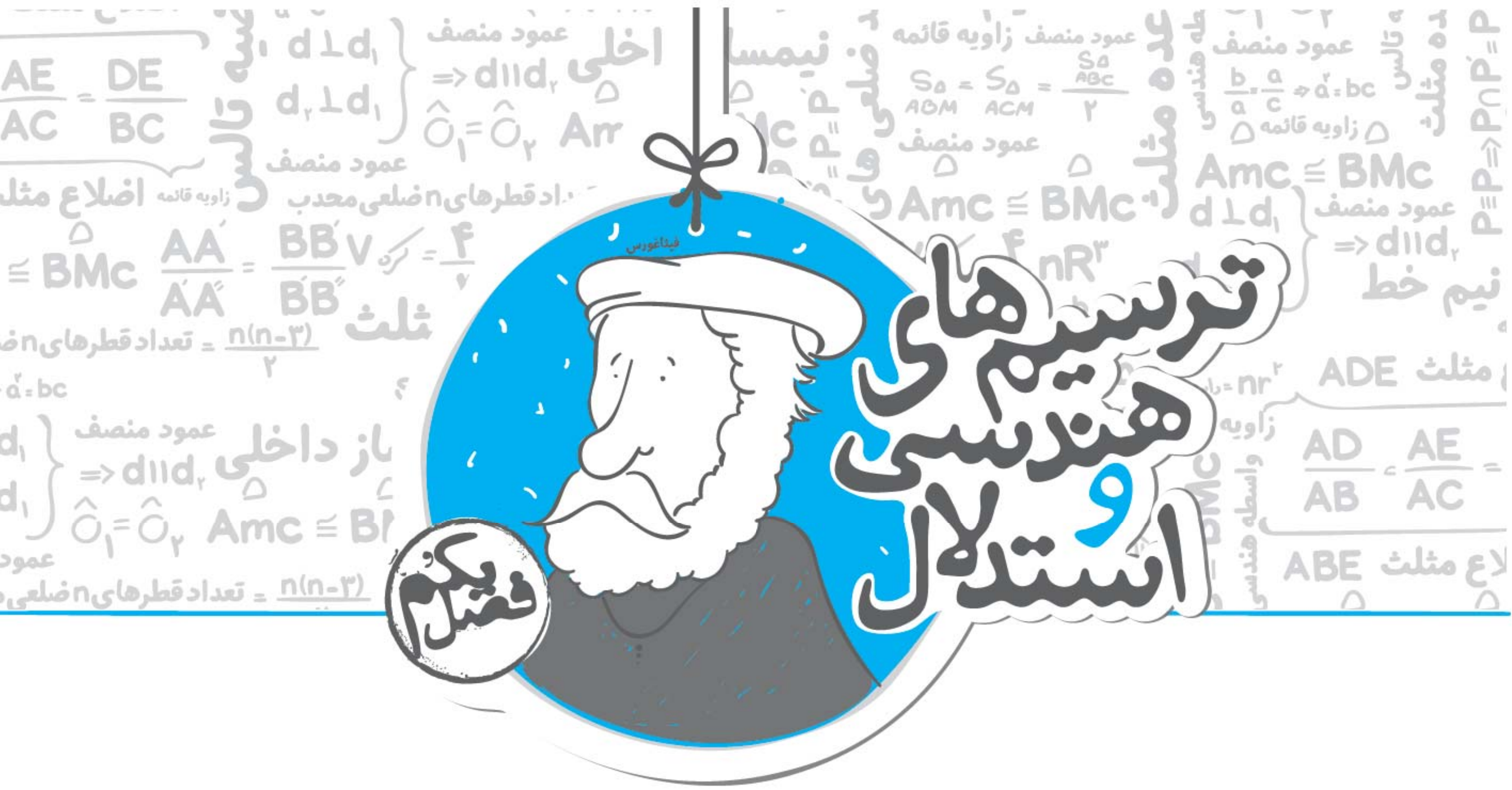
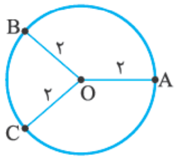


۱ ترسیم‌های هندسی

در درس اول از فصل یک، ترسیم‌های هندسی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بحث، ابتدا چند ویژگی مهم را در ترسیم‌های هندسی، مثل نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه یا یک خط مقدار ثابتی است، بیان می‌کنیم. سپس روش رسم نیمساز، عمودمنصف، مثلث، چندضلعی‌های خاص و ... را مطالعه می‌کنیم.

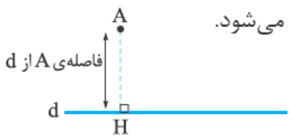
یکی از مهم‌ترین مسائل مقدماتی در ترسیم، پیداکردن مجموعه نقاطی است که از یک نقطه‌ی ثابت مثل O، به فاصله‌ی ثابت و مشخصی باشند.



مطابق شکل روبه‌رو تعدادی نقطه در نظر گرفته شده که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی معلوم ۲ واحد قرار دارند. با کمی دقت متوجه می‌شویم چون نقطه‌ی O ثابت و هم‌چنین فاصله‌ی نقاط موردنظر از O نیز ثابت و معلوم است، پس مجموعه نقاط مورد بحث روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ قرار می‌گیرند.

نتیجه‌ی مهم مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی ثابت R هستند، مشخص‌کننده‌ی دایره‌ای مثل C به مرکز O و شعاع R خواهند بود. این دایره را معمولاً با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

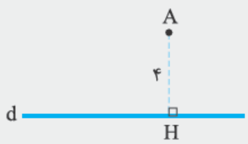
یادآوری فاصله‌ی یک نقطه مثل A از یک خط، برابر است با طول عمودی که از نقطه‌ی A بر خط d اخراج می‌شود.

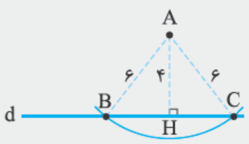


مثال و پاسخ

مثال **نقطه‌ی A مطابق شکل به فاصله‌ی ۴ واحد از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی ۶ واحد از نقطه‌ی A باشند.**

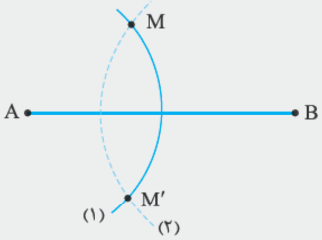
پاسخ مطابق شکل وقتی گفته می‌شود فاصله‌ی A از خط d برابر ۴ است، یعنی طول عمودی که از A بر خط d وارد شده برابر ۴ است. از طرفی نقاطی که از A به فاصله‌ی ۶ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ قرار می‌گیرند. پس به مرکز A و شعاع ۶ کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. نقاط B و C جواب مسئله هستند.





مثال و پاسخ

مثال **مطابق شکل پاره‌خط AB به طول ۴ واحد داده شده است. یک بار به مرکز A و شعاع ۲/۵ واحد، کمان (۱) و یک بار هم به به مرکز B و شعاع ۳ واحد، کمان (۲) رسم گردیده است. این دو کمان یکدیگر را در M و M′ قطع کرده‌اند:**



الف) فاصله‌ی نقاط تقاطع دو کمان از A و B را مشخص کنید.

ب) برای این‌که اصولاً تقاطعی داشته باشیم، باید چه شرطی روی فاصله‌ی A و B و اندازه‌ی شعاع‌ها گذاشته شود؟

پ) محیط چهارضلعی AMBM′ را بیابید.

پاسخ **الف** طبق شکل داده‌شده در فرض، تمام نقاط روی کمان (۱) که به مرکز A و شعاع ۲/۵ زده شده، از نقطه‌ی A، فاصله‌ی ثابت ۲/۵ دارند. از طرفی تمام نقاط روی کمان (۲) هم که به مرکز B و شعاع ۳ رسم گردیده، از نقطه‌ی B، فاصله‌ی ثابت ۳ خواهند داشت. این وضعیت برای نقاط M و M′ هم صادق است؛ یعنی M و M′، از A فاصله‌ی ۲/۵ و از B فاصله‌ی ۳ دارند.

$MA = M'A = ۲/۵ \ , \ MB = M'B = ۳$

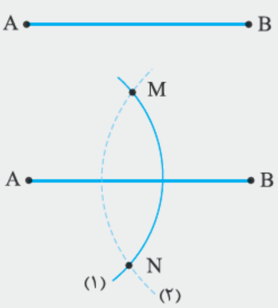
ب اگر کمان‌های (۱) و (۲) بخواهند در دو نقطه‌ی متقاطع باشند، باید جمع شعاع‌های دو کمان از طول پاره‌خط AB بزرگ‌تر باشد.

پ با توجه به این‌که محیط هر چندضلعی برابر جمع اضلاع آن است، پس داریم:

محیط چهارضلعی $AMBM' = AM + MB + BM' + M'A = ۲/۵ + ۳ + ۳ + ۲/۵ = ۱۱$

مثال و پاسخ

مثال **دو نقطه‌ی A و B را به فاصله‌ی ۴ cm از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A برابر ۲/۵ cm و از B برابر ۳ cm باشد.**



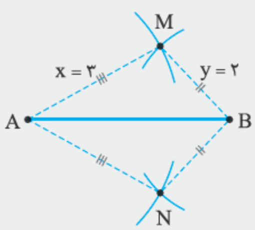
پاسخ مطابق شکل ابتدا پاره‌خط AB = ۴ cm رسم شده است.

