فهرست

آمار و احتمال

الگوهای خطی

الگوهای غیر خطی

آمار و احتمال

فصل اول

۱ شمارش

شمارش یعنی شمردن! *خُب، شمردنِ چی؟؟؟* شمردن تعداد حالت‌ها و انتخاب‌هایی که می‌تواند در هر مسئله‌ای اتفاق بیفتد. ***خُب می‌شینیم می‌شمریم!!!*** *ای بابا* در این درس می‌خواهیم تکنیک‌هایی برای شمارش سریع‌تر و دقیق‌تر حالت‌ها یاد بگیریم. توصیهٔ من به شما قبل از واردشدن به این درس این است که اصلاً در پاسخ‌گویی به سؤالات عجله نکنید و در صورت نیاز چندین بار صورت سؤال را با صبر و حوصله بخوانید.

اصل جمع

در منوی یک کافی‌شاپ، سه نوع بستنی و چهار نوع قهوه وجود دارد و شما تصمیم دارید بستنی «یا» قهوه میل کنید. به چند طریق می‌توانید این انتخاب را انجام دهید؟

با توجه به این‌که فقط یک نوع بستنی یا یک نوع قهوه انتخاب خواهید کرد، کافی است تعداد بستنی‌ها را با تعداد قهوه‌ها جمع کنید که یعنی شما ۳ + ۴ = ۷ انتخاب دارید. در این سؤال ما از اصل جمع استفاده کردیم.

اصل جمع

اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، به طوری که **این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم**، در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد.

توجه قبل از استفاده از اصل جمع در صورت سؤال به دنبال لفظ «یا» و یا مفهومی باشید که این دو عمل هم‌زمان انجام نشوند.

مثال و پاسخ

مثال **میترا به چند طریق می‌تواند فقط یک تبلت یا یک گوشی از بین ۱۲ تبلت و ۱۵ گوشی موجود در فروشگاه خریداری کند؟**

پاسخ در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده است. هم‌چنین با توجه به صورت سؤال فقط یکی از دو عمل خرید تبلت یا خرید گوشی اتفاق خواهد افتاد؛ پس با توجه به اصل جمع ۱۲ + ۱۵ = ۲۷ حالت خرید برای میترا از این فروشگاه وجود دارد.

مثال **دبیر ورزش قصد دارد از ۷ نفر دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۱۲ نفر دانش‌آموز پایهٔ یازدهم فقط یک نفر را به عنوان سرگروه ورزشی انتخاب کند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟**

پاسخ در این سؤال خبری از لفظ «یا» نیست. اما با توجه به این‌که فقط یک نفر قرار است از پایهٔ دوازدهم یا یازدهم انتخاب شود و این عمل نمی‌تواند هم‌زمان اتفاق بیفتد (یعنی سرگروه انتخاب‌شده نمی‌تواند هم از پایهٔ یازدهم و هم از پایهٔ دوازدهم باشد)، با توجه به اصل جمع تعداد نفرات هر دو پایه را با هم جمع می‌کنیم.

۷ + ۱۲ = ۱۹

۱۹ حالت برای انتخاب سرگروه وجود دارد.

تعمیم اصل جمع

اصل جمع را می‌توان برای بیشتر از دو عمل نیز به کار برد، به شرطی که این عمل‌ها را نتوانیم با هم انجام دهیم.

مثال و پاسخ

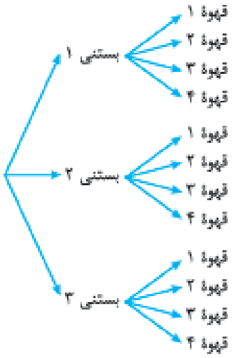
مثال **در یک مدرسه با ۲۲ نفر دانش‌آموز دهم، ۱۹ نفر دانش‌آموز یازدهم و ۱۴ نفر دانش‌آموز دوازدهم به چند طریق می‌توان یک نفر را به عنوان نمایندهٔ دانش‌آموزان انتخاب کرد؟**

پاسخ با توجه به این‌که یک نفر نماینده از سه پایهٔ تحصیلی قرار است انتخاب شود و این کار نمی‌تواند هم‌زمان اتفاق بیفتد (یعنی نمایندهٔ انتخاب‌شده نمی‌تواند هم از پایهٔ دهم و هم یازدهم و هم دوازدهم باشد) طبق اصل جمع داریم: $۲۲+۱۹+۱۴=۵۵$
انتخاب یک نفر نماینده به ۵۵ طریق ممکن است.

اصل ضرب

دوباره به همان کافی‌شاپی که سه نوع بستنی و ۴ نوع قهوه داشت می‌رویم و این بار شما قصد دارید یک نوع بستنی «و» یک نوع قهوه میل کنید. به چند طریق می‌توانید این انتخاب را انجام دهید؟

برای روشن‌ترشدن موضوع، بستنی‌ها و قهوه‌های موجود را شماره‌گذاری می‌کنیم و آن‌ها را در نمودار درختی نمایش می‌دهیم.



برای رسم نمودار درختی، ابتدا در مرحلهٔ اول بستنی‌ها را نوشتیم (انتخاب بستنی) و در مرحلهٔ دوم قهوه‌ها را قرار دادیم (انتخاب قهوه). با ضرب‌کردن تعداد بستنی‌ها در تعداد قهوه‌ها، تعداد حالت‌های انتخاب یک نوع بستنی و یک نوع قهوه به دست می‌آید. $۳×۴=۱۲$ روشی که در به دست آوردن تعداد حالت‌ها استفاده کردیم اصل ضرب نام دارد.

برای درک بهتر اصل ضرب به کافی‌شاپ محلتون برید و انواع بستنی «و» قهوه‌ها رو میل کنید و تعداد حالت‌ها رو بشمرید و بعد با دندان‌های ترک‌خورده به دندان‌پزشکی مراجعه کنید. ☺

اصل ضرب

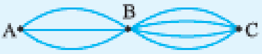
اگر عملی طی دو مرحله انجام پذیرد، طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق «و» مرحلهٔ دوم به n طریق انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است.

توجه قبل از استفاده از اصل ضرب در صورت سؤال به دنبال لفظ «و» یا مفهومی باشید که انتخاب‌ها مرحله به مرحله انجام شود.

مثال و پاسخ

مثال **میترا به چند طریق می‌تواند یک تبلت «و» یک گوشی از بین ۱۲ تبلت و ۱۵ گوشی موجود در فروشگاه خریداری کند؟**

پاسخ در صورت مسئله لفظ «و» بین تبلت و گوشی مشاهده می‌شود. هم‌چنین با توجه به صورت مسئله، در مرحلهٔ اول بایستی تبلت و در مرحلهٔ دوم گوشی انتخاب شود؛ پس طبق اصل ضرب $۱۸۰=۱۵×۱۲$ انتخاب برای خرید یک گوشی و یک تبلت برای میترا وجود دارد.



مثال **با توجه به شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟**

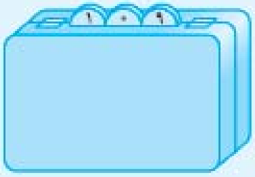
پاسخ برای سفر از شهر A به C، در مرحلهٔ اول از A به B و در مرحلهٔ دوم از B به C را باید طی کرد. پس طبق اصل ضرب:

$$\underset{\text{مسیرها از A به B}}{\underset{\downarrow}{۳}} \times \underset{\text{مسیرها از B به C}}{\underset{\downarrow}{۴}} =۱۲$$

تعمیم اصل ضرب

اصل ضرب را می‌توان برای بیشتر از دو عمل نیز به کار برد به شرطی که هر کدام از آن‌ها مرحله به مرحله انجام بگیرد.

مثال و پاسخ



مثال تعداد حالت‌های ممکن برای رمزگذاری کیف زیر را به دست آورید. (هر کدام از قسمت‌ها از ارقام ۰ تا ۹ قابل رمزگذاری هستند.)

پاسخ تعداد ارقام ۰ تا ۹ برابر ۱۰ است. برای رمزگذاری این کیف هر کدام از قسمت‌ها مرحله به مرحله باید انجام گیرد. پس طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های هر کدام از مراحل را در هم ضرب می‌کنیم. $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰۰$

مثال تعداد حالت‌های پاسخگویی به پنج سؤال یک آزمون چهارگزینه‌ای را در شرایط زیر به دست آورید.

الف) پاسخگویی به سؤالات اجباری باشد. **ب) پاسخگویی به سؤالات اختیاری باشد.**

پاسخ **الف** پاسخگویی به سؤالات اجباری است و آزمون چهارگزینه‌ای یعنی حتماً یکی از گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) انتخاب خواهند شد؛ پس هر سؤال ۴ حالت دارد و هم‌چنین به سؤالات مرحله به مرحله پاسخ داده می‌شود. طبق اصل ضرب داریم: $۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۵$

ب پاسخگویی به سؤالات اختیاری است؛ یعنی علاوه بر گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) یک حالت دیگر پاسخ‌ندادن به سؤال (اختیاری است و اجباری نیست) اضافه می‌شود. پس برای هر سؤال ۵ حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم: $۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۵$

حال که اصل ضرب و اصل جمع را به خوبی فراگرفتیم، در حل برخی سؤالات نیاز داریم که از هر دو اصل استفاده کنیم. فقط حواستان به تفاوت‌هایی که این دو اصل دارند باشد.

مثال و پاسخ

مثال در منوی یک رستوران ۵ نوع غذا و ۴ نوع سوپ و ۳ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع سوپ یا یک نوع غذا و یک نوع دسر سفارش داد؟

پاسخ $\underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع سوپ}}_{\text{قسمت اول}} \text{ یا } \underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع دسر}}_{\text{قسمت دوم}}$

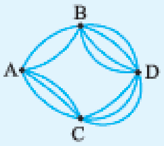
مسئله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم.

قسمت اول: انتخاب یک نوع غذا و یک نوع سوپ مرحله به مرحله انجام می‌شود *(البته «و» هم اون وسط اومده)*.

پس طبق اصل ضرب داریم: $\overset{\overset{\text{غذا}}{\uparrow}}{۵} \times \overset{\overset{\text{سوپ}}{\uparrow}}{۴} = ۲۰$

قسمت دوم: انتخاب یک نوع غذا و یک نوع دسر مرحله به مرحله انجام می‌شود (حرف «و» هم که هست)، پس طبق اصل ضرب داریم: $\overset{\overset{\text{غذا}}{\uparrow}}{۵} \times \overset{\overset{\text{دسر}}{\uparrow}}{۳} = ۱۵$

در آخر با توجه به این‌که قسمت اول و دوم هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد *(حرف «یا» هم که پیشنون می‌بینی)*، طبق اصل جمع تعداد حالت‌های قسمت اول و دوم را جمع می‌کنیم: $۲۰ + ۱۵ = ۳۵$



مثال با توجه به شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟

پاسخ برای سفر از شهر A به D، از شهر B «یا» شهر C باید عبور کرد، این مسئله را به دو قسمت زیر تقسیم می‌کنیم:

قسمت اول: رفتن از A به D با گذشتن از B: رفتن از A به B به ۲ صورت و از B به D به ۴ صورت امکان‌پذیر است و چون مرحله به مرحله انجام می‌شود بنا بر اصل ضرب $۸ = ۴ \times ۲$ حالت می‌توان از A به D با گذشتن از B سفر کرد.

