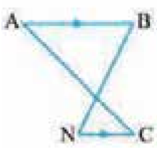
شاید باور نکنید! ولی در یک قدمی پاسخ هستیم.

$$\frac{AB}{AM}=\frac{z+۳z+z}{z}=\frac{۵z}{z}=۵$$

۵۲- گزینه ابتدا سعی می‌کنیم شکل سؤال را رسم کنیم.



اگر در شکلی دو یا چند خط موازی دیدیم یاد تالس می‌افتیم. پروانهٔ  یا  با دو خط موازی هم باید ما را یاد مرحوم تالس بیندازد!



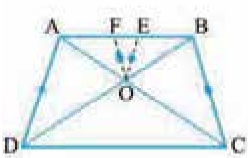
در مربعی که رسم کردیم یک پروانه با دو خط موازی داریم. با نوشتن تالس خواهیم داشت (دقت داریم که $AB=DC$ است و N وسط DC است):

$$\frac{MC}{AM}=\frac{NC}{AB}\Rightarrow \frac{MC}{AM}=\frac{NC}{۲NC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases}MC=\dfrac{۱}{۳}AC\\[2mm] AM=\dfrac{۲}{۳}AC\end{cases}$$

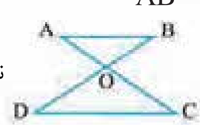
از طرفی AC قطر مربع است پس $AC=\sqrt{۲}\times ۴\sqrt{۲}=۸$، در نتیجه $AO=OC=۴$ و در انتها داریم:

$$MO=OC-MC=۴-\frac{۸}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

۵۳- گزینه در مثلث‌های ABC و ABD خطوط موازی داریم. می‌توانیم تالس جزء‌به‌کل بنویسیم.



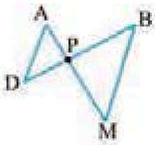
$$\overset{\Delta}{ABC}: OF \parallel BC \Rightarrow \frac{BF}{AB}=\frac{OC}{AC} \quad (۱) \qquad \overset{\Delta}{ABD}: OE \parallel AD \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{OD}{DB} \quad (۲)$$

اما باید دقت کنیم در پروانهٔ  نیز می‌توانیم تالس بنویسیم (زیرا AB و DC قاعده‌های ذوزنقه هستند و موازی‌اند).

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OB}{DB}$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم طرف دوم روابط (۱) و (۲) برابرند، پس طرف‌های اول نیز برابرند. یعنی:

$$\frac{BF}{AB}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow BF=AE \Rightarrow \frac{AE}{FB}=۱$$

۵۴- گزینهٔ
در مثلث ABC و پروانهٔ  می‌توانیم تالس بنویسیم.

$$\left.\begin{array}{l} NC \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{BC}{BM} \\ AD \parallel BM \Rightarrow \dfrac{AP}{PM} = \dfrac{AD}{BM} \end{array}\right\} \xrightarrow{AD=BC} \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AP}{PM}$$

اگر به جای AM، $AP + PM$ جای‌گذاری کنیم (این کار را کردیم که بتوانیم از طرفین وسطین کردن کسرها AP^2 بسازیم) داریم:

$$\frac{AN}{AP+PM} = \frac{AP}{PM} \Rightarrow AP^2 + AP \times PM = AN \times PM$$

$$\Rightarrow AP^2 = AN \times PM - AP \times PM \Rightarrow AP^2 = (AN - AP) \times PM = PN \times PM$$

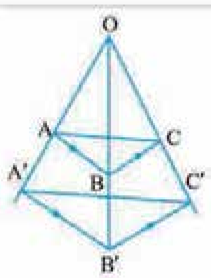
۵۵- گزینهٔ
اگر به شکل دقت کنیم AM و DN موازی‌اند و می‌توانیم در مثلث‌های AMC و BDN تالس بنویسیم.

$$\overset{\Delta}{AMC} : EN \parallel AM \xrightarrow{\text{تالس جزءبه‌کل}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \qquad \overset{\Delta}{BDN} : AM \parallel DN \xrightarrow{\text{تالس جزءبه‌جزء}} \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM}$$

از تقسیم دو رابطهٔ بالا داریم (دقت داریم $MB = MC$):

$$\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{AE}{AC}} = \frac{\frac{MN}{BM}}{\frac{MN}{MC}} \Rightarrow \frac{AD \times AC}{AB \times AE} = \frac{\cancel{MN} \times \cancel{MC}}{\cancel{BM} \times \cancel{MN}} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