برای این‌که فاصله‌ی نقاط موردنظر از A برابر ۲/۵ cm باشد باید روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲/۵ cm قرار گیرند. هم‌چنین روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ cm هم قرار می‌گیرند (تا فاصله‌شان از B برابر ۳ cm باشد). پس به مرکز A و شعاع ۲/۵ cm و هم‌چنین به مرکز B و شعاع ۳ cm کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند. این دو نقطه مطلوب مسئله هستند (به ترتیب کمان‌های (۱) و (۲)).

مثال و پاسخ

مثال **نقاط A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم قرار دارند. جاهای خالی را طوری پر کنید که مسئله‌ی زیر دو جواب داشته باشد:**

«نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر .... و از نقطه‌ی B برابر .... باشد.»

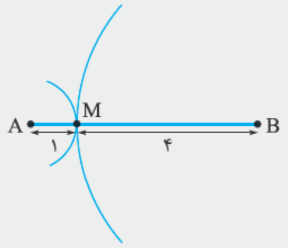


پاسخ مطابق شکل نقاط A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم واقع‌اند. برای این‌که **دو نقطه** در صفحه وجود داشته باشد که از A، فاصله‌ی x و هم‌چنین از B، فاصله‌ی y داشته باشد، **باید x + y از فاصله‌ی A و B بزرگ‌تر باشد**، یعنی $x + y > ۴$. مثلاً فرض می‌کنیم $x = ۳$ و $y = ۲$؛ یعنی اگر به مرکز A و شعاع ۳ و به مرکز B و شعاع ۲ کمان‌هایی بزنیم، یکدیگر را در M و N قطع می‌کنند، این دو نقطه جواب مسئله‌اند.

مثال و پاسخ

مثال **نقاط A و B به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از هم قرار دارند. جاهای خالی را طوری پر کنید که مسئله‌ی زیر یک جواب داشته باشد:**

«نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر .... و از نقطه‌ی B برابر .... باشد.»

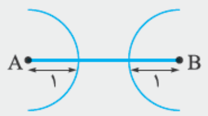


پاسخ مطابق شکل نقاط A و B به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از هم واقع‌اند. برای این‌که **یک نقطه** در صفحه داشته باشیم که فاصله‌اش از A برابر x و هم‌چنین از B برابر y باشد، باید $x+y$ **با فاصله‌ی A و B مساوی باشد**. مثلاً $x=۱$ و $y=۴$ یعنی اگر به مرکز A و شعاع ۱ و به مرکز B و شعاع ۴ کمان‌هایی بزنیم، بر یکدیگر در نقطه‌ی M **مماس** می‌شوند و M جواب مسئله است.

مثال و پاسخ

مثال **نقاط A و B به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از هم قرار دارند. جاهای خالی را طوری پر کنید که مسئله‌ی زیر جواب نداشته باشد:**

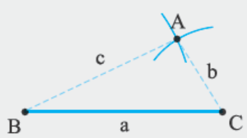
«نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر .... و از نقطه‌ی B برابر .... باشد.»



پاسخ مطابق شکل نقاط A و B به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از هم واقع‌اند. برای این‌که **نقطه‌ای در صفحه وجود نداشته باشد** که فاصله‌اش از A و B به ترتیب x و y باشد، باید $x+y$ از **فاصله‌ی A و B کم‌تر باشد**؛ یعنی $x+y<۳$، مثلاً $y=۱$ و $x=۱$.

مثال و پاسخ

مثال **پاره‌خط BC به طول a داده شده است. به مرکز B و شعاع c یک کمان و به مرکز C و شعاع b کمان دیگری می‌زنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. اگر فرض کنیم $a>b$ و $a>c$ باشد، به نظر شما چه رابطه‌ای بین مقادیر a، b و c وجود داشته باشد تا مثلث ABC رسم گردد؟ (یعنی نقطه‌ی تقاطع دو کمان رسم‌شده واقعاً وجود داشته باشد.)**



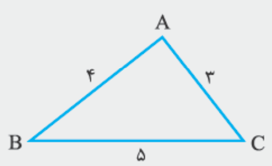
پاسخ برای این‌که دو کمان به شعاع‌های b و c یکدیگر را قطع کنند، باید جمع دو شعاع زده‌شده بیشتر از فاصله‌ی بین دو مرکز باشد. (یعنی جمع دو شعاع، باید بیش از طول پاره‌خط داده‌شده باشد. البته از $a>b$ و $a>c$ نتیجه می‌شود $۲a>b+c$ یا $b+c<۲a$؛ یعنی جمع دو شعاع خودبه‌خود از دو برابر طول پاره‌خط داده‌شده کم‌تر است.)

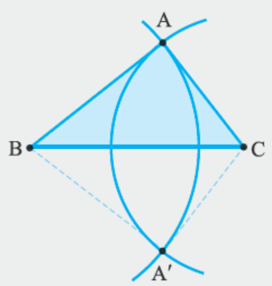
نکته این نامساوی به «نامساوی مثلثی» معروف است. در حالت کلی برای این‌که سه عدد a، b و c را بتوان به عنوان اضلاع یک مثلث در نظر گرفت، باید جمع هر دوتای آن‌ها از سومی بزرگ‌تر باشد.

یکی از مسائل مهم ترسیم هندسی، رسم مثلث با داشتن سه ضلع آن است. به مثال‌های بعدی توجه کنید:

مثال و پاسخ

مثال **چگونه می‌توان مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر رسم کرد؟**





پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است. برای رسم مثلث ABC ابتدا یکی از اضلاع مثلث (مثل بزرگ‌ترین ضلع)، یعنی $BC=۵\,cm$ را رسم می‌کنیم. حال فقط رأس A مانده است. طبق فرض چون $AB=۴\,cm$ بوده و رأس B هم ثابت است، پس رأس A بر دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ cm قرار دارد. بنابراین ابتدا کمانی به مرکز B و شعاع ۴ cm رسم می‌کنیم.

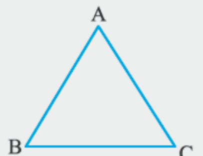
به ترتیب مشابه، چون $AC=۳\,cm$، پس A روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ cm واقع است. بنابراین کمانی به مرکز C و شعاع ۳ cm می‌کشیم تا کمان قبلی را در نقطه‌ی A قطع کند. (دقت کنید برای این مسئله دو مثلث ABC و A′BC رسم می‌شود که هر دو در حقیقت یک مثلث هستند.)

دقت کنید در این مسئله با برقراری شرط $۵<۴+۳$، مطمئن هستیم که مثلث قابل رسم است. (یعنی اگر جمع دو ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر از طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد، آن مثلث قابل رسم خواهد بود.)

مثال و پاسخ

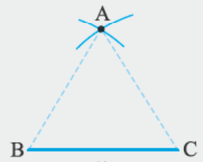
مثال **مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ سانتی‌متر رسم کنید.**

پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و جواب آن مثلث ABC (شکل (۱)) باشد. در این صورت ابتدا پاره‌خط $BC = ۶\ \mathrm{cm}$ را رسم می‌کنیم.



(۱)

حالا به مراکز B و C و شعاع‌های $۶\ \mathrm{cm}$، دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کنند. مثلث ABC جواب مسئله است (شکل (۲)).



(۲)

مثال و پاسخ

مثال **آیا مثلثی به اضلاع ۳، ۷ و ۱۱ قابل رسم است؟ چرا؟**

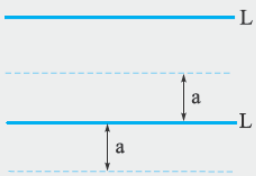
پاسخ خیر. زیرا جمع دو ضلع کوچک آن، بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ضلع مثلث نیست (حتی اگر مساوی هم باشند، مثلثی رسم نخواهد شد).

دقت کنید در این مسئله، حتی برقراری شرط‌های $۳ < ۷ + ۱۱$ و $۷ < ۳ + ۱۱$ کمکی به رسم مثلث نمی‌کند.

یافتن مجموعه نقاطی که از یک خط داده‌شده به فاصله‌ی معلومی باشند، مسئله‌ی مهمی در ترسیم‌های هندسی است. به مثال زیر توجه کنید:

مثال و پاسخ

مثال **مجموعه‌ای از نقاط را چنان بیابید که از خط داده‌شده‌ی L به فاصله‌ی معلوم a باشند. ($a > ۰$)**

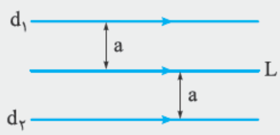


(۱)

پاسخ مطابق شکل خط L را در نظر می‌گیریم.

می‌خواهیم مجموعه‌ای از نقاط را پیدا کنیم که فاصله‌ی آن‌ها از خط L عدد ثابت و معلوم a باشد.

مطابق شکل (۱)، چند نقطه در نظر می‌گیریم که فاصله‌ی آن‌ها از خط L عدد معلوم a باشد.