قسمت دوم: رفتن از A به D با گذشتن از C: از A به C، ۳ مسیر و از C به D، نیز ۳ مسیر وجود دارد. رفتن از A به D با گذشتن از C به ۹ حالت امکان‌پذیر است: $۳ \times ۳ = ۹$

قسمت اول و دوم هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد (حرف «یا» هم هست)؛ پس طبق اصل جمع تعداد حالت‌هایی که می‌توان از شهر A به D سفر کرد برابر ۱۷ حالت است: $۸ + ۹ = ۱۷$

نماد فاکتوریل (!)

نماد فاکتوریل (!) که شبیه علامت تعجب است، اگر جلوی هر عددی قرار بگیره به معنی ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا عدد موردنظر است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$۷!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷=۵۰۴۰$

$۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$

$۳!=۱\times۲\times۳=۶$

نکته بنا بر قرارداد مقادیر !۰ و !۱ را برابر یک در نظر می‌گیریم.

$۱!=۱$

$۰!=۱$

نکته هر عدد فاکتوریلی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب اعداد فاکتوریلی کوچک‌تر نوشت. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$۵!=\underbrace{۱\times۲\times۳\times۴}_{۴!}\times۵=۴!\times۵$

$۴!=\underbrace{۱\times۲\times۳}_{۳!}\times۴=۳!\times۴$

$۵!=\underbrace{۱\times۲\times۳}_{۳!}\times۴\times۵=۳!\times۴\times۵$

$۷!=\underbrace{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}_{۵!}\times۶\times۷=۵!\times۶\times۷$

با توجه به تجربه‌ای که در مثال‌های بالا کسب کردیم روابط زیر را بدون نوشتن سری اعداد مشخص می‌کنیم.

$۱۰!=۹!\times۱۰=۸!\times۹\times۱۰=۷!\times۸\times۹\times۱۰$

$۱۲!=۱۱!\times۱۲=۱۰!\times۱۱\times۱۲=۹!\times۱۰\times۱۱\times۱۲$

مثال و پاسخ

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۴!$

ب) $\frac{۳!}{۴!}$

پ) $\frac{۷!}{۵!}$

ت) $\frac{۱۴!}{۱۰!}$

ث) $\frac{۱۲!\times۰!}{۸!\times۲!}$

ج) $\frac{۱۳!\times۱!}{۱۱!\times۲!}$

پاسخ

الف $۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$

ب $\frac{۳!}{۴!}=\frac{\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۴}=\frac{۱}{۴}$

پ $\frac{۷!}{۵!}=\frac{\cancel{۵!}\times۶\times۷}{\cancel{۵!}}=۴۲$

ت $\frac{۱۴!}{۱۰!}=\frac{\cancel{۱۰!}\times۱۱\times۱۲\times۱۳\times۱۴}{\cancel{۱۰!}}=۱۱\times۱۲\times۱۳\times۱۴=۲۴۰۲۴$

ث در صورت به جای !۰، ۱ قرار می‌دهیم: $\frac{۱۲!\times۰!}{۸!\times۲!}=\frac{۱۲!\times۱}{۸!\times۲!}=\frac{\cancel{۸!}\times۹\times۱۰\times۱۱\times۱۲\times۱}{\cancel{۸!}\times۲!}=\frac{۹\times۱۰\times۱۱\times\overset{۶}{\cancel{۱۲}}}{۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۵۹۴۰$

ج $\frac{۱۳!\times۱!}{۱۱!\times۲!}=\frac{\cancel{۱۱!}\times\overset{۶}{\cancel{۱۲}}\times۱۳\times۱}{\cancel{۱۱!}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۷۸$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $۲!+۳!$

ب) $(۲+۳)!$

پ) $۲!\times۳!$

ت) $(۲\times۳)!$

ث) $۵\times۴!$

ج) $۶!-۳!$

چ) $(۶-۳)!$

ح) $\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!۳!}$

پاسخ **الف** $۲!+۳!=۲+۶=۸$

ب با توجه به اولویت پرانتز، ابتدا ۲ را با ۳ جمع می‌کنیم و سپس مقدار !۵ را به دست می‌آوریم:

$(۲+۳)!=۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$

به قسمت‌های (الف) و (ب) یک بار دیگر با دقت توجه کنید و اشتباه زیر را مرتکب نشوید: $۲!+۳!\neq ۵!$

پ $۲!\times ۳!=۲\times ۶=۱۲$

ت ابتدا حاصل داخل پرانتز را به دست می‌آوریم: $(۲\times ۳)!=۶!=۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times ۶=۷۲۰$

با توجه به قسمت (پ) و (ت) حاصل $۳!\times ۲!$ برابر $(۲\times ۳)!$ یعنی $۶!$ نیست: $۲!\times ۳!\neq ۶!$

ث توجه کنید که تساوی $۵\times ۴!=۲۰!$ درست نیست. $۵\times ۴!=۵\times ۲۴=۱۲۰$

ج $۶!-۳!=۷۲۰-۶=۷۱۴$

چ ابتدا حاصل داخل پرانتز را به دست می‌آوریم: $(۶-۳)!=۳!=۶$

ح

$$\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!\,۳!}=\frac{۱۲!}{۹!\,۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۹!}}\times ۱۰\times ۱۱\times \overset{۲}{\overset{\cancel{۶}}{\cancel{۱۲}}}}{\underset{۱}{\cancel{۹!}}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۳}}}=۲۲۰$$

جایگشت

فرض کنید ۴ نفر از دوستانتان که برای راحتی کار آن‌ها را با حروف A، B، C و D نمایش می‌دهیم بخواهند در یک صف بایستند. به هر کدام از حالت‌هایی که از جابه‌جاشدن آن‌ها در صف ایجاد می‌شود یک جایگشت ۴ تایی از ۴ نفر گفته می‌شود.

مانند: ABCD، ACDB، CDAB و ...

برای به دست آوردن تعداد کل جایگشت‌های این ۴ نفر می‌توانیم ۴ جایگاه را قرار دهیم:

جایگاه چهارم	جایگاه سوم	جایگاه دوم	جایگاه اول
۱	۲	۳	۴

در جایگاه اول می‌توانیم یکی از ۴ نفر را قرار دهیم؛ پس ۴ حالت برای جایگاه اول در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دوم ۳ حالت، چون یکی از چهار نفر در جایگاه اول قرار گرفت. همین‌طور برای جایگاه سوم، ۲ حالت و برای جایگاه چهارم یک حالت وجود دارد. چون هر کدام از این ۴ جایگاه را مرحله به مرحله کامل کردیم، طبق اصل ضرب کافی است تعداد حالت‌های هر کدام از جایگاه‌ها را در هم ضرب کنیم: $۴\times ۳\times ۲\times ۱=۴!$

همین‌طور که دیدیم تعداد کل جایگشت‌های ۴تایی ۴ نفر برابر $۴!$ شد. به نظر شما اگر همین کار را برای ۵ یا ۶ نفر و بیشتر انجام می‌دادیم، تعداد جایگشت‌ها برابر چه عددی می‌شد؟

نکته تعداد کل جایگشت‌های nتایی، n شیء متمایز برابر $n!$ است.

مثال و پاسخ

مثال ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۷ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟

پاسخ تعداد کل دانش‌آموزان برابر ۱۲ نفر است و تعداد کل جایگشت‌های ۱۲تایی، ۱۲ شیء متمایز برابر $۱۲!$ است.

مثال ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان در کتابخانه کنار هم قرار داد؟

پاسخ ۷ کتاب متمایز داریم و تعداد کل جایگشت‌های ۷تایی، ۷ شیء متمایز برابر $۷!$ است.

مثال با حروف کلمهٔ «کتاب» چند کلمهٔ ۴حرفی متمایز بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟ (بامعنی یا بی‌معنی)

پاسخ کلمهٔ «کتاب» از ۴ حرف متمایز تشکیل شده و تعداد جایگشت‌های ۴تایی ۴ شیء متمایز برابر $۴!$ است.

جایگشت‌های کنارهم

برای به دست آوردن تعداد جایگشت‌هایی که چند عضو خاص در کنار یکدیگر باشند، چند عضو خاص را در یک بسته قرار می‌دهیم و به عنوان یک عضو جدید در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های این عضو جدید با بقیهٔ اعضا را به دست می‌آوریم و اگر اعضای داخل بسته هم بتوانند جابه‌جا شوند، در تعداد جایگشت‌های اعضای داخل بسته ضرب می‌کنیم.

مثال و پاسخ

مثال **تعداد جایگشت‌های ۵تایی حروف انگلیسی A، B، C، D و E را به طوری که B و C در کنار هم باشند، به دست آورید.**

پاسخ با قراردادن C و B در داخل یک بسته و در نظر گرفتن $\boxed{BC}$ به عنوان یک عضو، تعداد جایگشت‌های این چهار عضو برابر $۴!$ و چون B و C در داخل جعبه هم می‌توانند جابه‌جا شوند جایگشت‌های دو عضو B و C برابر $۲!$ در نتیجه تعداد جایگشت‌های چهارعضوی و دوعضوی را در هم ضرب می‌کنیم (اصل ضرب). تعداد جایگشت‌ها زمانی که C و B کنار هم باشند برابر $۴!\times ۲!$ می‌شود.

$$\underset{۱}{A}\qquad\underset{۲}{\boxed{BC}}\qquad\underset{۳}{D}\qquad\underset{۴}{E}$$

مثال **۳ کتاب ادبیات $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ و ۵ کتاب منطق $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$، $M_۴$ و $M_۵$ را به چند طریق می‌توانیم در کتابخانه قرار دهیم به طوری که سه کتاب ادبیات در کنار هم باشند؟**

پاسخ سه کتاب ادبیات $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را در یک جعبه قرار می‌دهیم.

$$\boxed{A_۱ , A_۲ , A_۳}, M_۱ , M_۲ , M_۳ , M_۴ , M_۵$$

تعداد جایگشت‌های این جعبه با ۵ کتاب منطق برابر $۶!$ است و تعداد جایگشت‌های سه کتاب ادبیات داخل جعبه برابر $۳!$ است. با ضرب‌کردن $۳!$ در $۶!$ تعداد جایگشت‌هایی را که سه کتاب ادبیات در کنار هم باشند، به دست می‌آوریم. $۳!\times ۶!$

مثال **تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «مهران» به طوری که حرف «م» دقیقاً بعد از حرف «ن» بیاید را به دست آورید.**

پاسخ کلمهٔ «مهران» از پنج حرف تشکیل شده است. با توجه به صورت سؤال حرف (م) را بعد از حرف (ن) در داخل جعبه قرار می‌دهیم.