۵۶- گزینهٔ
با نوشتن تالس در مثلث‌های $A'OB'$ و $B'OC'$ داریم:

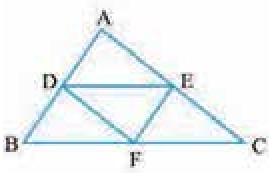


$$\left\{\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \Rightarrow \dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} \\ BC \parallel B'C' \Rightarrow \dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{OB}{OB'} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AC \parallel A'C'$$

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OB}{BB'} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{5}{7}$$

$$AC \parallel A'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{A'C'}{AC} = \frac{7}{5}$$

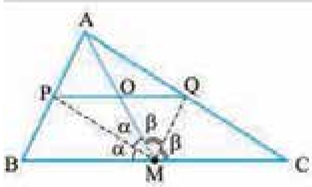
۵۷- گزینهٔ
با توجه به رابطهٔ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC} = 1$ و براساس **عکس قضیهٔ تالس**، واضح است که $DE \parallel BC$، $DF \parallel AC$ و $EF \parallel AB$ و در نتیجه چهارضلعی‌های $DEFB$ و $DECF$، هر دو متوازی‌الاضلاع هستند.



$$\text{محیط } DEFB = 2BF + 2BD = BC + AB = 12 + 8 = 20$$

$$\text{محیط } DECF = 2FC + 2EC = BC + AC = 12 + 10 = 22$$

بنابراین مجموع محیط‌های این دو چهارضلعی برابر با ۴۲ است.

۵۸- گزینهٔ


نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

$$MP \text{ نیمساز } \hat{M} \text{ در مثلث } AMB \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BM} \qquad (1)$$

$$MQ \text{ نیمساز } \hat{M} \text{ در مثلث } AMC \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{CM} \qquad (2)$$

$$M \text{ وسط } BC \Rightarrow BM = CM \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

چون M میانه است، پس AO نیز میانهٔ APQ است و O وسط PQ می‌باشد. اما $\alpha + \beta = 90^\circ$ پس PMQ در رأس M قائم‌الزاویه است و چون OM میانهٔ نظیر وتر است، پس: $OM = \frac{1}{2}PQ = OP$

۵۹- گزینهٔ
با سه خط موازی سروکار داریم. این سه خط موازی روی اضلاع AB و AC قطعات متناسب ایجاد می‌کنند، یعنی:

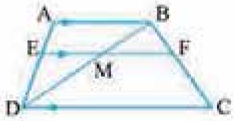
$$\overset{\Delta}{ABC} : MN \parallel PQ \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{MP}{NQ} = \frac{BP}{QC}$$

۶۰- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که با چند خط موازی سروکار داریم از حالت کلی تالس استفاده می‌کنیم.

$$\frac{AD}{AE}=\frac{MB}{NC}\Rightarrow\frac{AD}{MB}=\frac{AE}{NC}\Rightarrow\frac{۲/۵}{۵}=\frac{۳}{NC}\Rightarrow NC=\frac{۳\times۵}{۲/۵}=۶$$

می‌توانستیم بگوییم ۵ دو برابر ۲/۵ است پس NC هم باید دو برابر ۳ یعنی ۶ باشد.

۶۱- گزینهٔ ۴ چون $EF \parallel AB$ است پس EM نیز با AB موازی است. اگر در مثلث ABD ، تالس جزء‌به‌کل بنویسیم، داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD}: ME \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{BD}=\frac{ME}{AB}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{BD-MD}{BD}=\frac{AB-ME}{AB}\Rightarrow\frac{BM}{BD}=\frac{AB-ME}{AB}$$

پس ۴ درست است.

۶۲- گزینهٔ ۳ پاره‌خطی که وسط اضلاع ذوزنقه را به هم وصل می‌کند با دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی است. در ذوزنقهٔ ABCD با سه خط موازی سروکار داریم بنابراین با توجه به حالت کلی قضیهٔ تالس، اجزای ایجادشده روی دو ضلع ذوزنقه متناسب‌اند $(\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC})$. بنابراین از روی شکل کاملاً مشخص است که ارتفاع ذوزنقه‌های MBCN و AMND برابر است، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت مجموع قاعدهٔ هر مثلث است.