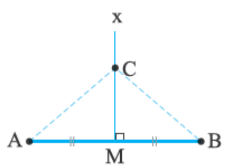


(۲)

در این صورت با اتصال این نقاط به هم معلوم می‌شود که مجموعه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از خط معلوم L، مقدار مشخص و ثابت a است، دو خط موازی L و در طرفین آن و به فاصله‌ی a از خط L می‌باشند. (شکل (۲))

خاصیت عمودمنصف یک پاره‌خط

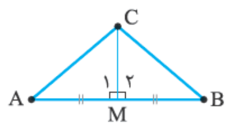
مطابق شکل پاره‌خط AB و عمودمنصف آن یعنی نیم‌خط Mx رسم شده و نقطه‌ی C را روی عمودمنصف این پاره‌خط در نظر گرفته‌ایم. **می‌خواهیم ثابت کنیم فاصله‌ی این نقطه (C) از دو سر پاره‌خط AB برابر است.**



فرض	C روی Mx، عمودمنصف AB است
حکم	$AC = BC$

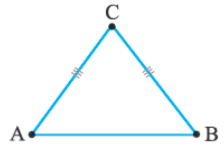
اثبات

نقطه‌ی C را به دو سر پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. مطابق شکل در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AMC و BMC داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AM = BM \\ MC = MC \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{BMC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} AC = BC$$

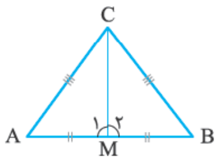
حال در حالت برعکس، مطابق شکل نقطه‌ی C را چنان در نظر می‌گیریم که از دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی یکسان باشد. **می‌خواهیم ثابت کنیم نقطه‌ی C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.**



فرض	$AC=BC$
حکم	C روی عمودمنصف AB است

اثبات

مطابق شکل نقطه‌ی C را به نقطه‌ی M وسط AB وصل می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم $MC \perp AB$ است:



$$\overset{\Delta}{AMC}\,,\,\overset{\Delta}{BMC}:\left\{\begin{matrix} AC=BC \\ AM=BM \\ CM=CM \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})} \overset{\Delta}{ACM}\cong\overset{\Delta}{BMC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \hat{M}_{۱}=\hat{M}_{۲}\quad (*)$$

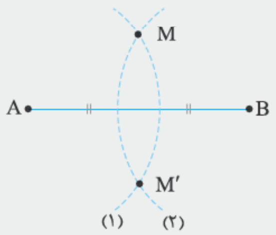
و چون AB یک پاره‌خط است پس $A\hat{M}B=۱۸۰^\circ$ یعنی $\hat{M}_{۱}+\hat{M}_{۲}=۱۸۰^\circ$؛ بنابراین طبق (*) نتیجه می‌گیریم $\hat{M}_{۱}=\hat{M}_{۲}=۹۰^\circ$ پس $CM \perp AB$
و چون خودمان C را به وسط AB وصل کرده‌ایم، پس MC عمودمنصف AB بوده و در نهایت C روی عمودمنصف AB قرار می‌گیرد.

نتیجه هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس اگر نقطه‌ای از دو سر پاره‌خطی به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار می‌گیرد.

مثال و پاسخ

مثال **نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه‌ی A و بار دیگر با همان شعاع از نقطه‌ی B کمان بزنید تا یکدیگر را در M و M' قطع کنند. M و M' چه ویژگی مشترکی دارند؟**

پاسخ مطابق شکل دو کمان با **شعاع‌های مساوی** هم و هر کدام بیش از $\frac{AB}{۲}$، یکی به مرکز A و دیگری به مرکز B زده شده و نقاط M و M' محل برخورد این دو کمان می‌باشند.



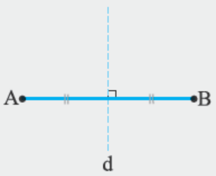
هر کدام از نقاط روی کمان (۱) از نقطه‌ی A و هر کدام از نقاط روی کمان (۲) از نقطه‌ی B فاصله‌ی یکسانی دارند. بنابراین کاملاً واضح است که نقاط M و M' که روی دو کمان (۱) و (۲) قرار دارند، از هر دو نقطه‌ی A و B فاصله‌ی یکسان دارند (چون شعاع دو کمان (۱) و (۲) یکسان است). پس M و M' روی عمودمنصف AB قرار می‌گیرند.

نکته برای رسم یک خط منحصربه‌فرد، وجود دو نقطه‌ی متمایز روی آن خط کافی است.

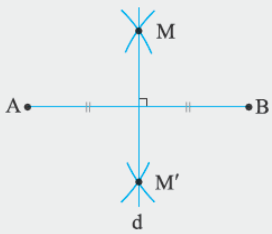
مثال و پاسخ

مثال **پاره‌خط دلخواه AB داده شده است. مراحل رسم عمودمنصف آن را توضیح دهید.**

پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد (شکل (۱)). برای این‌که بتوانیم خط d را رسم کنیم باید دو نقطه‌ی متمایز از آن را داشته باشیم، طوری‌که از A و B به یک فاصله باشند. بنابراین مطابق شکل(۲)، دو کمان با شعاع‌های یکسان، یکی به مرکز A و دیگری به مرکز B می‌زنیم. دقت کنید برای این‌که این دو کمان با هم متقاطع باشند، شعاع‌های آن‌ها باید بیش از $\frac{AB}{۲}$ باشد (باید نامساوی مثلثی $AM+MB>AB$ رعایت شود). نقاط تقاطع را M و M' می‌نامیم. چون M و M' روی دو کمان با شعاع‌های یکسان قرار دارند (به مراکز A و B)، پس $MA=MB$ و $M'A=M'B$. بنابراین M و M' هر دو روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند (چون از دو سر این پاره‌خط فاصله‌ی یکسان دارند)؛ پس با اتصال این دو نقطه‌ی متمایز، عمودمنصف موردنظر رسم خواهد شد (شکل(۲)).



(۱)



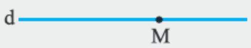
(۲)

بعضی از مواقع لازم است خطی عمود بر یک خط داده‌شده را رسم نماییم. در این‌صورت از خواص عمودمنصف استفاده می‌کنیم.

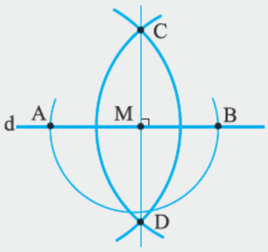
به مثال‌های بعدی توجه کنید:

مثال و پاسخ

مثال **مراحل و روش رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده از یک نقطه روی آن را توضیح دهید.**



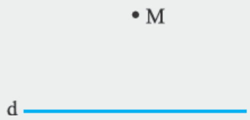
پاسخ مطابق شکل، خط d و نقطه‌ی M روی آن داده شده است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

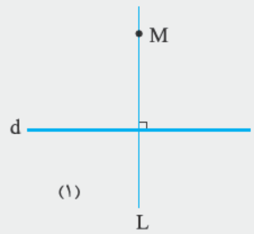


اگر بتوانیم روی خط d، پاره‌خطی مثل AB در نظر بگیریم که M وسط AB باشد، در این صورت عمودمنصف AB از M گذشته و خودبه‌خود بر d عمود می‌گردد. پس ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند. حال به مراکز A و B و به **شعاع یکسان** و هر کدام بزرگ‌تر از $\frac{AB}{۲}$، کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در C و D قطع کنند. با اتصال C و D به یکدیگر، عمودمنصف AB رسم شده که قطعاً از M می‌گذرد (چون M وسط AB است پس مثل D و C از نقاط A و B به یک فاصله بوده و در نتیجه M، C و D روی یک خط قرار می‌گیرند).

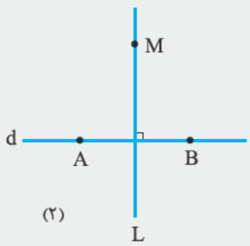
مثال و پاسخ

مثال **مراحل و روش رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده، از یک نقطه خارج آن را توضیح دهید.**



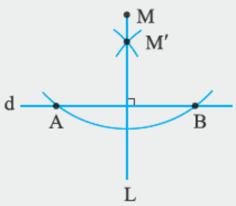


پاسخ مطابق شکل نقطه‌ی M خارج خط d قرار دارد. می‌خواهیم خطی بر d عمود کنیم تا از M بگذرد. فرض می‌کنیم خط L، از M گذشته و بر d عمود باشد. (شکل (۱))



مطابق شکل (۲) روی خط d پاره‌خطی مثل AB را در نظر گرفته‌ایم که عمودمنصف آن از M گذشته است (خط L). در این صورت L خودبه‌خود بر d عمود می‌شود.

برای مشخص‌کردن نقاط A و B، به مرکز M و شعاع بیش از فاصله‌ی M تا خط d، کمانی می‌زنیم تا خط d را در A و B قطع کند. حال عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم (به مراکز A و B دو کمان با شعاع دلخواه و بیشتر از $\frac{AB}{۲}$ می‌زنیم. یکی از نقاط برخورد دو کمان را M' می‌نامیم.)؛ حال M و M' را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم (دقت کنید M و M' هر دو روی عمودمنصف AB قرار دارند).

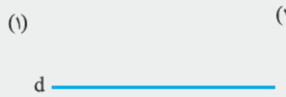


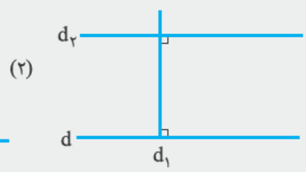
در این صورت عمودمنصف AB رسم شده است که از M گذشته و بر خط d عمود است.

مثال و پاسخ

مثال **مراحل و روش رسم خطی موازی با یک خط داده‌شده را توضیح دهید.**

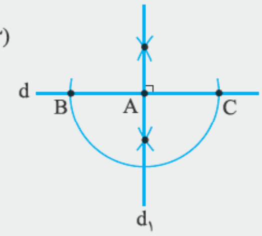
پاسخ مطابق شکل (۱) خطی مانند d مفروض است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که به موازات d باشد. مطابق شکل (۲)، اگر بتوانیم خطی مثل $d_۱$ را عمود بر d و سپس خط $d_۲$ را عمود بر $d_۱$ رسم کنیم، $d_۲ \parallel d$ می‌شود (دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند).