$\boxed{\text{ن م}}$ ه ر ا

تعداد جایگشت‌های این جعبه با ۳ حرف دیگر برابر $۴!$ است و (ن) و (م) هم در داخل جعبه نمی‌توانند جابه‌جا شوند. (حرف (م) دقیقاً بعد از حرف (ن) باید بیاید.) در نتیجه تعداد جایگشت‌هایی که حرف «م» دقیقاً بعد از حرف «ن» بیاید برابر همان $۴!$ است.

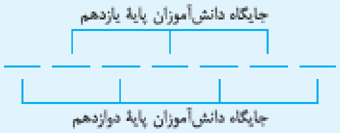
جایگشت‌های یک‌درمیان

به دو سؤال زیر و روش حل آن‌ها برای به دست آوردن تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان توجه کنید.

مثال و پاسخ

مثال **تعداد جایگشت‌های سه دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به طوری که دانش‌آموزان یازدهم و دوازدهم یک‌درمیان باشند را به دست آورید.**

پاسخ برای به دست آوردن جایگشت‌های این هفت دانش‌آموز جایگاه‌های زیر را مشخص می‌کنیم.



با توجه به این‌که این دانش‌آموزان باید یک‌درمیان در کنار هم قرار بگیرند، جایگاه‌های آن‌ها را یک‌درمیان در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های آن‌ها را به طور جداگانه به دست می‌آوریم و در هم ضرب می‌کنیم. تعداد جایگشت‌های دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم برابر $۴!$ (جایگشت‌های ۴تایی) و تعداد جایگشت‌های دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم برابر $۳!$ است و در نتیجه تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان این هفت دانش‌آموز برابر $۴!\times ۳!$ می‌باشد.

توجه کنید که تعداد دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم یک نفر کم‌تر است و حالت دیگری نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

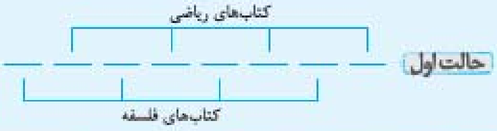
مثال **۴ کتاب متمایز ریاضی و ۴ کتاب متمایز فلسفه را به چند طریق می‌توانیم به صورت یک‌درمیان در یک ردیف در کتابخانه قرار دهیم؟**

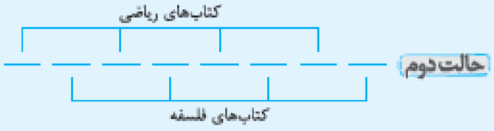
پاسخ برای به دست آوردن جایگشت‌های یک‌درمیان آن‌ها یکی از حالت‌ها را به دست می‌آوریم و حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم.

تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان حالت اول:

$$\underset{\text{کتاب‌های ریاضی}}{\underset{\downarrow}{۴!}}\quad\times\quad\underset{\text{کتاب‌های فلسفه}}{\underset{\downarrow}{۴!}}$$

تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان حالت اول و حالت دوم برابر $۴!\times ۴!\times \underset{\to\ \text{حالت اول و حالت دوم}}{۲}$ است.





جایگشت‌ها با اعضای تکراری

تمامی مسائلی که تا الان با آن‌ها در مورد جایگشت‌ها مواجه بودیم با اعضای متمایز (غیرتکراری) بودند. در برخی از سؤالات تعداد جایگشت‌ها با اعضای تکراری مورد سؤال قرار می‌گیرد. در این نوع سؤالات کافی است تعداد جایگشت‌ها را بر تعداد جایگشت‌های اعضای تکراری تقسیم کنیم.

مثال و پاسخ

مثال **تعداد کلمات هفت‌حرفی متمایزی که با حروف کلمهٔ «خیلی‌سبز» می‌توان نوشت را به دست آورید.**

پاسخ کلمهٔ «خیلی‌سبز» از هفت حرف تشکیل شده است و تعداد جایگشت‌های هفت‌تایی برابر !۷ است ولی چون حرف «ی» در این کلمه دو بار تکرار شده، !۷ را بر تعداد جایگشت‌های دو حرف «ی» که برابر !۲ است (دو بار تکرار شده) تقسیم می‌کنیم که برابر $\frac{۷!}{۲!}$ می‌شود.

مثال **تعداد جایگشت‌های حروف عبارت «ریاضی و آمار» را به دست آورید.**

پاسخ عبارت «ریاضی و آمار» از ۱۰ حرف تشکیل شده است. اما حرف (ر) دو بار و حرف (ی) نیز دو بار و حرف (الف) سه بار تکرار شده است پس !۱۰ را بر !۲، !۲ و !۳ تقسیم می‌کنیم. $\frac{۱۰!}{۲!\times۲!\times۳!}$

جایگشت‌های r تایی از n شیء

انتخاب r شیء از n شیء در صورتی که ترتیب یا جابه‌جایی مهم باشد، جایگشت r تایی از n شیء نامیده می‌شود ($r \le n$). تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ است و آن را با نماد $P(n,r)$ نمایش می‌دهند.

توجه در استفاده از فرمول $\frac{n!}{(n-r)!}$، با یک مثال می‌توانید از مهم بودن یا نبودن ترتیب مطمئن شوید.

مثال و پاسخ

مثال **تعداد حالت‌های انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر برای سرگروهی رشته‌های ورزشی فوتبال، والیبال و بسکتبال را به دست آورید.**

پاسخ تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۱۰ نفر را می‌خواهیم به دست آوریم. اگر ترتیب و جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم باشد می‌توانیم از فرمول $\frac{n!}{(n-r)!}$ استفاده کنیم. برای این‌که مهم بودن یا نبودن ترتیب و جابه‌جایی را مشخص کنیم، یک انتخاب فرضی از مسئله انجام می‌دهیم (اسامی فرضی هستند).

سرگروه فوتبال: علی		سرگروه فوتبال: ولی
سرگروه والیبال: قلی	$\xleftarrow[\text{جابه‌جا می‌کنیم}]{\text{اعضای انتخابی را}}$	سرگروه والیبال: علی
سرگروه بسکتبال: ولی		سرگروه بسکتبال: قلی

با جابه‌جاکردن افراد انتخاب‌شده، انتخاب اولمان تغییر کرد، پس ترتیب و جابه‌جایی مهم است. برای به دست آوردن تعداد انتخاب‌ها با قراردادن $r=۳$ و $n=۱۰$ در رابطه داریم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow[r=۳]{n=۱۰}P(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{\cancel{۷!}\times۸\times۹\times۱۰}{\cancel{۷!}}=۷۲۰$$

مثال **در یک دوره مسابقات شنا، بین ۱۲ نفر به چند طریق امکان انتخاب نفرات اول و دوم و سوم وجود دارد؟ (دو نفر نمی‌توانند هم‌زمان اول بشوند.)**

پاسخ در واقع هدف انتخاب ۳ نفر به عنوان اول، دوم و سوم از بین این ۱۲ نفر است.

نفر اول: علی		نفر اول: ولی
نفر دوم: قلی	$\xleftarrow[\text{جابه‌جا می‌کنیم}]{\text{اعضای انتخابی را}}$	نفر دوم: علی
نفر سوم: ولی		نفر سوم: قلی

با جابه‌جاکردن افراد انتخاب‌شده، انتخاب اولمان تغییر کرد، پس ترتیب و جابه‌جایی مهم است. در نتیجه:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow[r=۳]{n=۱۲}P(۱۲,۳)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۹!}=\frac{\cancel{۹!}\times۱۰\times۱۱\times۱۲}{\cancel{۹!}}=۱۳۲۰$$

مثال و پاسخ

مثال **برای این‌که ۱۶ تیم حاضر در لیگ برتر فوتبال به صورت رفت و برگشت با هم بازی کنند چند بازی باید انجام شود؟**

پاسخ برای به دست آوردن تعداد بازی‌ها تعداد انتخاب‌های ۲تایی از این ۱۶ تیم را به دست می‌آوریم (بازی فوتبال بین دو تیم انجام می‌شود) بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود یعنی در انتخاب دو تیم میزبان یا مهمان بودن اهمیت دارد.

میزبان: پرسپولیس
مهمان: استقلال

$\xleftarrow[\text{جابه‌جا می‌کنیم}]{\text{اعضای انتخابی را}}$

میزبان: استقلال
مهمان: پرسپولیس

با جابه‌جایی اعضای انتخابی، انتخاب اولمان تغییر کرد پس ترتیب و جابه‌جایی مهم است. در نتیجه:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow[r=۲]{n=۱۶}P(۱۶,۲)=\frac{۱۶!}{(۱۶-۲)!}=\frac{۱۶!}{۱۴!}=\frac{\cancel{۱۴!}\times۱۵\times۱۶}{\cancel{۱۴!}}=۲۴۰$$

ترکیب r تایی از n شیء

انتخاب r شیء از n شیء در صورتی که ترتیب یا جابه‌جایی اشیاء در انتخاب‌ها **مهم نباشد**، ترکیب r شیء از n شیء نامیده می‌شود ($r\le n$). تعداد انتخاب‌ها برابر $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ است و آن را با نماد C_r^n یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم.

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال و پاسخ

مثال **از یک کلاس ۱۴ نفره به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد؟**

پاسخ مدنظر سؤال به دست آوردن تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۱۴ نفر است. برای مشخص‌شدن اهمیت ترتیب و جابه‌جایی در انتخابمان یک انتخاب فرضی انجام می‌دهیم.

علی، قلی، ولی $\xleftarrow[\text{جابه‌جا می‌کنیم}]{\text{اعضای انتخابی را}}$ قلی، ولی، علی

جابه‌جاکردن اعضای انتخاب‌شده تغییری در انتخابمان به وجود نیاورد. ما می‌خواستیم سه نفر انتخاب کنیم که کردیم. این‌که کدام‌یک از افراد اول یا دوم انتخاب شوند مهم نیست. پس با قراردادن $r=۳$ و $n=۱۴$ در رابطهٔ $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ داریم:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\Rightarrow\frac{۱۴!}{(۱۴-۳)!۳!}=\frac{۱۴!}{۱۱!۳!}=\frac{\cancel{۱۱!}\times۱۲\times۱۳\times۱۴}{\cancel{۱۱!}\times۳!}=\frac{\overset{۴}{\cancel{۱۲}}\times۱۳\times\overset{۷}{\cancel{۱۴}}}{۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۳۶۴$$

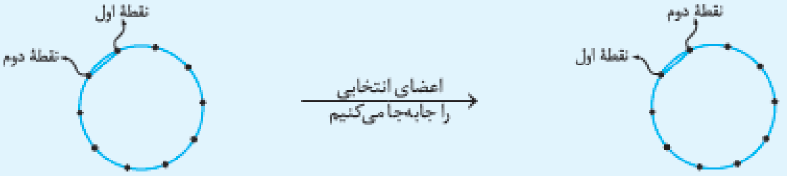
مثال **با ۱۰ نقطه روی یک دایره:**

الف) چند وتر متمایز می‌توان رسم کرد؟

ب) چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟

پ) چند چهارضلعی متمایز می‌توان رسم کرد؟

پاسخ **الف** برای رسم هر وتر به دو نقطه روی دایره نیاز داریم. تعداد انتخاب‌های ۲ نقطه از ۱۰ نقطه را به دست می‌آوریم.