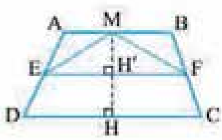
$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}=\frac{\frac{MN+BC}{۲}}{\frac{AD+MN}{۲}}=\frac{\frac{AD+BC}{۲}+BC}{\frac{AD+BC}{۲}+AD}=\frac{AD+۳BC}{BC+۳AD}\xrightarrow{\text{فرض}}\frac{AD+۳BC}{BC+۳AD}=۲$$

$$\Rightarrow AD+۳BC=۲BC+۶AD\Rightarrow BC=۵AD\Rightarrow\frac{BC}{AD}=۵$$

۶۳- گزینهٔ ۲ اگر وسط اضلاع ذوزنقه را به هم وصل کنیم، AB ، EF و DC دوبه‌دو با هم موازی‌اند، بنابراین براساس حالت کلی تالس اجزای ایجادشده روی دو ضلع متناسب‌اند.

$$\frac{AE}{BF}=\frac{ED}{FC}\ ,\ \frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

همان‌طور که از شکل نیز مشخص است می‌توان نتیجه گرفت ارتفاع مثلث EMF نصف ارتفاع ذوزنقهٔ ABCD است. یعنی $MH=۲MH'$ ، بنابراین:



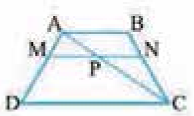
$$\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{مثلث}}}=\frac{\frac{MH\times(AB+DC)}{۲}}{\frac{MH'\times EF}{۲}}=\frac{MH\times EF}{MH'\times EF}=\frac{۲MH'\times EF}{MH'\times EF}=۴$$

می‌دانستیم که طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع ذوزنقه را به هم وصل می‌کند برابر با میانگین طول‌های دو قاعدهٔ ذوزنقه است، یعنی:

$$EF=\frac{AB+DC}{۲}$$

۶۴- گزینهٔ ۳ چون $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۳}$ یعنی MN موازی با قاعده‌های ذوزنقه رسم شده و AB ، MN و DC دوبه‌دو موازی‌اند.

از A به C وصل می‌کنیم تا MN را در P قطع کند. با استفاده از تعمیم تالس (جزء‌به‌کل) در دو مثلث ACD و ABC داریم:



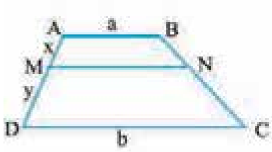
$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ACD}: MP \parallel DC \Rightarrow \frac{MP}{DC}=\frac{AM}{AD}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow MP=\frac{DC}{۳}=۲\\ \overset{\Delta}{ABC}: PN \parallel AB \Rightarrow \frac{PN}{AB}=\frac{NC}{BC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow PN=\frac{۲}{۳}AB=۲\end{cases}$$

به این ترتیب: $MN=MP+PN=۴$

روش دوم

بد نیست یاد بگیرید!

اگر MN موازی اضلاع ذوزنقه باشد آن‌گاه:



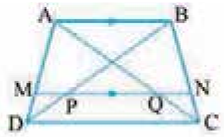
$$MN=\frac{ay+bx}{x+y}$$

مسئله گفته $\frac{۱}{۳}=\frac{AM}{AD}$ است، فرض کنیم $AM=۱$ و $MD=۲$ باشد.

پس:

$$MN=\frac{۳\times۲+۶\times۱}{۱+۲}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

۶۵- گزینهٔ



AB، MN و DC موازی‌اند. با استفاده از حالت کلی تالس داریم:

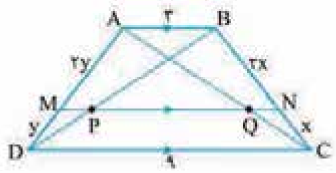
$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{MD}{AD}=\frac{NC}{BC}$$

اگر در دو مثلث ABC و ADB، تعمیم تالس (جزءبه‌کل) بنویسیم، داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC}:NQ\parallel AB\Rightarrow\dfrac{QN}{AB}=\dfrac{CN}{CB}\\ \overset{\Delta}{ADB}:MP\parallel AB\Rightarrow\dfrac{MP}{AB}=\dfrac{MD}{DA}\end{cases}\Rightarrow\frac{NQ}{AB}=\frac{MP}{AB}\Rightarrow NQ=MP$$

در ذوزنقهٔ ABCD (شکل بالا)، با فرض $DC\parallel AB\parallel MN$، بدون توجه به جایگاه M و N همواره داریم: $MP=NQ$.