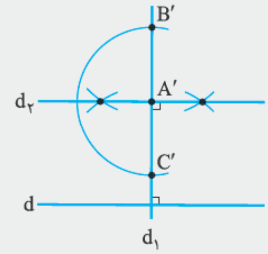


پس طبق شکل (۳) ابتدا نقطه‌ی دلخواه A را روی d در نظر گرفته و با رسم کمانی به مرکز A و شعاع دلخواه، پاره‌خط BC را روی d ظاهر می‌کنیم. عمودمنصف BC همان d_1 است. مطابق شکل (۴) روی d_1 نقطه‌ی دلخواه A' که روی d نیست، در نظر گرفته شده و کمانی به مرکز A' و شعاع دلخواه رسم گردیده است. سپس در مرحله‌ی بعدی عمودمنصف پاره‌خط $B'C'$ رسم شده است.

(۳)



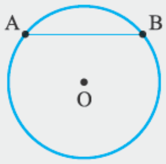
(۴)



$$\left.\begin{matrix} d \perp d_1 \\ d_2 \perp d_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \parallel d_2$$

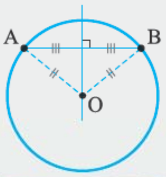
مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید عمودمنصف یک وتر مثل AB، که در دایره‌ی مفروضی رسم شده است، از مرکز دایره می‌گذرد.**



پاسخ

فرض	وتر AB درون دایره‌ی $C(O,R)$ رسم‌شده
حکم	عمودمنصف AB از O می‌گذرد



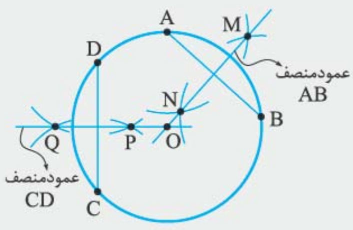
می‌دانیم اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط واقع است. مرکز دایره را به دو سر پاره‌خط AB وصل می‌کنیم، کاملاً روشن است که $OA = OB = R$؛ پس قطعاً O روی عمودمنصف AB واقع است.

مثال و پاسخ

مثال **دایره‌ی (C) را در نظر بگیرید. به کمک خط‌کش و پرگار، مرکز این دایره را بیابید.**

پاسخ می‌دانیم عمودمنصف هر وتر درون یک دایره، از مرکز دایره می‌گذرد. پس مطابق شکل روبه‌رو، دو وتر دلخواه AB و CD را درون دایره رسم می‌کنیم (بهتر است این دو وتر، نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند، البته برای رسم جذاب‌تر)، سپس عمودمنصف وترهای ذکرشده را رسم می‌نماییم تا یکدیگر را در O قطع کنند؛ این نقطه مرکز دایره است.

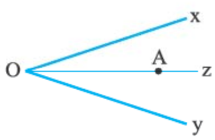
(روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، باید کاملاً در ذهن شما نهادینه شود.)



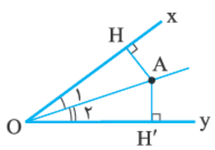
(C)

خاصیت مهم نیمساز یک زاویه

مطابق شکل زاویه‌ی xOy و نیمساز آن یعنی Oz رسم شده است. نقطه‌ی دلخواه A را روی نیمساز زاویه‌ی xOy در نظر می‌گیریم. **می‌خواهیم ثابت کنیم فاصله‌ی این نقطه تا دو ضلع زاویه یکسان است.**



اثبات



فرض	$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $AH \perp Ox$, $AH' \perp Oy$
حکم	$AH = AH'$

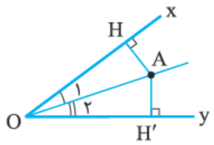
از نقطه‌ی A بر اضلاع زاویه‌ی xOy عمود می‌کنیم. طبق شکل رسم‌شده، در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH و OAH' داریم:

$$\left.\begin{matrix} OA = OA \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه‌ی حاده}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{A}H' \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} AH = AH'$$

حال در حالت برعکس، مطابق شکل نقطه‌ی A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یعنی Ox و Oy یکسان باشد. **می‌خواهیم ثابت کنیم نقطه‌ی A روی نیمساز $x\hat{O}y$ قرار دارد.**

اثبات

مطابق شکل داریم:



فرض	$AH \perp Ox\ ,\ AH' \perp Oy\ ,\ AH = AH'$
حکم	$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

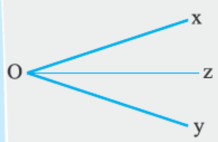
$$O\overset{\Delta}{A}H\ ,\ O\overset{\Delta}{A}H' : \begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ OA = OA \\ AH = AH' \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{A}H' \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

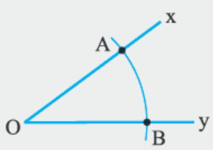
یعنی OA همان نیمساز $\hat{O}$ است؛ پس A روی نیمساز زاویه‌ی xOy (یا همان $\hat{O}$) قرار دارد.

نتیجه‌ی مهم هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه فاصله‌ی یکسانی دارد و برعکس اگر فاصله‌ی یک نقطه از دو ضلع زاویه یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه واقع است.

مثال و پاسخ

مثال **زاویه‌ی دلخواه xOy داده شده است. مراحل رسم نیمساز آن را توضیح دهید.**

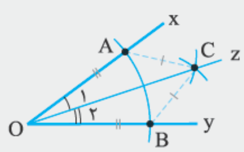




(۱)

پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و نیم‌خط Oz نیمساز آن باشد. برای این‌که نیم‌خط Oz را رسم کنیم، باید نقطه‌ای غیر از O (رأس زاویه) روی نیمساز داشته باشیم که فاصله‌اش از اضلاع زاویه (Oy,Ox) یکسان باشد. پس مطابق شکل (۱) ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه، کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. چون نقاط روی محیط یک دایره از مرکز به یک فاصله‌اند پس OA = OB.

حال به مراکز A و B و به شعاع **یکسان و بزرگ‌تر از $\frac{AB}{2}$** کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی C قطع کنند؛ پس فاصله‌ی نقطه‌ی C از A و B یکسان است. در این صورت داریم:

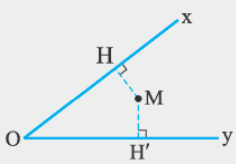


$$O\overset{\Delta}{A}C\ ,\ O\overset{\Delta}{B}C : \begin{cases} OA = OB \\ OC = OC \\ AC = BC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} O\overset{\Delta}{A}C \cong O\overset{\Delta}{B}C$$

بنابراین از همنهشتی فوق نتیجه می‌شود $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، پس OC یا همان Oz نیمساز $x\hat{O}y$ است.

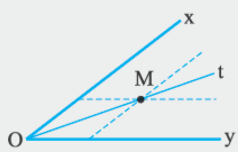
مثال و پاسخ

مثال **دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید و نقطه‌ای را بیابید که فاصله‌اش از هر دو ضلع این زاویه، یک واحد باشد. به کمک نقطه‌ای که یافته‌اید، نیمساز این زاویه را رسم نمایید.**



(۱)

پاسخ مطابق شکل(۱) زاویه‌ی xOy را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم فاصله‌ی نقطه‌ی M از هر دو ضلع زاویه، برابر یک باشد. در این‌صورت طول عمود اخراج‌شده از M بر هر کدام از اضلاع زاویه‌ی xOy برابر یک است. می‌دانیم مجموعه‌ی نقاطی از صفحه، که از خط d به فاصله‌ی معلوم ℓ قرار دارند، دو خط به موازات d است که از این خط، فاصله‌ی ℓ دارند.



(۲)

پس مطابق شکل(۲)، خطی به موازات ضلع Ox و فاصله‌ی یک از آن، درون زاویه‌ی xOy و هم‌چنین خطی به موازات Oy و همین فاصله از آن، باز هم درون زاویه‌ی xOy رسم می‌کنیم. محل برخورد دو خط جدید، نقطه‌ی M خواهد بود. چون فاصله‌ی این نقطه از دو ضلع مساوی است، پس $\hat{M}$ روی نیمساز زاویه‌ی $x\hat{O}y$ واقع است. با اتصال نقطه‌ی M به رأس O، نیمساز $x\hat{O}y$ رسم می‌شود.

مثال و پاسخ

مثال دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

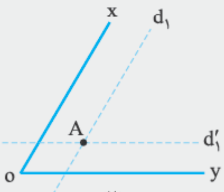
الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی موردنظر ۱ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی موردنظر ۲ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب)، نیمساز زاویه‌ی مذکور را رسم کنید.

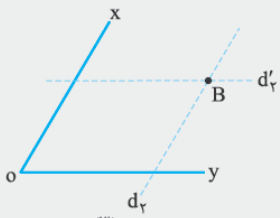
(۱)

پاسخ **الف** مطابق شکل (۱)، زاویه‌ی دلخواه xoy رسم شده است.