حواستون باشه اون‌هایی که انتخاب کردین رو جابه‌جا کنین. نکنه یهو نقطه‌هایی که انتخاب کردین رو عوض کنین!!!

با توجه به شکل با جابه‌جاکردن دو نقطهٔ انتخاب‌شده وتر جدیدی به دست نمی‌آید، پس ترتیب و جابه‌جایی انتخاب‌ها مهم نیست. در نتیجه:

$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{(۱۰-۲)!۲!}=\frac{۱۰!}{۸!۲!}=\frac{\cancel{۸!}\times۹\times۱۰}{\cancel{۸!}\,۲!}=\frac{۹\times\overset{۵}{\cancel{۱۰}}}{۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۴۵$$

پ برای رسم هر مثلث به سه نقطه روی دایره نیاز داریم.

با جابه‌جاکردن سه نقطهٔ انتخاب‌شده، مثلث دیگری ایجاد نمی‌شود (ترتیب مهم نیست). برای به دست آوردن تعداد مثلث‌های متمایز ترکیب ۳ نقطه از ۱۰ نقطه را به دست می‌آوریم.

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!۳!}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{\cancel{۷!}\times ۸\times ۹\times ۱۰}{\cancel{۷!}\,۳!}=\frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}\times \overset{۳}{\cancel{۹}}\times ۱۰}{۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۳}}}=۱۲۰$$

پ برای به دست آوردن تعداد چهارضلعی‌های متمایز ترکیب ۴ نقطه از ۱۰ نقطه را به دست می‌آوریم.

$$\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!۴!}=\frac{۱۰!}{۶!۴!}=\frac{\cancel{۶!}\times ۷\times \overset{۱}{\cancel{۸}}\times \overset{۳}{\cancel{۹}}\times ۱۰}{\cancel{۶!}\times ۱\times \cancel{۲}\times \cancel{۳}\times \cancel{۴}}=۲۱۰$$

مثال **اگر A یک مجموعهٔ ۱۲عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی آن را به دست آورید.**

پاسخ تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی مجموعهٔ A برابر انتخاب‌های ۴تایی از ۱۲ عضو مجموعهٔ A است.

$$\{a,b,c,d\}\xrightarrow[\text{اعضای انتخابی}]{\text{جابه‌جاکردن}}\{c,d,b,a\}$$

در مجموعه‌ها، با جابه‌جاشدن عضوها، مجموعهٔ جدیدی به دست نمی‌آید؛ پس ترتیب در انتخاب‌ها مهم نیست، در نتیجه:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\xrightarrow[r=۴]{n=۱۲}\frac{۱۲!}{(۱۲-۴)!۴!}=\frac{۱۲!}{۸!۴!}=\frac{\cancel{۸!}\times ۹\times \overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times ۱۱\times \overset{۱}{\cancel{۱۲}}}{\cancel{۸!}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۳}}\times \underset{۱}{\cancel{۴}}}=۴۹۵$$

محاسبهٔ ساده‌تر ترکیب r شیء از n شیء

برای محاسبهٔ ساده‌تر ترکیب r شیء از n شیء در شرایط خاص، برای محاسبهٔ سریع‌تر، روابط زیر را به خاطر بسپارید و در حل سؤالات از آن‌ها استفاده کنید.

۱) $\binom{n}{۱}=n$

برای مثال: $\binom{۴}{۱}=۴\ ,\ \binom{۱۰}{۱}=۱۰\ ,\ \binom{۱۵}{۱}=۱۵$

۲) $\binom{n}{n-۱}=n$

برای مثال: $\binom{۵}{۴}=۵\ ,\ \binom{۱۰}{۹}=۱۰\ ,\ \binom{۱۵}{۱۴}=۱۵$

۳) $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

برای مثال: $\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵\ ,\ \binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times ۹}{۲}=۴۵\ ,\ \binom{۱۵}{۲}=\frac{۱۵\times ۱۴}{۲}=۱۰۵$

۴) $\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

برای مثال: $\binom{۷}{۵}=\frac{۷\times ۶}{۲}=۲۱\ ,\ \binom{۱۰}{۸}=\frac{۱۰\times ۹}{۲}=۴۵\ ,\ \binom{۱۳}{۱۱}=\frac{۱۳\times ۱۲}{۲}=۷۸$

حواستون باشه روابط گفته‌شده فقط در مورد ترکیب ۲ شیء از n شیء است، نه جایگشت ۲ شیء از n شیء!!!

بودن یا نبودن

در مسئله‌های مربوط به انتخاب‌های r شیء از n شیء، ممکن است یک سری از محدودیت‌ها مانند بودن یا نبودن عضوهای خاصی، به مسئله اضافه شود. این مسئله‌ها با اندکی تغییر در شرایط مسئله به راحتی قابل حل هستند.

مثال و پاسخ

مثال **از کلاس ۱۵ نفره‌ای که علی هم جزء آن است:**

الف) به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد که علی جزء آن سه نفر باشد؟

ب) به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد که علی جزء آن سه نفر نباشد؟

پاسخ **الف** فرض کنیم علی انتخاب شده است. از ۱۴ نفر باقی‌مانده باید دو نفر دیگر انتخاب کنیم، در نتیجه:

$$\binom{۱۴}{۲}=\frac{۱۴!}{(۱۴-۲)!۲!}=\frac{۱۴!}{۱۲!۲!}=\frac{\cancel{۱۲!}\times ۱۳\times \overset{۷}{\cancel{۱۴}}}{\cancel{۱۲!}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}}=۹۱ \quad \text{یا} \quad \binom{۱۴}{۲}=\frac{۱۴\times ۱۳}{۲}=۹۱$$

ب در این قسمت قرار نیست علی انتخاب شود. اگر علی را کنار بگذاریم ۱۴ نفر در کلاس باقی می‌مانند که باید ۳ نفر از آن‌ها انتخاب شوند؛ در نتیجه:

$$\binom{۱۴}{۳}=\frac{۱۴!}{(۱۴-۳)!۳!}=\frac{۱۴!}{۱۱!۳!}=\frac{\cancel{۱۱!}\times \overset{\overset{۲}{\cancel{۶}}}{\cancel{۱۲}}\times ۱۳\times ۱۴}{\cancel{۱۱!}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۳}}}=۳۶۴$$

مثال اگر $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ باشد، در این صورت:

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی مجموعهٔ A که شامل a و b باشند را به دست آورید.

ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی مجموعه A که عضوهای g و h در آن نباشند را به دست آورید.

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی که شامل عضو a باشند ولی عضوهای f و e را نداشته باشند را به دست آورید.

پاسخ مجموعهٔ A دارای ۸ عضو است.

الف فرض کنیم a و b از قبل انتخاب شده‌اند؛ پس از ۶ عضو دیگر مجموعهٔ A سه عضو باید انتخاب کنیم (ترتیب مهم نیست). در نتیجه:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{(۶-۳)!۳!}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{\cancel{۳!}\times ۴\times ۵\times \overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۶}}}{\cancel{۳!}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۳}}}=۲۰$$

ب عضو g و h را کنار می‌گذاریم. از ۶ عضو باقی‌مانده باید ۴ عضو را انتخاب کنیم. در نتیجه:

$$\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{(۶-۴)!۴!}=\frac{۶!}{۲!۴!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times ۵\times \overset{۳}{\cancel{۶}}}{۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۴!}}}=۱۵ \quad \text{یا} \quad \binom{۶}{۴}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵ \qquad \text{(با استفاده از فرمول } \binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}\text{)}$$

پ عضوهای a، e و f را کنار می‌گذاریم با این تفاوت که a را جزء انتخاب‌شده‌ها در نظر می‌گیریم. پس از ۵ عضو باقی‌مانده باید دو عضو را انتخاب کنیم؛ در نتیجه:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!۲!}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳!}}\times \overset{۲}{\cancel{۴}}\times ۵}{\underset{۱}{\cancel{۳!}}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۰ \quad \text{یا} \quad \binom{۵}{۲}=\frac{۵\times ۴}{۲}=۱۰ \qquad \text{(با استفاده از فرمول } \binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}\text{)}$$

سؤالات تلفیقی

در این درس با تکنیک‌های مختلفی مانند اصل جمع، اصل ضرب، انواع جایگشت‌ها و ترکیب آشنا شدیم. در حل سؤالات تلفیقی سعی کنید مسئله را به مسئله‌های کوچک‌تر تقسیم کنید و از تکنیک‌هایی که یاد گرفتید درست و به‌جا استفاده کنید.

مثال و پاسخ

مثال از بین ۵ نفر امدادگر زن و ۶ نفر امدادگر مرد می‌خواهیم یک تیم امدادرسانی ۴نفره تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توان این تیم را تشکیل داد؛ هرگاه:

الف) این تیم بدون هیچ شرطی انتخاب شود.

ب) یک نفر مرد و سه نفر زن در تیم حضور داشته باشند.

پ) به تعداد مساوی مرد و زن در تیم حضور داشته باشند.

ت) حداقل ۳ نفر مرد در تیم حضور داشته باشند.

ث) حداکثر ۲ زن در تیم حضور داشته باشند.

پاسخ **الف** ۵ نفر امدادگر زن و ۶ نفر امدادگر مرد وجود دارد، پس در کل ۱۱ نفر امدادگر داریم. هیچ شرطی برای انتخاب‌ها در نظر گرفته نشده است، پس کافی است ۴ نفر از ۱۱ نفر انتخاب کنیم. ترتیب هم مهم نیست. در نتیجه:

$$\binom{۱۱}{۴}=\frac{۱۱!}{(۱۱-۴)!۴!}=\frac{۱۱!}{۷!۴!}=\frac{\cancel{۷!}\times\overset{۱}{\cancel{۸}}\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times۱۰\times۱۱}{\cancel{۷!}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۴}}}=۳۳۰$$

ب در این تیم ۴نفره یک نفر مرد «و» سه نفر زن حضور داشته باشند («و» مربوط به اصل ضرب). ابتدا یک نفر امدادگر مرد از ۶ نفر امدادگران مرد و سپس سه نفر امدادگر زن از ۵ نفر امدادگران زن انتخاب می‌کنیم و در آخر با توجه به اصل ضرب تعداد حالت‌های هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم. توجه داشته باشید که ترتیب انتخاب‌ها هم مهم نیست.

$$\binom{۶}{۱}=\frac{۶!}{(۶-۱)!۱!}=\frac{۶!}{۵!\times۱}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۵!}}\times۶}{\underset{۱}{\cancel{۵!}}\times۱}=۶\quad\text{یا}\quad\binom{۶}{۱}=۶$$

(یا طبق فرمول $\binom{n}{۱}=n$)

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{(۵-۳)!۳!}=\frac{۵!}{۲!۳!}=\frac{\cancel{۳!}\times\overset{۲}{\cancel{۴}}\times۵}{۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\cancel{۳!}}=۱۰\quad\text{یا}\quad\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

(یا طبق فرمول $\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$)

$۶\times۱۰=۶۰$

پ در تیم ۴نفره به تعداد مساوی مرد و زن حضور داشته باشند، یعنی ۲ نفر مرد و ۲ نفر زن انتخاب شوند.