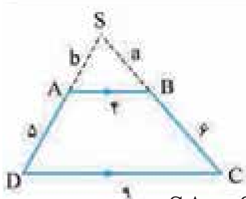
۶۶- گزینهٔ



چون $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=۲$ یعنی MN موازی با قاعده‌های ذوزنقه رسم شده که اجزای اضلاع ذوزنقه متناسب شده‌اند. بنابراین AB، MN و BC دوبه‌دو موازی‌اند. در مثلث‌های $\overset{\Delta}{BDC}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$، تعمیم تالس (جزءبه‌کل) می‌نویسیم، داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{BDC}:PN\parallel DC\Rightarrow\dfrac{PN}{DC}=\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{۲}{۳}\Rightarrow\dfrac{PN}{۹}=\dfrac{۲}{۳}\Rightarrow PN=۶\\ \overset{\Delta}{ABC}:QN\parallel AB\Rightarrow\dfrac{QN}{AB}=\dfrac{NC}{BC}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow\dfrac{QN}{۳}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow QN=۱\end{cases}\Rightarrow PQ=PN-QN=۵$$

۶۷- گزینهٔ



مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD به طول اضلاع $AB=۴$، $CD=۹$ و $AD=۵$ و $BC=۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.

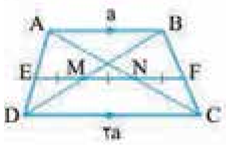
با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث ABC داریم:

$$AB\parallel CD\Rightarrow\frac{SA}{SD}=\frac{SB}{SC}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{b}{b+۵}=\frac{a}{a+۶}=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{b+۵}=\dfrac{۴}{۹}\Rightarrow ۹b=۴b+۲۰\Rightarrow b=۴\\ \dfrac{a}{a+۶}=\dfrac{۴}{۹}\Rightarrow ۹a=۴a+۲۴\Rightarrow a=۴/۸\end{cases}$$

SAB محیط مثلث $=۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$

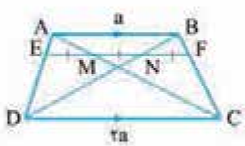
۶۸- گزینهٔ



فرض کنیم EF موازی دو قاعده باشد و $EM=MN=NF$. برابری $EM=NF$ همیشه برقرار است. (در ذوزنقهٔ ABCD، با فرض $DC\parallel AB\parallel MN$، بدون توجه به جایگاه M و N همواره $EM=NF$)، پس باید ببینیم که $EM=MN$ چه زمانی رخ می‌دهد. فرض کنید $\frac{AE}{ED}=k$، در این صورت با نوشتن تعمیم تالس در دو مثلث ADC و ABD خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ADC}:EN\parallel DC\Rightarrow\dfrac{EN}{DC}=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{k}{k+۱}\Rightarrow EN=\dfrac{k}{k+۱}\times ۲a\\ \overset{\Delta}{ABD}:EM\parallel AB\Rightarrow\dfrac{EM}{AB}=\dfrac{ED}{AD}=\dfrac{۱}{k+۱}\Rightarrow EM=\dfrac{۱}{k+۱}\times a\end{cases}\xrightarrow{EN=۲EM}\Rightarrow\frac{k}{k+۱}\times ۲a=۲\times\frac{۱}{k+۱}\times a\Rightarrow k=۱$$

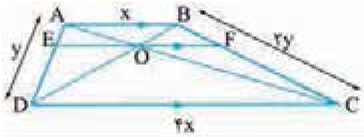
یعنی $\frac{AE}{ED}=۱$ و پاره‌خط EF ساق‌ها را به نسبت $\frac{۱}{۱}$ قطع می‌کند اما این پایان کار نیست، زیرا حالت دیگری نیز وجود دارد که در شکل مقابل می‌بینید. با فرض $\frac{AE}{ED}=k$ و با راهی دقیقاً مشابه حالت قبل داریم:



$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ADC}:EM\parallel DC\Rightarrow\dfrac{EM}{DC}=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{k}{k+۱}\Rightarrow EM=\dfrac{k}{k+۱}\times ۲a\\ \overset{\Delta}{ADB}:EN\parallel AB\Rightarrow\dfrac{EN}{AB}=\dfrac{ED}{AD}=\dfrac{۱}{k+۱}\Rightarrow EN=\dfrac{۱}{k+۱}\times a\end{cases}\xrightarrow{EN=۲EM}\frac{۱}{k+۱}\times a=۲\times\frac{k}{k+۱}\times ۲a\Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین در این حالت، پاره‌خط EF ساق‌ها را به نسبت $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

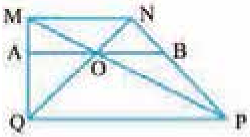
۶۹- گزینهٔ ۴ اگر در هر ذوزنقه‌ای از محل برخورد اقطار خطوطی موازی قاعده‌ها رسم کنیم، همواره دو پاره‌خط ایجادشده با هم برابر است.



$$OE=OF$$

۷۰- گزینهٔ ۳ **بد نیست بدانید!**

در ذوزنقه، تالس برقرار است، یعنی داریم:



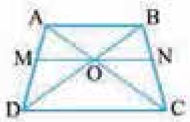
① $\frac{MA}{AQ}=\frac{NB}{BP}$

② $\frac{MA}{MQ}=\frac{NB}{NP}$, $\frac{QA}{QM}=\frac{PB}{PN}$

با نوشتن تالس جزء به کل در دو مثلث QMN و PMN و تقسیم دو رابطه به جواب می‌رسیم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{OA}{MN}=\frac{AQ}{QM}\\ \frac{OB}{MN}=\frac{BP}{PN}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\frac{OA}{OB}=\underbrace{\frac{AQ}{QM}\times\frac{PN}{BP}}_{۱}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=۱$$

۷۱- گزینهٔ ۱ در ذوزنقه، اگر از محل برخورد قطرها، خطی موازی دو قاعده رسم شود تا ساق‌های ذوزنقه را در نقاط M و N قطع کند، آن‌گاه دو نتیجهٔ جالب دارد:



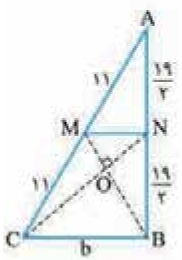
① $OM=ON$

② $\frac{۲}{MN}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC}$ (با نوشتن دو تالس به راحتی به دست می‌آید)

بنابراین:

$$\frac{۲}{MN}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC}\Rightarrow\frac{۲}{MN}=a\Rightarrow MN=\frac{۲}{a}$$

۷۲- گزینهٔ ۱ N و M وسط اضلاع AB و AC هستند.



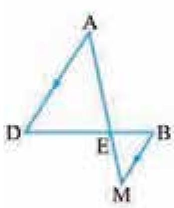
$$\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}BC=\frac{b}{۲}$$

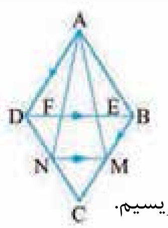
در مثلث‌های $\overset{\Delta}{COB}$ و $\overset{\Delta}{MON}$ فیثاغورس می‌نویسیم و طرفین رابطه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{COB}:b^۲=OC^۲+OB^۲\\ \overset{\Delta}{MON}:(\frac{b}{۲})^۲=OM^۲+ON^۲\end{array}\right\}\xrightarrow{+}b^۲+\frac{b^۲}{۴}=(OM^۲+OC^۲)+(OB^۲+ON^۲)$$

$$\Rightarrow\frac{۵b^۲}{۴}=۱۱^۲+(\frac{۱۹}{۲})^۲\Rightarrow\frac{۵b^۲}{۴}=\frac{۲۲^۲+۱۹^۲}{۴}\Rightarrow b^۲=\frac{۲۲^۲+۱۹^۲}{۵}\Rightarrow b=\sqrt{\frac{۲۲^۲+۱۹^۲}{۵}}=۱۳$$

۷۳- گزینهٔ ۳ M را به N وصل می‌کنیم، چون M و N وسط BC و CD هستند و $\frac{CM}{MB}=\frac{CN}{ND}=۱$ است، پس طبق عکس قضیهٔ تالس، MN و BD موازی هستند.





چون ABCD لوزی است پس BM و AD موازی هستند و می‌توانیم در شکل تالس بنویسیم.