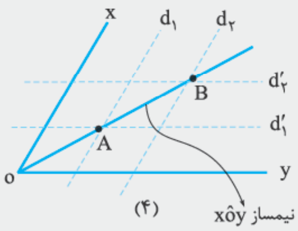
(۲)

می‌دانیم مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که از یک خط به فاصله‌ی معلوم (مثلاً یک واحد) قرار می‌گیرند، دو خط به موازات خط مفروض و به فاصله‌ی معلوم (مثلاً یک) و در طرفین آن خط است؛ پس به موازات اضلاع ox و oy و به فاصله‌ی ۱ از هر کدام خطی می‌کشیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کنند (خطوط d_1 و d'_1). این نقطه از دو ضلع زاویه، یعنی ox و oy به همان فاصله‌ی ۱ است (شکل (۲)).



(۳)

ب به دلیل گفته‌شده در (الف)، به موازات دو ضلع ox و oy و فاصله‌ی ۲ واحد از هر کدام، خطی به موازات هر یک می‌کشیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی B قطع کنند (خطوط d_2 و d'_2). نقطه‌ی B نقطه‌ای است که از هر دو ضلع زاویه، فاصله‌ی ۲ دارد (شکل (۳)).



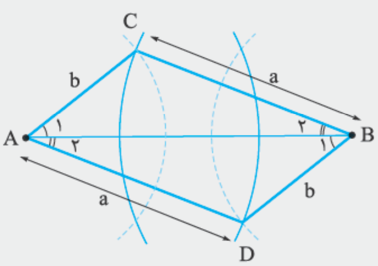
پ چون نقاط A و B هر کدام از دو ضلع زاویه‌ی xoy فاصله‌ی ثابتی دارند، پس هر دو روی نیمساز این زاویه قرار می‌گیرند؛ بنابراین با مشخص‌شدن دو نقطه‌ی متمایز از نیمساز $x\hat{o}y$ و اتصال آن‌ها به هم، نیمساز $x\hat{o}y$ رسم خواهد شد (شکل (۴)).

یادآوری متوازی‌الاضلاع یک نوع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌روی آن با هم موازی‌اند.

حال با دانستن این موضوع به مثال زیر توجه کنید:

مثال و پاسخ

مثال پاره‌خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی a و بار دیگر به اندازه‌ی b باز کرده و از نقطه‌ی A دو کمان می‌زنیم. سپس کمان‌هایی با همان شعاع‌ها، این بار از نقطه‌ی B می‌زنیم و مانند شکل زیر دوتا از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی حاصل ACBD متوازی‌الاضلاع است.



پاسخ مطابق شکل به مرکز رأس‌های A و B، کمان‌هایی به شعاع a و b (با فرض $a > b$) رسم شده (کمان‌های با شعاع b خطچین هستند) که کمان به مرکز A و شعاع a و کمان به مرکز B و شعاع b یکدیگر را در D قطع کرده‌اند. همچنین کمان به مرکز A و شعاع b و کمان به مرکز B و شعاع a یکدیگر را در C قطع نموده‌اند. پس می‌توان نوشت:

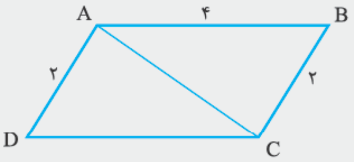
$$\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{ABC}: \left\{\begin{array}{l} AD = BC = a \\ AC = BD = b \\ AB = AB \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ABD} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 , \hat{A}_2 = \hat{B}_2$$

و در نهایت طبق عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب از تساوی $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ و مورب‌بودن AB نتیجه می‌شود $AC \parallel DB$ و همچنین از تساوی $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ و باز هم مورب‌بودن AB داریم $AD \parallel BC$. پس چهارضلعی ACBD که در آن اضلاع روبه‌رویش موازی یکدیگرند، متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

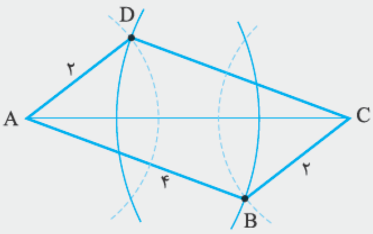
تذکر **مثال مطرح‌شده، روش رسم متوازی‌الاضلاعی را نشان می‌دهد که دو ضلع آن مشخص باشند. طبق این مثال باید از دو سر قطر یک متوازی‌الاضلاع، دو کمان به شعاع‌هایی مساوی طول دو ضلع، زده شود.**

مثال و پاسخ

مثال **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۲ و ۴ باشد.**



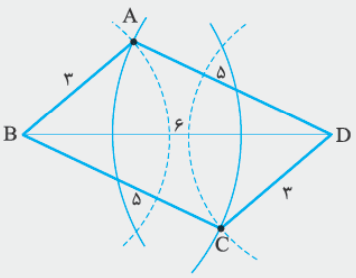
پاسخ مطابق شکل متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با اضلاع $AB=۴$ و $AD=۲$ رسم شده است.



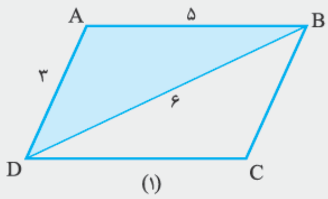
بنابراین برای رسم متوازی‌الاضلاع موردنظر، ابتدا پاره‌خط AC (به طول کم‌تر از ۶) را به عنوان قطر این متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. (دقت کنید در مثلث ABC طبق قضیه‌ی نامساوی مثلثی $AC < AB+BC$ است؛ یعنی $AC < ۴+۲$ یا $AC < ۶$.) از نقطه‌ی A (به مرکز A) دو کمان به شعاع‌های ۲ و ۴ و از نقطه‌ی C نیز دو کمان به شعاع‌های ۲ و ۴ رسم می‌کنیم و مانند شکل نقطه‌ی برخورد کمان‌ها را B و D می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع موردنظر است.

مثال و پاسخ

مثال **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول اضلاعش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.**

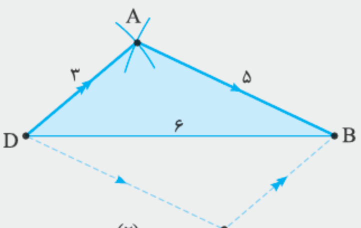


پاسخ **روش اول** ابتدا قطر $BD=۶$ را رسم می‌کنیم؛ سپس به مرکز B دو کمان به شعاع‌های ۳ و ۵ (مساوی طول اضلاع متوازی‌الاضلاع) می‌زنیم و همچنین به مرکز D و همین شعاع‌ها، دو کمان دیگر رسم می‌کنیم. محل برخورد یک کمان با شعاع کوچک و یک کمان با شعاع بزرگ، یکی از B و دیگری از D را نقاط A و C می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.



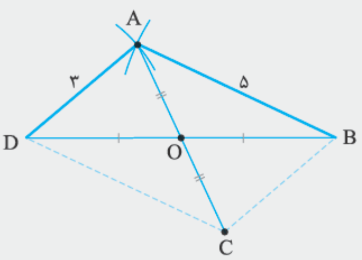
(۱)

روش دوم مطابق شکل (۱) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به اضلاع ۳ و ۵ و قطر $BD=۶$ رسم شده است. در این صورت اضلاع مثلث ABD مشخص بوده و در نتیجه این مثلث قابل رسم است.



(۲)

حال مطابق شکل (۲)، ابتدا قطر $DB=۶$ را رسم کرده و سپس به مرکز D و شعاع ۳ و همچنین به مرکز B و شعاع ۵ دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. در این صورت مثلث ADB (نیمی از متوازی‌الاضلاع) رسم می‌شود. برای یافتن رأس چهارم متوازی‌الاضلاع، از دو سر قطر BD یعنی از B و D، به موازات ضلع روبه‌رویشان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مذکور است.



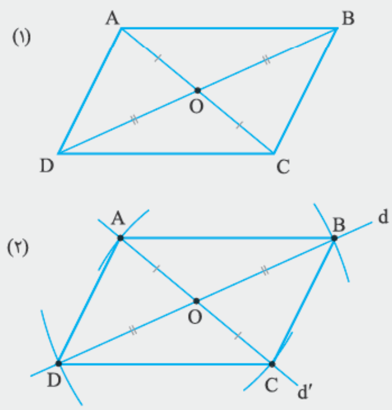
روش سوم ابتدا به روش قبل مثلث ABD را رسم می‌کنیم.
با توجه به این‌که قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس از رأس A به نقطه‌ی O وسط قطر BD وصل کرده و به اندازه‌ی AO (از طرف O) امتداد می‌دهیم تا به رأس چهارم متوازی‌الاضلاع (نقطه‌ی C) برسیم.

یادآوری **در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.**

دقت کنید برای رسم متوازی‌الاضلاعی که دو قطر آن داده شده، باید به مرکز محل برخورد قطرها و شعاعی معادل **نصف قطرها** کمان بزنیم. به مثال‌های بعدی توجه کنید.

مثال و پاسخ

مثال **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۶ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟**



پاسخ مطابق شکل (۱) متوازی‌الاضلاع ABCD با قطرهای $AC=۴$ و $DB=۶$ رسم شده است. چون قطرها منصف یکدیگرند، $OA=OC=۲$ و $OB=OD=۳$؛ پس برای رسم این متوازی‌الاضلاع، ابتدا دو خط d و d′ را که در نقطه‌ی O متقاطع هستند، می‌کشیم. به مرکز O و شعاع ۲، دو کمان می‌زنیم تا خط d′ را در نقاط A و C قطع کنند.