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{(۶-۲)!۲!}=\frac{۶!}{۴!۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times۵\times\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۵\quad\text{یا}\quad\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

(یا طبق فرمول $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$)

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!۲!}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳!}}\times\overset{۲}{\cancel{۴}}\times۵}{\underset{۱}{\cancel{۳!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۰\quad\text{یا}\quad\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

(یا طبق فرمول $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$)

$۱۵\times۱۰=۱۵۰$

ت حداقل ۳ نفر مرد در تیم حضور داشته باشند، یعنی کم‌ترین تعداد مردها در تیم ۴نفره می‌تواند برابر ۳ باشد؛ پس تعداد مردها برابر ۳ «یا» ۴ می‌تواند باشد.

$$\underbrace{\underbrace{\text{تعداد مردها برابر ۳ و تعداد زن‌ها برابر ۱}}_{\text{اصل ضرب}}\text{ یا تعداد مردها برابر ۴}}_{\text{اصل جمع}}$$

تعداد مردها برابر ۳ و تعداد زن‌ها برابر ۱: تعداد انتخاب‌های ۳ مرد از ۶ مرد را در تعداد حالت‌های یک زن از ۵ زن ضرب می‌کنیم.

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{(۶-۳)!۳!}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳!}}\times۴\times۵\times\overset{۱}{\cancel{۶}}}{\underset{۱}{\cancel{۳!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۲۰$$

$$\binom{۵}{۱}=\frac{۵!}{(۵-۱)!۱!}=\frac{۵!}{۴!\times۱}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times۵}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times۱}=۵\quad\text{یا}\quad\binom{۵}{۱}=۵$$

($\binom{n}{۱}=n$)

$۲۰\times۵=۱۰۰$

تعداد مردها برابر ۴: تعداد انتخاب‌های ۴ مرد از ۶ مرد را به دست می‌آوریم.

$$\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{(۶-۴)!۴!}=\frac{۶!}{۲!۴!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times ۵\times \overset{۳}{\cancel{۶}}}{۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۴!}}}=۱۵ \quad \text{یا} \quad \binom{۶}{۴}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵ \qquad \binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

در آخر تعداد حالت‌های ۳ نفر مرد و یک نفر زن «یا» ۴ نفر مرد را بنا بر اصل جمع، جمع می‌کنیم. $۱۰۰+۱۵=۱۱۵$

ب تعداد زن‌ها حداکثر برابر ۲ باشد، یعنی بیشترین تعداد زن‌ها در تیم ۴نفره می‌تواند برابر ۲ باشد؛ پس تعداد زن‌ها برابر ۰ یا ۱ یا ۲ می‌تواند باشد.

$$\underbrace{\text{تعداد زن‌ها برابر ۰ \quad یا \quad تعداد زن‌ها برابر ۱ \quad یا \quad تعداد زن‌ها برابر ۲}}_{\text{اصل جمع}}$$

تعداد زن‌ها برابر صفر: یعنی هیچ زنی انتخاب نشود و ۴ نفر مرد از ۶ مرد انتخاب شود.

$$\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{(۶-۴)!۴!}=\frac{۶!}{۲!۴!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times ۵\times \overset{۳}{\cancel{۶}}}{۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۴!}}}=۱۵ \quad \text{یا} \quad \binom{۶}{۴}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

تعداد زن‌ها برابر ۱: یعنی در تیم ۴نفره، یک نفر زن «و» سه نفر مرد انتخاب شود. تعداد حالت‌های ۱ زن از ۵ زن را طبق اصل ضرب در حالت‌های ۳ مرد از ۶ مرد ضرب می‌کنیم.

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{(۶-۳)!۳!}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳!}}\times ۴\times ۵\times \overset{۱}{\cancel{۶}}}{\underset{۱}{\cancel{۳!}}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۳}}}=۲۰$$

$$\binom{۵}{۱}=\frac{۵!}{(۵-۱)!۱!}=\frac{۵!}{۴!\times ۱}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times ۵}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times ۱}=۵ \quad \text{یا} \quad \binom{۵}{۱}=۵$$

$$۲۰\times ۵=۱۰۰$$

تعداد زن‌ها برابر ۲ باشد: در تیم ۴نفره ۲ نفر زن و ۲ نفر مرد باشد. تعداد حالت‌های ۲ نفر زن از ۵ زن را طبق اصل ضرب در تعداد حالت‌های ۲ مرد از ۶ مرد ضرب می‌کنیم.

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!۲!}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳!}}\times \overset{۲}{\cancel{۴}}\times ۵}{\underset{۱}{\cancel{۳!}}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۰ \quad \text{یا} \quad \binom{۵}{۲}=\frac{۵\times ۴}{۲}=۱۰$$

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{(۶-۲)!۲!}=\frac{۶!}{۴!۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times ۵\times \overset{۳}{\cancel{۶}}}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times ۱\times \underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۵ \quad \text{یا} \quad \binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

$$۱۰\times ۱۵=۱۵۰$$

در آخر بنا بر اصل جمع تعداد حالت‌های ۰ یا ۱ یا ۲ زن را با هم جمع می‌کنیم.

$$\overset{\overset{\text{۰ زن}}{\uparrow}}{۱۵}+\overset{\overset{\text{۱ زن}}{\uparrow}}{۱۰۰}+\overset{\overset{\text{۲ زن}}{\uparrow}}{۱۵۰}=۲۶۵$$

تعداد اعداد

در این قسمت روش‌های به دست آوردن تعداد اعداد با شرایط خاص را می‌آموزیم. این روش‌ها را به خوبی یاد بگیرید و به تفاوت‌هایی که در هر قسمت وجود دارد خوب دقت کنید.

مثال و پاسخ

مثال **چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت، در صورتی که:**

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. **ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.**

پاسخ برای به دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی، سه جایگاه در نظر می‌گیریم و با ضرب‌کردن تعداد حالت‌های آن‌ها (اصل ضرب) تعداد اعداد را به دست می‌آوریم.

الف تکرار ارقام مجاز است؛ یعنی در هر کدام از جایگاه‌ها می‌توانیم هر سه رقم را قرار دهیم.

$$\frac{۳}{۴,۵,۶}\quad\frac{۳}{۴,۵,۶}\quad\frac{۳}{۴,۵,۶}$$

با ضرب تعداد حالت‌ها در هم تعداد اعداد را به دست می‌آوریم.

$$۳\times۳\times۳=۲۷$$

ب **روش اول** تکرار ارقام مجاز نیست؛ یعنی اگر رقمی در یکی از جایگاه‌ها قرار گرفت در جایگاه دیگر نمی‌تواند قرار بگیرد. از سمت چپ شروع می‌کنیم در جایگاه اول هر سه رقم می‌توانند قرار بگیرند، در جایگاه دوم دوتا از ارقام (یکی از ارقام در جایگاه قبلی قرار گرفت) و در جایگاه سوم یک رقم می‌توان قرار داد.

$$\underline{۳}\quad\underline{۲}\quad\underline{۱}$$

با ضرب‌کردن تعداد حالت‌ها داریم:

$$۳\times۲\times۱=۶$$

روش دوم تعداد اعداد سه‌رقمی که با ارقام ۴، ۵ و ۶ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت، برابر تعداد جایگشت‌های ۳تایی ۳ شیء متمایز است؛ در نتیجه:

$$۳!=۶$$

مثال **چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۴، ۰ و ۵ می‌توان نوشت، در صورتی که:**

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. **ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.**

پاسخ **الف** تکرار ارقام مجاز است ولی رقم صفر را نمی‌توانیم در جایگاه صدگان قرار دهیم (عدد دورقمی می‌شود).

$$\underline{۲}\quad\underline{۳}\quad\underline{۳}\qquad ۲\times۳\times۳=۱۸$$

ب تکرار ارقام مجاز نیست. در جایگاه صدگان رقم صفر را نمی‌توانیم قرار دهیم (۲ حالت)؛ در جایگاه دهگان نیز ۲ حالت (۴ یا ۵ در جایگاه صدگان قرار می‌گیرد. یکی را کنار بگذاریم با صفر می‌شود ۲ حالت) و در جایگاه آخر یک حالت خواهیم داشت.

$$\underline{۲}\quad\underline{۲}\quad\underline{۱}\qquad ۲\times۲\times۱=۴$$

مثال **با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟**

الف) تکرار ارقام مجاز است. **ب) تکرار ارقام مجاز نیست.**

پاسخ **الف** در جایگاه صدگان نمی‌توان رقم صفر را قرار داد.

$$\underline{۵}\quad\underline{۶}\quad\underline{۶}\qquad ۵\times۶\times۶=۱۸۰$$

ب

$$\underline{۵}\quad\underline{۵}\quad\underline{۴}\qquad ۵\times۵\times۴=۱۰۰$$

مثال و پاسخ

مثال **با توجه به ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به سؤالات زیر پاسخ دهید.**

الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که رقم یکان آن ۳ باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

ب) چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

پ) چند عدد زوج چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

ت) چند عدد زوج چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

پاسخ **الف** رقم ۳ را در یکان قرار می‌دهیم.

با گذاشتن رقم ۳ در یکان، ۵ رقم باقی می‌ماند چون تکرار ارقام مجاز نیست در هر مرحله یک واحد از تعداد حالت‌ها کم می‌کنیم.

$$\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underline{۳}\quad\frac{۱}{۳}\qquad ۵\times۴\times۳\times۱=۶۰$$

ب برای این‌که عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد رقم سمت چپ عدد رقم‌های ۴ و ۵ و ۶ باید باشد.

$$\frac{۳}{۴,۵,۶}\quad\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underline{۳}$$

یکی از رقم‌های ۴، ۵ و ۶ در سمت چپ قرار می‌گیرد؛ چون عدد بدون رقم‌های تکراری است، رقم بعدی ۵ حالت و بعد از آن ۴ و آخری ۳ حالت خواهد داشت.

$$۳\times۵\times۴\times۳=۱۸۰$$

اگر توضیحات بالا کافی نبود ادامهٔ مطلب رو بخون!

برای این‌که عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، رقم یکان آن ۴ یا ۵ یا ۶ باید باشد.

$\frac{۱}{۶}\quad\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underline{۳}$	یا	$\frac{۱}{۵}\quad\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underline{۳}$	یا	$\frac{۱}{۴}\quad\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underline{۳}$
رقم سمت چپ ۶		رقم سمت چپ ۵		رقم سمت چپ ۴

هر کدام از حالت‌ها را به دست می‌آوریم و سپس با توجه به اصل جمع آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$۱\times۵\times۴\times۳=۶۰$ $\qquad$ $۶۰+۶۰+۶۰=۱۸۰$

پ برای این‌که عدد چهاررقمی موردنظر زوج باشد، رقم یکان آن باید ۲، ۴ و ۶ باشد.