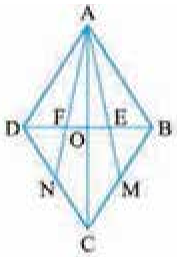
$$BM\parallel AD\Rightarrow\frac{AE}{EM}=\frac{AD}{BM}=۲\Rightarrow\frac{AE}{AM}=\frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{AMN}:EF\parallel MN\Rightarrow\frac{EF}{MN}=\frac{AE}{AM}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow EF=\frac{۲}{۳}MN$$

$$\overset{\Delta}{DBC}:MN\parallel BD\Rightarrow\frac{MN}{BD}=\frac{CM}{CB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow MN=\frac{BD}{۲}$$

که از نتایج به دست آمده داریم:

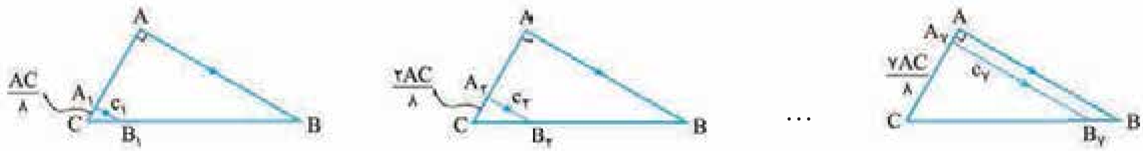
$$EF=\frac{۲}{۳}MN=\frac{۲}{۳}(\frac{BD}{۲})=\frac{BD}{۳}\Rightarrow\frac{EF}{BD}=\frac{۱}{۳}$$



روش دوم A را به C وصل می‌کنیم و محل برخورد آن با BD را O می‌نامیم. F محل برخورد میانه‌های مثلث ADC است، پس $OF=\frac{۱}{۳}DO$ و به همین ترتیب در مثلث ABC داریم: $OE=\frac{۱}{۳}BO$ که با جمع این دو رابطه داریم:

$$EF=\frac{BD}{۳}\Rightarrow \frac{EF}{BD}=\frac{۱}{۳}$$

۷۴- گزینهٔ ۱ برای هر یک از هفت پاره‌خطی که موازی AB هستند، تالس جزء‌به‌کل می‌نویسیم. حواسمان هست که AC به ۸ مساوی تقسیم شده است.



$$\overset{\Delta}{ABC}: A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow \frac{c_1}{AB}=\frac{\frac{AC}{۸}}{AC}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow c_1=\frac{AB}{۸}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: A_2B_2 \parallel AB \Rightarrow \frac{c_2}{AB}=\frac{\frac{۲AC}{۸}}{AC}=\frac{۲}{۸}\Rightarrow c_2=\frac{۲AB}{۸}$$

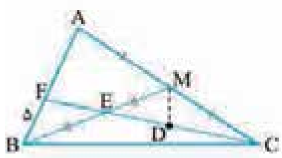
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: A_7B_7 \parallel AB \Rightarrow \frac{c_7}{AB}=\frac{\frac{۷AC}{۸}}{AC}=\frac{۷}{۸}\Rightarrow c_7=\frac{۷AB}{۸}$$

$$\Rightarrow c_1+c_2+c_3+\cdots+c_7=\frac{AB}{۸}(۱+۲+۳+\cdots+۷)=\frac{۱۰}{۸}\times\frac{۷\times۸}{۲}=۳۵$$

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۷۵- گزینهٔ ۱ سؤال قشنگی است و نیاز به خط اضافه دارد تا بتوان از فرض‌های مسئله استفاده کرد. نقطهٔ D را روی EC طوری انتخاب می‌کنیم که $FE=ED$ شود و از M به آن وصل می‌کنیم. حال ادعا می‌کنیم که چهارضلعی $BFMD$ متوازی‌الاضلاع است (چرا؟) و داریم:



$$\begin{cases} MD=BF=۵ \\ MD \parallel BF \Rightarrow MD \parallel AB \end{cases}$$

در مثلث ACF تالس جزء‌به‌کل می‌نویسیم.

$$\overset{\Delta}{ACF}: MD \parallel AF \Rightarrow \frac{CM}{AC}=\frac{MD}{AF}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۵}{AF}\Rightarrow AF=۱۰\ ,\ AB=BF+AF=۵+۱۰=۱۵$$

چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.