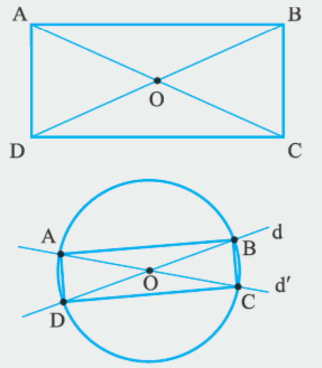
هم‌چنین به مرکز O و شعاع ۳، دو کمان دیگر می‌زنیم تا خط d را در B و D قطع کنند. نقاط A، B، C و D رئوس متوازی‌الاضلاع موردنظر است (شکل (۲)).

چون زاویه‌ی بین قطرها داده نشده است، پس بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این شرایط رسم می‌گردد.

یادآوری **در مستطیل قطرها مساوی و منصف یکدیگرند.**

مثال و پاسخ

مثال **مستطیلی رسم کنید که طول هر قطر آن ۶ cm باشد.**

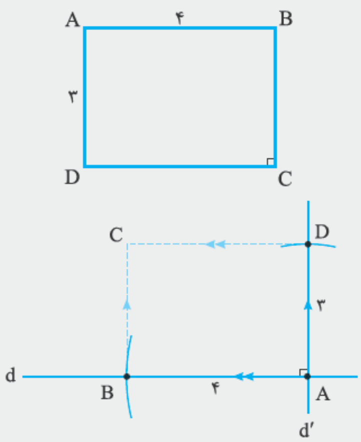


پاسخ مطابق شکل مستطیل ABCD با قطرهای $AC=BD=۶\,cm$ رسم شده است. چون قطرها مساوی و منصف یکدیگرند، پس $OA=OB=OC=OD=۳\,cm$ خواهد بود.

بنابراین برای رسم این مستطیل، دو خط متقاطع d و d′ را در نقطه‌ی O رسم کرده و به مرکز O و شعاع ۳ cm دایره‌ای می‌زنیم تا این دو خط را در نقاط A، B، C و D قطع کند. با اتصال این چهار نقطه به هم، مستطیل رسم می‌شود. با این شرایط هم بی‌شمار مستطیل قابل رسم است.

مثال و پاسخ

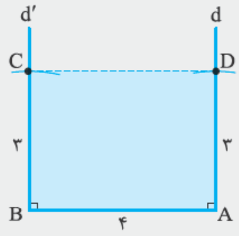
مثال **مستطیلی رسم کنید که طول اضلاع آن ۳ و ۴ باشد.**



پاسخ مطابق شکل مستطیلی با اضلاع ۳ و ۴ رسم شده است. می‌دانیم اضلاع مستطیل بر هم عمودند.

روش اول ابتدا دو خط عمود بر هم d و d′ را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۳ کمانی می‌زنیم تا خط d′ را در D قطع کند. هم‌چنین به مرکز A و شعاع ۴ کمان دیگری می‌زنیم تا خط d را در B قطع کند. از B خطی عمود بر d (موازی d′) و از D خطی عمود بر d′ (موازی d) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. چهارضلعی ABCD مستطیل است. (دقت کنید روش رسم خط عمود بر یک خط را قبلاً گفته‌ایم.)

روش دوم مطابق شکل پاره‌خط $AB = ۴$ را به عنوان طول مستطیل رسم کرده و از A و B دو خط بر AB عمود می‌کنیم (در یک طرف AB). سپس به مراکز A و B و شعاع‌های یکسانِ ۳، کمان‌هایی می‌زنیم تا d و d' را به ترتیب در نقاط D و C قطع کنند. چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است؛ زیرا به دلیل عمودبودن AD و BC بر AB، می‌توان گفت $AD \parallel BC$ و چون AD و BC (دو ضلع مقابل چهارضلعی $ABCD$) دارای طول‌های یکسان‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاعی با حداقل یک زاویه‌ی قائمه است؛ پس در حقیقت مستطیل خواهد بود.

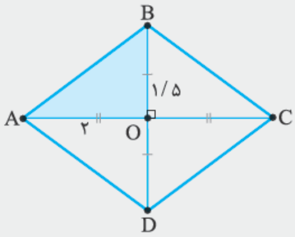


یادآوری لوزی چهارضلعی است که اضلاعش همه مساوی‌اند یا قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

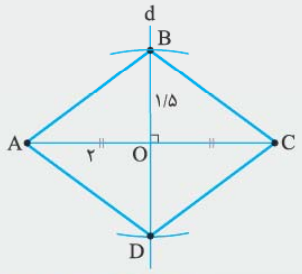
مثال و پاسخ

مثال یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ باشد.

پاسخ مطابق شکل لوزی $ABCD$ با قطرهای ۳ و ۴ رسم شده است.



می‌دانیم در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند؛ یعنی هم $AC \perp BD$ و هم نقطه‌ی برخورد دو قطر (O) وسط دو قطر است. بنابراین ابتدا یکی از قطرها (مثل $AC = ۴$) را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف این قطر را می‌کشیم (خط d) و به مرکز O وسط قطر AC و به شعاع نصف قطر دیگر یعنی $\frac{BD}{۲} = \frac{۳}{۲}$، دو کمان (یا یک دایره) می‌زنیم تا این عمودمنصف را در B و D قطع کنند.

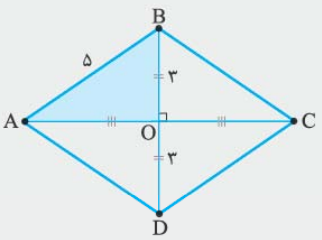


ممکن است برای رسم لوزی، یک قطر و یک ضلع داده شده باشد. در این صورت ابتدا طبق قضیه‌ی فیثاغورس، نصف طول قطر دیگر لوزی را می‌یابیم. به مثال بعدی توجه کنید:

مثال و پاسخ

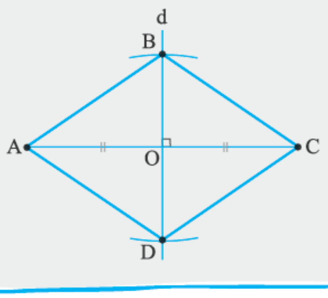
مثال یک لوزی به ضلع ۵ و قطر ۶ رسم کنید.

پاسخ مطابق شکل لوزی $ABCD$ با قطر $DB = ۶$ و ضلع $AB = ۵$ رسم شده است. چون در لوزی قطرها منصف یکدیگرند، پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOB، طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:



$$AO = \sqrt{AB^{۲} - BO^{۲}} = \sqrt{۵^{۲} - ۳^{۲}} = ۴$$

بنابراین ابتدا قطر AC به طول $۲AO = ۸$ را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف این قطر را می‌کشیم و به مرکز O وسط قطر AC و شعاع ۳ کمانی می‌زنیم تا این عمودمنصف را در B و D قطع کند. چهارضلعی $ABCD$ لوزی موردنظر است.

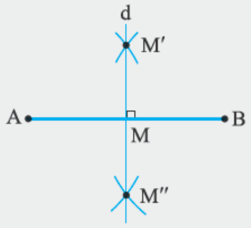


یادآوری **در مربع قطرها مساوی و عمودمنصف یکدیگرند.**

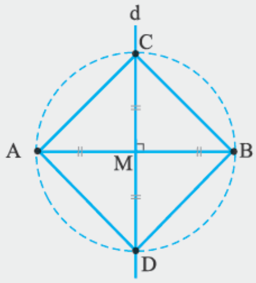
بنابراین اگر طول قطر مربعی برای ما مشخص باشد، می‌توانیم آن مربع را رسم کنیم. به مثال‌های بعدی توجه کنید.

مثال و پاسخ

مثال **طریقه‌ی رسم مربعی را که اندازه‌ی قطر آن مقدار مشخص a باشد، توضیح دهید.**



پاسخ مطابق شکل ابتدا پاره‌خط AB را که اندازه‌اش برابر طول قطر مربع است رسم می‌کنیم. $(AB=a)$ سپس به مراکز A و B و شعاع‌های یکسان و هر کدام بیش از $\frac{AB}{۲}=\frac{a}{۲}$، دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در M' و M'' قطع کنند. با اتصال M' و M'' به هم، عمودمنصف AB رسم می‌شود. محل برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB را نقطه‌ی M می‌گیریم.



به مرکز M و شعاع AM دایره‌ای رسم می‌کنیم و خط d یعنی عمودمنصف AB در C و D قطع می‌شود؛ پس $MA=MB=MC=MD$ زیرا فاصله‌ی مرکز تا نقاط روی دایره ثابت است. پس قطرها منصف هم بوده و اندازه‌ی آن‌ها با هم مساوی است، بنابراین چهارضلعی ACBD یک مربع خواهد بود.

سؤال‌های امتحانی

۱- **مثلث ABC را با فرض $AB=۳$ و $AC=۵$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ رسم کنید.**

۲- **مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ سانتی‌متر رسم کنید.**

۳- **آیا مثلثی به اضلاع ۴، ۸ و ۲۰ قابل رسم است؟ چرا؟**

۴- **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول اضلاعش ۴ و ۶ و طول یک قطر آن ۸ باشد.**

۵- **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟**

۶- **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول دو قطر آن ۶ و ۴ و زاویه‌ی بین دو قطر ۶۰° باشد.**

۷- **مستطیلی رسم کنید که طول اضلاع آن ۶ و ۸ باشد.**

۸- **یک لوزی به محیط ۴۰ و قطر ۱۲ رسم کنید.**

۹- **مربعی به قطر ۸ رسم کنید.**

۱۰- **مربعی به ضلع $۶\sqrt{۲}$ رسم کنید.**

۲ استدلال

به طور کلی روش نتیجه‌گیری را استدلال می‌گوییم.