$\underline{۶}\quad\underline{۶}\quad\underline{۶}\quad\underset{۲,۴,۶}{\underline{۳}}$

رقم‌ها تکراری هم می‌توانند باشند پس در سایر جایگاه‌ها ۶ حالت داریم. $۶\times۶\times۶\times۳=۶۴۸$

ت رقم یکان مانند سؤال قبل ۳ حالت دارد و چون عدد بدون تکرار ارقام باید ساخته شود. سایر حالت‌ها را کامل می‌کنیم.

$\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underline{۳}\quad\underset{۲,۴,۶}{\underline{۳}}$ $\qquad$ $۵\times۴\times۳\times۳=۱۸۰$

مثال **با داشتن ارقام۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید.**

الف) تعداد اعداد زوج سه‌رقمی با رقم‌های غیرتکراری را به دست آورید.

ب) تعداد مضارب ۵ سه‌رقمی با رقم‌های غیرتکراری را به دست آورید.

پاسخ **الف** رقم یکان عدد موردنظر ۰ یا ۲ یا ۴ باید باشد، چون رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند برابر صفر باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

رقم یکان صفر باشد: $\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underset{۰}{\underline{۱}}$ $\qquad$ یا $\qquad$ رقم یکان ۲ یا ۴ باشد: $\underline{۴}\quad\underline{۴}\quad\underset{۲,۴}{\underline{۲}}$

$۵\times۴\times۱=۲۰$ $\qquad$ $۴\times۴\times۲=۳۲$

و در آخر بنا بر اصل جمع تعداد حالت‌های هر کدام را با هم جمع می‌کنیم. $۳۲+۲۰=۵۲$

پ مضارب ۵ دارای یکان ۰ یا ۵ هستند و چون رقم صفر در سمت چپ عدد قرار نمی‌گیرد دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

رقم یکان ۵ باشد: $\underline{۴}\quad\underline{۴}\quad\underset{۵}{\underline{۱}}$ $\qquad$ یا $\qquad$ رقم یکان صفر باشد: $\underline{۵}\quad\underline{۴}\quad\underset{۰}{\underline{۱}}$

$۴\times۴\times۱=۱۶$ $\qquad$ $۵\times۴\times۱=۲۰$

و در نهایت بنا بر اصل جمع تعداد حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم. $۲۰+۱۶=۳۶$

سؤال‌های امتحانی

۱- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد طوری که نتوانیم دو عمل را با هم انجام دهیم، در این صورت به .... طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

ب) اگر عملی در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم به n طریق انجام‌پذیر باشند در کل آن عمل به .... طریق انجام می‌پذیرد.

پ) حاصل !۰ و !۱ برابر .... است.

ت) تعداد کل جایگشت‌های nتایی از n شیء متمایز برابر .... است.

ث) انتخاب r شیء از n شیء وقتی ترتیب و جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم نباشد .... rتایی از n شیء نامیده می‌شود.

۲- یک رستوران ۴ نوع غذا و ۳ نوع سالاد و ۲ نوع دسر در منوی خود دارد.

الف) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع دسر سفارش داد؟

ب) به چند طریق می‌توان یک نوع سالاد یا یک نوع دسر سفارش داد؟

پ) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع سالاد و یک نوع دسر سفارش داد؟

ت) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا یا یک نوع سالاد یا یک نوع دسر سفارش داد؟

ث) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع سالاد یا یک نوع غذا و یک نوع دسر سفارش داد؟

چ) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا یا یک نوع سالاد و یک نوع غذا یا یک نوع دسر سفارش داد؟

۳- در یک آزمون که از دو قسمت، قسمت اول ۳ سؤال دوگزینه‌ای و قسمت دوم ۳ سؤال چهارگزینه‌ای تشکیل شده است، اگر پاسخ‌دادن به سؤالات اجباری باشد در این صورت:

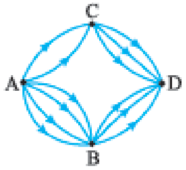
الف) به چند طریق می‌توان فقط به قسمت اول این آزمون پاسخ داد؟

ب) به چند طریق می‌توان فقط به قسمت دوم این آزمون پاسخ داد؟

پ) به چند طریق می‌توان به یکی از دو قسمت این آزمون پاسخ داد؟

ت) به چند طریق می‌توان به دو قسمت این آزمون پاسخ داد؟

۴- با توجه به شکل روبه‌رو به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) به چند طریق می‌توان از A به D رفت و از B گذشت؟

ب) به چند طریق می‌توان از A به D رفت و از B عبور نکرد؟

پ) به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

۵- با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ چند عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که:

الف) عدد زوج باشد. ب) عدد فرد باشد. پ) عدد مضرب ۵ باشد. ت) عدد بزرگ‌تر از ۶۰۰۰ باشد.

۶- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۸ چند عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که:

الف) عدد زوج باشد. ب) عدد فرد باشد. پ) عدد مضرب ۵ باشد. ت) عدد بزرگ‌تر از ۶۰۰۰ باشد.

۷- با توجه به حروف انگلیسی A، B، C، D، E و F به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) تعداد کل جایگشت‌های این ۶ حرف را به دست آورید.

ب) تعداد جایگشت‌های ۶تایی که A و B کنار هم باشند را به دست آورید.

پ) تعداد جایگشت‌های ۶تایی که D دقیقاً بعد از C بیاید را به دست آورید.

۸- ۳ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به طوری که:

الف) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم در کنار هم باشند.

ب) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم در کنار هم و دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم در کنار هم باشند.

پ) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم و پایهٔ دوازدهم یک‌درمیان در صف بایستند.

۹- با حروف کلمهٔ «برجام» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمهٔ ۳حرفی می‌توان نوشت که به «م» ختم شود؟

ت) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت که با «ب» شروع و به «ج» ختم شوند؟

۱۰- با حروف کلمهٔ «انسانی» چند کلمهٔ ۶حرفی متمایز می‌توان نوشت؟

۱۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ت) $(۶-۳)!$ پ) $\frac{۵!}{۳!}$ ب) $۳!-۲!$ الف) $۵!$

ج) $\frac{۱۳!}{(۱۳-۴)!\,۴!}$ ث) $\frac{۷!}{(۷-۳)!\,۳!}$

۱۲- در یک کلاس ۱۲نفره که علی و رضا نیز در آن حضور دارند:

الف) به چند طریق می‌توان ۲ نفر انتخاب کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان ۲ نفر یکی نمایندهٔ کلاس و دیگری نمایندهٔ ورزشی انتخاب کرد؟

پ) به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که علی هم جزء آن‌ها باشد؟

ت) به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که رضا جزء آن‌ها نباشد؟

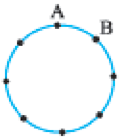
ث) به چند طریق می‌توان یک تیم ۴نفره انتخاب کرد که علی و رضا جزء آن‌ها باشند؟

ج) به چند طریق می‌توان یک تیم ۴نفره انتخاب کرد که علی و رضا جزء آن‌ها نباشند؟

چ) به چند طریق می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد که علی جزء آن‌ها باشد و رضا جزء آن‌ها نباشد؟

۱۳- در یک لیگ فوتبال با ۱۴ تیم که بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، چند بازی باید انجام شود؟

۱۴- با توجه به شکل روبه‌رو به سؤالات پاسخ دهید.



الف) با این نقاط چند وتر متمایز می‌توان رسم کرد؟

ب) با این نقاط چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟

پ) با این نقاط چند چهارضلعی متمایز می‌توان رسم کرد؟

ت) با این نقاط چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد که یکی از رئوسش A باشد؟

ث) با این نقاط چند چهارضلعی متمایز می‌توان رسم کرد که یکی از رئوسش A باشد؟

چ) با این نقاط چند چهارضلعی متمایز می‌توان رسم کرد که A و B دو رأسش باشند؟

۱۵- با توجه به مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ A را به دست آورید.

ب) تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی که شامل عضو a هستند را به دست آورید.

پ) تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی که عضو h را نداشته باشند را به دست آورید.

ت) تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی که شامل عضوهای a و b باشند را به دست آورید.

ث) تعداد زیرمجموعه‌های پنج‌عضوی که شامل عضو a و فاقد عضوهای g و h باشند را به دست آورید.

۱۶- در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی وجود دارد.

الف) به چند طریق می‌توان از این کیسه ۳ مهره انتخاب کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان از این کیسه سه مهره انتخاب کرد که یکی قرمز و دوتا آبی باشد؟

پ) به چند طریق می‌توان ۴ مهره انتخاب کرد که تعداد قرمزها و آبی‌ها برابر باشد؟

۱۷- از بین ۵ کارگر و ۷ کارمند می‌خواهیم تیم‌های ۶ نفره انتخاب کنیم.

الف) این تیم بدون هیچ شرطی انتخاب شود.

ب) یک نفر کارگر و ۵ نفر کارمند در تیم حضور داشته باشند.

پ) به تعداد مساوی کارگر و کارمند انتخاب شود.

ت) حداقل ۵ کارمند انتخاب شود.

ث) حداکثر ۲ کارگر انتخاب شود.

چ) فقط ۴ کارگر انتخاب شود.

۲ احتمال

پدیده‌های تصادفی و قطعی

روزانه با پدیده‌های مختلفی مواجه می‌شویم. در مورد برخی از این پدیده‌ها پاسخ قطعی وجود دارد ولی در مورد برخی دیگر پاسخ قطعی وجود ندارد. برای مثال اگر سیبی از بالای درختی رها شود، می‌دانیم قطعاً به سوی زمین خواهد افتاد؛ ولی در پرتاب یک سکه قبل از این‌که به زمین برسد، در مورد رو و یا پشت آمدن آن نظر قطعی نمی‌توانیم بدهیم.

پدیده یا آزمایش تصادفی

پدیده یا آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آن‌ها قبل از انجام آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌نامیم. در پدیده‌های تصادفی از همهٔ نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم، اما از این‌که کدام حالت قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداریم.