در این قسمت از درس با چند مدل از استدلال آشنا می‌شویم.

استدلال استقرایی

در این نوع از استدلال، از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در مورد آن موضوع گرفته می‌شود. به عبارت دیگر در این استدلال از جزء به کل می‌رسیم. البته با چنین استدلالی نمی‌توانیم همواره به درستی نتیجه‌ی گرفته‌شده مطمئن باشیم. مثلاً اگر فردی با بررسی و مشاهده‌ی این‌که در مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع جمع زاویه‌های داخلی برابر ۳۶۰° است، به این نتیجه‌ی کلی برسد که در هر چهارضلعی محدب جمع زاویه‌های داخلی ۳۶۰° است، از استدلال استقرایی استفاده کرده است. از این نوع استدلال فقط می‌توان به عنوان یک کمک خوب در حل مسئله کمک گرفت.

استدلال استنتاجی

این نوع از استدلال، براساس نتیجه‌گیری منطقی از حقایقی که قبلاً درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به دست می‌آید. مثلاً با توجه به این‌که جمع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است، با رسم یکی از قطرهای یک چهارضلعی و تبدیل آن به دو مثلث می‌توانیم ثابت کنیم جمع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی محدب 360° است.

تذکر در بسیاری از مسائل به کمک استدلال استقرایی حدس‌های کلی می‌زنیم؛ سپس حدس‌های خود را دقیق و دقیق‌تر می‌کنیم و در نهایت به کمک استدلال استنتاجی درباره‌ی درستی آن مسئله به طور قطع و یقین حکم می‌کنیم.

استدلال تمثیلی

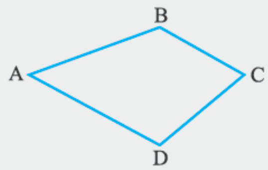
در این نوع از استدلال، در مورد دو چیز شبیه هم، حکم مشابه می‌دهیم. مثلاً یک لیوان آب را در نظر بگیرید. اگر این مقدار آب در ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد بجوشد، با استدلال تمثیلی می‌گوییم یک لیوان از یک مایع بی‌رنگ مثل آب هم در همان دمای ۱۰۰ درجه می‌جوشد. دقت کنید استدلال تمثیلی هم نمی‌تواند یک حکم را برای ما ثابت کند.

حال به حل چند مثال اثباتی با استفاده از استدلال استنتاجی توجه کنید:

مثال و پاسخ

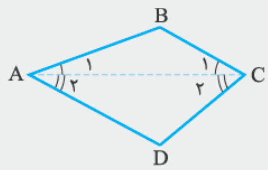
مثال **ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی محدب 360° است.**

پاسخ مطابق شکل روبه‌رو چهارضلعی ABCD را در نظر گرفته و جدول فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض	چهارضلعی : ABCD
حکم	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$

حال در این چهارضلعی قطر AC را رسم می‌کنیم تا به دو مثلث تبدیل شود. در این صورت جمع زاویه‌های داخلی چهارضلعی، برابر است با جمع زاویه‌های داخلی دو مثلث ایجادشده:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}_1=180^\circ & (1) \\ \overset{\Delta}{ADC}: \hat{A}_2+\hat{D}+\hat{C}_2=180^\circ & (2) \end{cases}$$

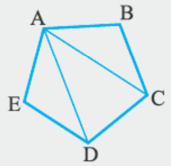
حال طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را جمع می‌بندیم (نظیربه‌نظیر):

$$(\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}_1)+(\hat{A}_2+\hat{D}+\hat{C}_2)=360^\circ \Rightarrow \underbrace{(\hat{A}_1+\hat{A}_2)}_{\text{کل } \hat{A}}+(\hat{B}+\hat{D})+\underbrace{(\hat{C}_1+\hat{C}_2)}_{\text{کل } \hat{C}}=360^\circ$$

و در نهایت حکم مسئله ثابت می‌شود.

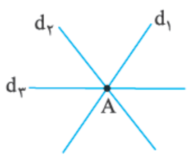
مثال و پاسخ

مثال **به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر است با $(n-2)\times 180^\circ$.**

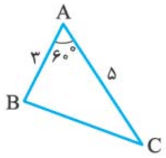


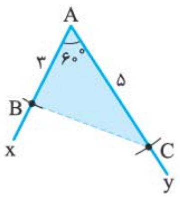
پاسخ مطابق شکل یک پنج‌ضلعی محدب در نظر گرفته شده و تمام قطرهای گذرنده از یک رأس آن (مثل A) رسم گردیده است. در این صورت سه مثلث پدید می‌آید. بنابراین با استدلال استقرایی می‌توان نتیجه گرفت که در صورت ترسیم تمام قطرهای گذرنده از یک رأس در n ضلعی محدب، $(n-2)$ مثلث پدید می‌آید و چون در هر مثلث جمع زاویه‌های داخلی 180° است، بنابراین در n ضلعی محدب جمع تمام زاویه‌های داخلی برابر است با $(n-2)\times 180^\circ$.

خطوط همرس، خطوطی هستند که همگی از یک نقطه می‌گذرند. در شکل روبه‌رو خطوط d_1 و d_2 و d_3 در نقطه‌ی A همرس هستند.

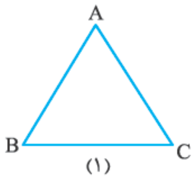


پاسخ سؤال‌های امتحانی

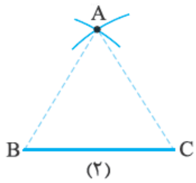




۱- فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن باشد. بنابراین مطابق شکل، زاویه‌ی $x\hat{A}y = ۶۰°$ را رسم می‌کنیم و برای مشخص‌شدن دو رأس B و C، به مرکز A و شعاع‌های ۳ و ۵ دو کمان می‌زنیم تا اضلاع Ax و Ay را به ترتیب در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسئله است.



(۱)



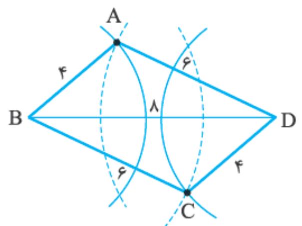
(۲)

۲- فرض می‌کنیم مسئله حل شده و جواب آن مثلث ABC (شکل (۱)) باشد. در این صورت ابتدا پاره‌خط $BC = ۴\,cm$ را رسم می‌کنیم.

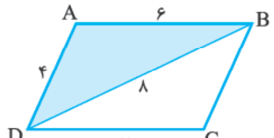
حالا به مراکز B و C و شعاع‌های ۴ cm، دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کنند.

مثلث ABC جواب مسئله است (شکل (۲)).

۳- خیر. زیرا جمع دو ضلع کوچک آن، بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ضلع مثلث نیست (حتی اگر مساوی هم باشند، مثلثی رسم نخواهد شد). دقت کنید در این مسئله، حتی برقراری شرط‌های $۴ < ۸ + ۲۰$ و $۸ < ۴ + ۲۰$ کمکی به رسم مثلث نمی‌کند.

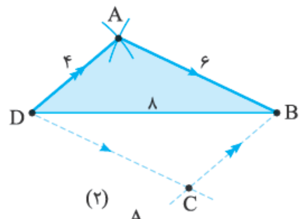


۴- **روش اول** ابتدا قطر $BD = ۸$ را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B، دو کمان به شعاع‌های ۴ و ۶ (اضلاع متوازی‌الاضلاع) و همچنین به مرکز D و همین شعاع‌ها نیز دو کمان دیگر می‌زنیم. محل برخورد یک کمان با شعاع کوچک و یک کمان با شعاع بزرگ، یکی از B و دیگری از D را نقاط A و C می‌نامیم. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.



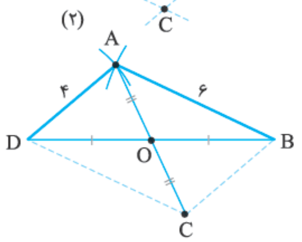
(۱)

روش دوم مطابق شکل (۱) متوازی‌الاضلاع ABCD به اضلاع ۴ و ۶ و قطر $BD = ۸$ رسم شده است. در این صورت اضلاع مثلث ABD مشخص بوده و در نتیجه این مثلث قابل رسم است.



(۲)

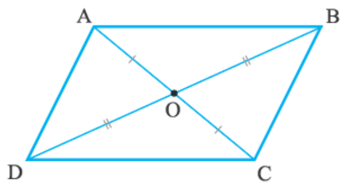
حال مطابق شکل (۲)، ابتدا قطر $DB = ۸$ را رسم کرده و سپس به مرکز D و شعاع ۴ و همچنین به مرکز B و شعاع ۶ دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. در این صورت مثلث ADB (نیمی از متوازی‌الاضلاع) رسم می‌شود. برای یافتن رأس چهارم متوازی‌الاضلاع، از دو سر قطر BD یعنی از B و D، به موازات ضلع روبه‌رویشان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع مذکور است.



روش سوم ابتدا به روش قبل مثلث ABD را رسم می‌کنیم.