برآمد: به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی یک برآمد می‌گوییم. برای مثال در پرتاب یک تاس، هر کدام از اعداد ۱ تا ۶ ممکن است ظاهر شود. به هر کدام از اعداد ۱ تا ۶ در این پدیدهٔ تصادفی، یک برآمد گفته می‌شود. (هر کدام به تنهایی یک برآمد)

پدیده یا آزمایش قطعی

آزمایش یا پدیده‌هایی که نتیجهٔ آن‌ها قبل از انجام آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش یا پدیده‌های قطعی می‌گوییم.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) $m+n$ (اصل جمع)   ب) $m \times n$ (اصل ضرب)   پ) ۱

ت) $n!$ ث) ترکیب

۲- الف) یک نوع غذا و یک نوع دسر؛ بنا بر اصل ضرب تعداد غذاها را در تعداد دسرها ضرب می‌کنیم («و» اصل ضرب).   ۴×۲=۸

ب) یک نوع سالاد یا یک نوع دسر؛ بنا بر اصل جمع تعداد سالادها را با تعداد دسرها جمع می‌کنیم («یا» اصل جمع).   ۳+۲=۵

پ) یک نوع غذا و یک نوع سالاد و یک نوع دسر؛ بنا بر اصل ضرب تعداد هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم.   ۴×۳×۲=۲۴

ت) یک نوع غذا یا یک نوع سالاد یا یک نوع دسر؛ بنا بر اصل جمع تعداد هر کدام را با هم جمع می‌کنیم.   ۴+۳+۲=۹

ث)

$$\underbrace{\underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع سالاد}}_{\text{اصل ضرب ۱۲=۴×۳}}\ \text{یا}\ \underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع دسر}}_{\text{اصل ضرب ۸=۴×۲}}}_{\text{اصل جمع ۱۲+۸}}$$

ج)

$$\underbrace{\underbrace{\text{یک نوع غذا یا یک نوع سالاد}}_{\text{اصل جمع ۷=۳+۴}}\ \text{و}\ \underbrace{\text{یک نوع غذا یا یک نوع دسر}}_{\text{اصل جمع ۶=۲+۴}}}_{\text{اصل ضرب ۴۲=۷×۶}}$$

۳- الف) برای پاسخ‌دادن به ۳ سؤال دوگزینه‌ای برای هر سؤال ۲ حالت وجود دارد (پاسخ به سؤالات اجباری است) و چون سؤالات مرحله به مرحله پاسخ داده می‌شود بنا بر اصل ضرب به ۸ = ۲×۲×۲ حالت می‌توان به این سؤالات پاسخ داد.

ب) برای پاسخ‌دادن به ۳ سؤال چهارگزینه‌ای، برای هر سؤال چهار حالت وجود دارد و چون پاسخ به سؤالات مرحله به مرحله انجام می‌شود بنا بر اصل ضرب ۶۴ = ۴×۴×۴ حالت برای پاسخ‌گویی به این سؤالات وجود دارد.

پ) برای پاسخ‌دادن به قسمت اول «یا» قسمت دوم (پاسخ‌دادن به یکی از دو قسمت) بنا بر اصل جمع تعداد حالت‌های قسمت اول و قسمت دوم را با هم جمع می‌کنیم: ۸+۶۴=۷۲

ت) برای پاسخ‌دادن به قسمت اول و قسمت دوم (به هر دو قسمت) بنا بر اصل ضرب تعداد حالت‌های قسمت اول را در تعداد حالت‌های قسمت دوم ضرب می‌کنیم: ۸×۶۴=۵۱۲

۴- الف) از A به B، ۴ مسیر و از B به D، ۳ مسیر وجود دارد بنا بر اصل ضرب ۱۲ = ۳×۴ مسیر از A به D با گذشتن از B وجود دارد.

ب) برای رفتن از A به D بدون عبور از B باید از C عبور کرد. از A به C، ۲ مسیر و از C به D، ۳ مسیر وجود دارد. بنا بر اصل ضرب از A به D با گذشتن از C، ۶ = ۳×۲ حالت وجود دارد.

پ) برای رفتن از A به D، از B «یا» C باید عبور کرد. بنابراین با توجه به اصل جمع تعداد حالت‌های هر کدام را با هم جمع می‌کنیم: ۱۸=۶+۱۲

۵-

الف)   ۵×۴×۳=۶۰ $\underline{۵}\ \ \underline{۴}\ \ \underset{۴,۶,۸}{\underline{۳}}$

ب)   ۵×۴×۳=۶۰ $\underline{۵}\ \ \underline{۴}\ \ \underset{۳,۵,۷}{\underline{۳}}$

پ)   ۵×۴×۱=۲۰ $\underline{۵}\ \ \underline{۴}\ \ \underset{۵}{\underline{۱}}$

ت)   ۳×۵×۴=۶۰ $\underset{۶,۷,۸}{\underline{۳}}\ \ \underline{۵}\ \ \underline{۴}$

۶- الف) چون صفر را در سمت چپ عدد نمی‌توانیم قرار دهیم آن را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$\underline{۶}\ \ \underline{۵}\ \ \underset{۰}{\underline{۱}}$ یا $\underline{۵}\ \ \underline{۵}\ \ \underset{۲,۸}{\underline{۲}}$

۵۰+۳۰=۸۰   ۶×۵×۱=۳۰   ۵×۵×۲=۵۰

ب)   ۵×۵×۴=۱۰۰ $\underline{۵}\ \ \underline{۵}\ \ \underset{۱,۳,۵,۷}{\underline{۴}}$

پ) $\underset{۰}{\underline{۱}}\ \ \underline{۵}\ \ \underline{۶}$ یا $\underset{۵}{\underline{۱}}\ \ \underline{۵}\ \ \underline{۵}$

$۲۵ + ۳۰ = ۵۵$ $\qquad ۶ \times ۵ \times ۱ = ۳۰$ $\qquad ۵ \times ۵ \times ۱ = ۲۵$

ت) $۲ \times ۶ \times ۵ = ۶۰$ $\qquad \underset{۷,۸}{\underline{۲}}\ \ \underline{۶}\ \ \underline{۵}$

۷- الف) تعداد کل جایگشت‌های این ۶ حرف برابر !۶ است. $۶! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۷۲۰$

ب) $\boxed{AB}\ \ C\ \ D\ \ E\ \ F$

A و B را در جعبه قرار می‌دهیم تعداد جایگشت‌های این جعبه با چهار حرف دیگر برابر !۵ و چون A و B در داخل جعبه می‌توانند جابه‌جا شوند، !۵ را در !۲ ضرب می‌کنیم. $۵! \times ۲! = ۱۲۰ \times ۲ = ۲۴۰$

پ) $A\ \ B\ \ \boxed{CD}\ \ E\ \ F$

C و D را در داخل یک جعبه قرار می‌دهیم تعداد جایگشت‌های این جعبه با چهار حرف دیگر برابر !۵ است چون در صورت سؤال گفته شده D دقیقاً بعد از C بیاید اعضای داخل جعبه امکان جابه‌جایی ندارند؛ پس تعداد این جایگشت‌ها برابر !۵ است. $۵! = ۱۲۰$

۸- دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را با $E_۱, E_۲, E_۳$ و دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم را با $D_۱, D_۲, D_۳, D_۴$ نمایش می‌دهیم.

الف) $\boxed{E_۱E_۲E_۳}\ \ D_۱\ \ D_۲\ \ D_۳\ \ D_۴$

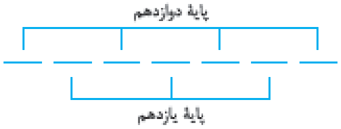
دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را در یک جعبه قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌های این جعبه و چهار عضو دیگر برابر !۵ است و جایگشت‌های اعضای داخل جعبه هم برابر !۳ است. در نتیجه تعداد حالت‌های صف ایستادن این دانش‌آموزان به طوری که دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم کنار هم باشند برابر است با:

$۵! \times ۳! = ۱۲۰ \times ۶ = ۷۲۰$

ب) $\boxed{E_۱E_۲E_۳}\ \ \boxed{D_۱D_۲D_۳D_۴}$

دانش‌آموزان پایه یازدهم و دوازدهم را به طور جداگانه در داخل جعبه قرار می‌دهیم تعداد جایگشت‌های این دو جعبه برابر !۲ است و جایگشت‌های جعبهٔ مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم برابر !۳ و پایهٔ دوازدهم برابر !۴ است؛ در نتیجه: $۲! \times ۳! \times ۴! = ۲ \times ۶ \times ۲۴ = ۲۸۸$

پ) جایگشت‌های مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم برابر !۳ و جایگشت‌های مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم برابر !۴ است در نتیجه: $۳! \times ۴! = ۶ \times ۲۴ = ۱۴۴$



۹- کلمهٔ برجام از پنج حرف متمایز «ب»، «ر»، «ج»، «ا» و «م» تشکیل شده است.

الف) تعداد کلمه‌های پنج حرفی که با این ۵ حرف متمایز می‌توان نوشت برابر !۵ است. $۵! = ۱۲۰$

ب) **روش اول** انتخاب ۴ شیء از بین ۵ شیء که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم است.

$$P(۵,۴) = \frac{۵!}{(۵-۴)!} = \frac{۵!}{۱!} = ۵! = ۱۲۰$$

روش دوم برای کلمهٔ چهارحرفی چهار جایگاه قرار می‌دهیم.

$\underline{۵}\ \ \underline{۴}\ \ \underline{۳}\ \ \underline{۲}$ $\qquad ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۱۲۰$

پ) **روش اول** برای به دست آوردن تعداد کلمات سه‌حرفی که به «م» ختم می‌شوند، تعداد انتخاب‌های ۲ تا از ۴ حرف که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها اهمیت دارد را به دست می‌آوریم.

$$P(۴,۲) = \frac{۴!}{(۴-۲)!} = \frac{۴!}{۲!} = \frac{\cancel{۲}! \times ۳ \times ۴}{\cancel{۲}!} = ۱۲$$

روش دوم سه جایگاه برای کلمات ۳حرفی قرار می‌دهیم و حرف «م» را در آخر کلمه قرار می‌دهیم.

$\underset{م}{\underline{۱}}\ \ \underline{۳}\ \ \underline{۴}$ $\qquad ۱ \times ۳ \times ۴ = ۱۲$

ت) **روش اول** برای به دست آوردن تعداد کلمات ۴حرفی که با «ب» شروع و به «ج» ختم شوند، تعداد انتخاب‌های ۲ حرف از ۳ حرف که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها اهمیت دارد را محاسبه می‌کنیم.

$$P(۳,۲) = \frac{۳!}{(۳-۲)!} = \frac{۳!}{۱!} = ۶$$

روش دوم چهار جایگاه برای کلمه‌های ۴حرفی قرار می‌دهیم:

$\underset{ج}{\underline{۱}}\ \ \underline{۲}\ \ \underline{۳}\ \ \underset{ب}{\underline{۱}}$ $\qquad ۲ \times ۳ = ۶$

۱۰- «انسانی» از ۶ حرف تشکیل شده که حرف «الف» دو بار و حرف «ن» نیز دو بار تکرار شده است پس !۶ را دو بار بر !۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۶!}{۲!۲!}=\frac{\cancel{۲!}\times۳\times۴\times۵\times\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\cancel{۲!}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۸۰$$

۱۱-

الف) $۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$

ب) $۳!-۲!=۶-۲=۴$

پ) $\frac{۵!}{۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳!}}\times۴\times۵}{\underset{۱}{\cancel{۳!}}}=۲۰$

ت) $(۶-۳)!=۳!=۶$

ث) $\frac{۷!}{(۷-۳)!۳!}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times۵\times\overset{۱}{\cancel{\overset{۳}{\cancel{۶}}}}\times۷}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۳۵$

ج) $\frac{۱۳!}{(۱۳-۴)!۴!}=\frac{۱۳!}{۹!۴!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۹!}}\times\overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times۱۱\times\overset{۱}{\cancel{\overset{۳}{\cancel{۱۲}}}}\times۱۳}{\underset{۱}{\cancel{۹!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۴}}}=۷۱۵$

۱۲- الف) انتخاب ۲ نفر از ۱۲ نفر که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها اهمیت ندارد (ترکیب).

$$\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲\times۱۱}{۲}=۶۶$$

ب) انتخاب ۲ نفر از ۱۲ نفر که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم است (جایگشت).

$$P(۱۲,۲)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۲)!}=\frac{۱۲!}{۱۰!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۰!}}\times۱۱\times۱۲}{\underset{۱}{\cancel{۱۰!}}}=۱۳۲$$

پ) فرض کنیم علی انتخاب شده است، پس ۲ نفر از ۱۱ نفر باید انتخاب کنیم که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم نیست.

$$\binom{۱۱}{۲}=\frac{۱۱\times۱۰}{۲}=۵۵$$

ت) رضا را از کلاس کنار می‌گذاریم؛ از ۱۱ نفر باقی‌مانده ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. ترتیب قرارگرفتن آن‌ها هم مهم نیست.

$$\binom{۱۱}{۳}=\frac{۱۱!}{(۱۱-۳)!۳!}=\frac{۱۱!}{۸!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۸!}}\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times۱۱}{\underset{۱}{\cancel{۸!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۱۶۵$$

ث) فرض کنیم علی و رضا انتخاب شده باشند، پس تعداد انتخاب‌های ۲ نفر از ۱۰ نفر را که ترتیب آن‌ها مهم نیست را به دست می‌آوریم.

$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵$$

ج) علی و رضا را کنار می‌گذاریم از ۱۰ نفر باقی‌مانده ۴ نفر انتخاب می‌کنیم (ترکیب).

$$\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!۴!}=\frac{۱۰!}{۶!۴!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۶!}}\times۷\times\overset{۱}{\cancel{\overset{۲}{\cancel{۸}}}}\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times۱۰}{\underset{۱}{\cancel{۶!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۴}}}=۲۱۰$$

چ) فرض کنیم علی انتخاب شده است، پس ۳ نفر از ۱۰ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم (رضا رو هم کنار گذاشته‌ایم). ترتیب قرارگرفتن آن‌ها هم مهم نیست.

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!۳!}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۷!}}\times\overset{۴}{\cancel{۸}}\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times۱۰}{\underset{۱}{\cancel{۷!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۱۲۰$$

۱۳- برای به دست آوردن تعداد بازی‌ها ۲ تیم از ۱۴ تیم انتخاب می‌کنیم و چون بازی‌ها به صورت رفت و برگشت است ترتیب قرارگرفتن آن‌ها اهمیت دارد (جایگشت).

$$P(۱۴,۲)=\frac{۱۴!}{(۱۴-۲)!}=\frac{۱۴!}{۱۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۲!}}\times۱۳\times۱۴}{\underset{۱}{\cancel{۱۲!}}}=۱۸۲$$

در بازی‌هایی که به صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود میزبان یا مهمان بودن تیم فرق می‌کند.

۱۴- ۸ نقطه روی دایره قرار دارد.

الف) برای رسم هر وتر دو نقطه نیاز داریم، پس تعداد انتخاب‌های ۲ نقطه از ۸ نقطه (ترکیب) را به دست می‌آوریم.

$$\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$$

ب) برای رسم هر مثلث به سه نقطه نیاز داریم، پس تعداد انتخاب‌های ۳ نقطه از ۸ نقطه را به دست می‌آوریم (ترکیب).

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{(۸-۳)!۳!}=\frac{۸!}{۵!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۵!}}\times\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۶}}\times۷\times۸}{\underset{۱}{\cancel{۵!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۵۶$$

پ) تعداد انتخاب‌های ۴ نقطه از ۸ نقطه را به دست می‌آوریم (ترکیب).

$$\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{(۸-۴)!۴!}=\frac{۸!}{۴!۴!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times۵\times\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۶}}\times۷\times\overset{۲}{\cancel{۸}}}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۴}}}=۷۰$$

ت) فرض کنیم نقطهٔ A انتخاب شده است، دو نقطهٔ دیگر از ۷ نقطهٔ باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

ث) فرض کنیم نقطهٔ A انتخاب شده است، سه نقطه دیگر از ۷ نقطهٔ باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{(۷-۳)!۳!}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times۵\times\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۶}}\times۷}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۳۵$$

ج) فرض می‌کنیم دو نقطهٔ A و B انتخاب شده باشند؛ دو نقطهٔ دیگر از ۶ نقطهٔ باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

۱۵- الف) برای به دست آوردن زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ A تعداد انتخاب‌های ۳ عضو از ۸ عضو مجموعهٔ A را به دست می‌آوریم. ترتیب قرارگرفتن اعضا در مجموعه مهم نیست. (ترکیب)

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{(۸-۳)!۳!}=\frac{۸!}{۵!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۵!}}\times\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۶}}\times۷\times۸}{\underset{۱}{\cancel{۵!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۵۶$$

ب) فرض می‌کنیم عضو a انتخاب شده است؛ دو عضو دیگر از هفت عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

پ) h را کنار می‌گذاریم و از هفت عضو باقی‌مانده سه عضو انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{(۷-۳)!۳!}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times۵\times\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۶}}\times۷}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۳۵$$

ت) فرض کنیم a و h انتخاب شده‌اند دو عضو دیگر از شش عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

ث) فرض کنیم عضو a انتخاب شده است؛ چهار عضو دیگر از پنج عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم (g و h را نیز کنار گذاشته‌ایم).

$$\binom{۵}{۴}=۵$$

۱۶- الف) در کیسه ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی و در کل ۹ مهره وجود دارد، تعداد انتخاب‌های ۳ مهره از ۹ مهره به طوری که ترتیب آن‌ها مهم نباشد را به دست می‌آوریم (ترکیب).

$$\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{(۹-۳)!۳!}=\frac{۹!}{۶!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۶!}}\times۷\times\overset{۴}{\cancel{۸}}\times\overset{۳}{\cancel{۹}}}{\underset{۱}{\cancel{۶!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۸۴$$

ب) انتخاب سه مهره که یکی قرمز و دوتا آبی باشد. تعداد انتخاب‌های یک مهره از ۴ مهرهٔ قرمز را در تعداد حالت‌های دو مهره از ۵ مهرهٔ آبی ضرب می‌کنیم.

یک مهره از ۴ مهرهٔ قرمز:

$$\binom{۴}{۱}=۴$$

دو مهره از ۵ مهرهٔ آبی:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

تعداد حالت‌های هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم.

$$۱۰\times۴=۴۰$$

پ) تعداد مهره‌های قرمز و آبی در ۴ مهرهٔ انتخابی برابر باشند، یعنی دو مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی انتخاب شوند.

دو مهره از ۴ مهرهٔ قرمز: $\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$

دو مهره از ۵ مهرهٔ آبی: $\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$

تعداد حالت‌های هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم: $۶\times۱۰=۶۰$

۱۷- الف) هیچ شرطی برای انتخاب ۶ نفر وجود ندارد. تعداد انتخاب‌های ۶ نفر از ۱۲ نفر (۵ کارگر و ۷ کارمند) را به طوری که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم نباشد، به دست می‌آوریم.

$$\binom{۱۲}{۶}=\frac{۱۲!}{(۱۲-۶)!۶!}=\frac{۱۲!}{۶!۶!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۶!}}\times۷\times\overset{۱}{\cancel{۸}}\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۲}{\cancel{۱۰}}\times۱۱\times\overset{۲}{\cancel{۱۲}}}{\underset{۱}{\cancel{۶!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۴}}\times\underset{۱}{\cancel{۵}}\times\underset{۱}{\cancel{۶}}}=۱۲\times۷\times۱۱=۹۲۴$$

ب) تعداد انتخاب‌های یک نفر از ۵ کارگر را در تعداد انتخاب‌های ۵ نفر از ۷ نفر کارمند ضرب می‌کنیم.

یک نفر از ۵ کارگر: $\binom{۵}{۱}=۵$

۵ نفر از ۷ کارمند: $\binom{۷}{۵}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

تعداد حالت‌های هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم: $۲۱\times۵=۱۰۵$

پ) در تیم ۶نفره به تعداد مساوی کارگر و کارمند انتخاب می‌شود؛ یعنی ۳ نفر کارگر و ۳ نفر کارمند، پس تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۵ نفر کارگر را در تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۷ نفر کارمند ضرب می‌کنیم.

۳ نفر از ۵ کارگر: $\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$

۳ نفر از ۷ کارمند:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{(۷-۳)!۳!}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴!}}\times۵\times\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۶}}\times۷}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۳۵$$

تعداد حالت‌های هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم: $۳۵\times۱۰=۳۵۰$

ت) حداقل ۵ کارمند انتخاب شود، یعنی کم‌ترین تعداد کارمندها برابر ۵ نفر باشد، یعنی ۵ کارمند و یک کارگر یا ۶ نفر کارمند انتخاب شود.

$$\underbrace{\overbrace{\binom{۷}{۶}=۷}^{\text{۶ نفر کارمند}}\quad\text{یا}\quad\overbrace{\underset{۵\times۲۱=۱۰۵}{\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۵}}\ \text{اصل ضرب}}^{\text{۵ کارمند و یک کارگر}}}_{\text{اصل جمع ۱۰۵+۷=۱۱۲}}$$

ث) حداکثر ۲ کارگر یعنی بیشترین تعداد انتخاب کارگر ۲ نفر باشد؛ یعنی ۰، ۱ و ۲ کارگر در نتیجه:

$$\underbrace{\overbrace{\binom{۷}{۴}\times\binom{۵}{۲}=۳۵\times۱۰=۳۵۰\ \text{اصل ضرب}}^{\text{۲ کارگر و ۴ کارمند}}\quad\text{یا}\quad\overbrace{\binom{۷}{۵}\times\binom{۵}{۱}=۲۱\times۵=۱۰۵\ \text{اصل ضرب}}^{\text{۱ کارگر و ۵ کارمند}}\quad\text{یا}\quad\overbrace{\binom{۷}{۶}=۷\ \text{اصل ضرب}}^{\text{۰ کارگر و ۶ کارمند}}}_{\text{اصل جمع ۳۵۰+۱۰۵+۷=۴۶۲}}$$

ج) فقط ۴ نفر کارگر انتخاب شود. تعداد حالت‌های ۴ نفر از ۵ نفر کارگر را در مابقی ۶ نفر یعنی ۲ نفر از ۷ نفر کارمند ضرب می‌کنیم:

۴ نفر از ۵ کارگر: $\binom{۵}{۴}=۵$

۲ نفر از ۷ کارمند: $\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

تعداد حالت‌های هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم: $۵\times۲۱=۱۰۵$