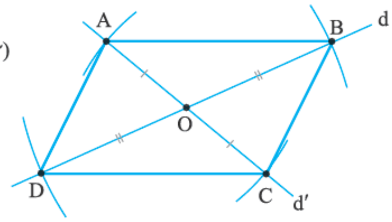
با توجه به این‌که قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس از رأس A به نقطه‌ی O وسط قطر BD وصل کرده و به اندازه‌ی AO (از طرف O) امتداد می‌دهیم تا به رأس چهارم متوازی‌الاضلاع (نقطه‌ی C) برسیم.

(۱)



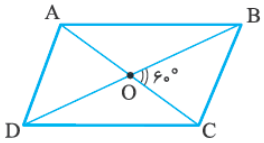
۵- مطابق شکل (۱) متوازی‌الاضلاع ABCD با قطرهای $AC = ۳$ و $DB = ۴$ رسم شده است. چون قطرها منصف یکدیگرند، $OA = OC = ۱/۵$ و $OB = OD = ۲$؛ پس برای رسم این متوازی‌الاضلاع، ابتدا دو خط d و d′ را که در نقطه‌ی O متقاطع هستند، می‌کشیم. به مرکز O و شعاع ۱/۵، دو کمان می‌زنیم تا خط d′ را در نقاط A و C قطع کنند.

(۲)

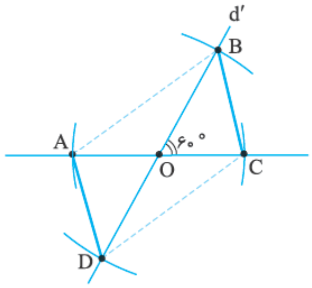


همچنین به مرکز O و شعاع ۲، دو کمان دیگر می‌زنیم تا خط d را در B و D قطع کنند. نقاط A، B، C و D رئوس متوازی‌الاضلاع موردنظر است (شکل (۲)).

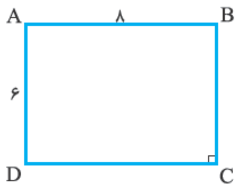
بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد.



۶- فرض می‌کنیم مسئله حل شده و شکل روبه‌رو جواب آن باشد. در این صورت با فرض این‌که طول دو قطر $DB = ۶$ و $AC = ۴$ است و قطرها منصف یکدیگرند، نتیجه می‌گیریم $AO = OC = ۲$ و $OB = OD = ۳$.

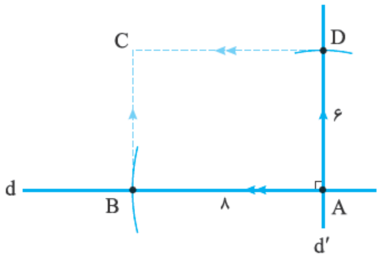


از طرفی زاویه‌ی حاده‌ی بین دو قطر ۶۰° است. پس برای رسم این متوازی‌الاضلاع ابتدا دو خط متقاطع d و d' را با زاویه‌ی ۶۰° نسبت به هم رسم می‌کنیم، سپس از نقطه‌ی O محل تقاطع این دو قطر، یک بار به شعاع ۲ و بار دیگر به شعاع ۳، کمان‌هایی می‌زنیم تا چهار رأس متوازی‌الاضلاع موردنظر مشخص شوند.

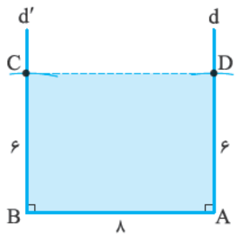


۷- مطابق شکل مستطیلی با اضلاع ۶ و ۸ رسم شده است. می‌دانیم اضلاع مستطیل بر هم عمودند.

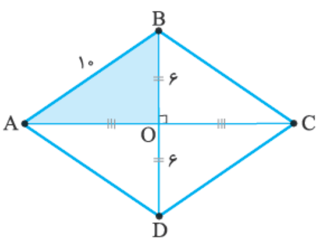
روش اول ابتدا دو خط عمود بر هم d و d' را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۶ کمانی می‌زنیم تا خط d' را در D قطع کند. هم‌چنین به مرکز A و شعاع ۸ کمان دیگری می‌زنیم تا خط d را در B قطع کند. از B خطی عمود بر d (موازی d') و از D خطی عمود بر d' (موازی d) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است.



روش دوم مطابق شکل پاره‌خط $AB = ۸$ را به عنوان طول مستطیل رسم کرده و از A و B دو خط بر AB عمود می‌کنیم (در یک طرف AB). سپس به مراکز A و B و شعاع‌های یکسانِ ۶، کمان‌هایی می‌زنیم تا d و d' را به ترتیب در نقاط D و C قطع کنند. چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است؛ زیرا به دلیل عمودبودن AD و BC بر AB، می‌توان گفت $AD \parallel BC$ و چون AD و BC (دو ضلع مقابل چهارضلعی $ABCD$) دارای طول‌های یکسان‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاعی با حداقل یک زاویه‌ی قائمه است؛ پس در حقیقت مستطیل خواهد بود.

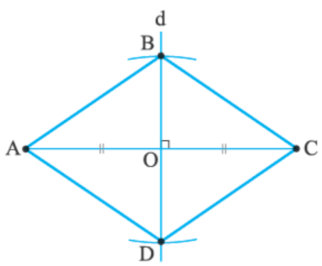


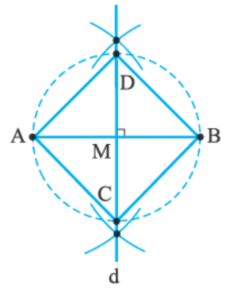
۸- مطابق شکل لوزی $ABCD$ با قطر $DB = ۱۲$ و ضلع $AB = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰$ رسم شده است (یک ضلع لوزی برابر است با $\frac{\text{محیط}}{۴}$).چون در لوزی قطرها منصف یکدیگرند، پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOB، طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:



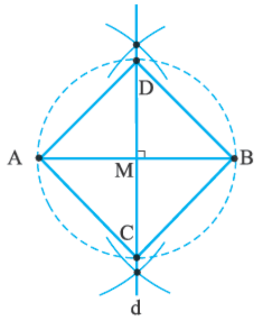
$$AO = \sqrt{AB^۲ - BO^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = ۸$$

بنابراین ابتدا قطر AC به طول $۲AO = ۱۶$ را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف این قطر را می‌کشیم و به مرکز O وسط قطر AC و شعاع ۶، کمانی می‌زنیم تا این عمودمنصف را در B و D قطع کند. چهارضلعی $ABCD$ لوزی موردنظر است.



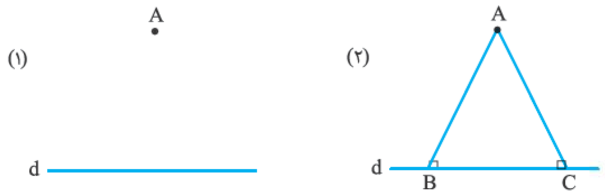


۹- می‌دانیم قطرهای مربع، عمودمنصف یکدیگرند.
ابتدا پاره‌خط AB به طول ۸ (قطر مربع) را رسم کرده و عمودمنصف آن را رسم می‌نماییم (خط d).
سپس به مرکز نقطه‌ی M (محل برخورد d و AB) و شعاع نصف قطر مربع ($\frac{۸}{۲}=۴$) دایره‌ای می‌زنیم تا عمودمنصف AB یعنی d را در D و C قطع کند. این دایره از A و B هم می‌گذرد.
چهارضلعی ABCD یک مربع است.



۱۰- **نکته:** طول قطر مربع، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن است.
برای رسم مربع، باید قطر آن را داشته باشیم. چون ضلع مربع $۶\sqrt{۲}$ است، پس قطر مربع $۶\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۱۲$ است.
حال ابتدا قطر $AB=۱۲$ را رسم می‌کنیم، سپس عمودمنصف این قطر را می‌کشیم (خط d)؛ سپس به مرکز نقطه‌ی M (محل برخورد d و AB) و به شعاع نصف قطر ($\frac{۱۲}{۲}=۶$) دایره‌ای می‌زنیم تا d را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی ABCD مربع است.

۱۱-



فرض	نقطه‌ی A خارج d قرار دارد
حکم	از A بیش از یک عمود بر d رسم نمی‌شود

مطابق شکل (۱) نقطه‌ی A خارج خط d واقع شده است. می‌خواهیم ثابت کنیم که از نقطه‌ی A نمی‌توانیم بیشتر از یک خط عمود بر خط d رسم کنیم. طبق **برهان خلف**، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (فرض خلف)؛ یعنی مطابق شکل (۲) از A دو عمود بر خط d خارج شده و این خط را در B و C قطع نموده است. در این صورت $\hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ$؛ یعنی مثلثی رسم کرده‌ایم که مجموع دو زاویه از سه زاویه‌اش ۱۸۰° شده است که این غیرممکن است (مخالف با این مورد است که جمع سه زاویه‌ی داخلی مثلث ۱۸۰° می‌شود). پس به تناقض رسیده‌ایم؛ یعنی حکم اصلی درست است و از A یک و تنها یک عمود بر d خارج می‌شود.

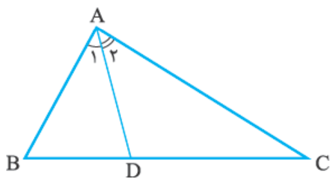
۱۲- طبق برهان خلف فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یعنی $BC=B'C'$؛ پس در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}AB=A'B'\\AC=A'C'\\BC=B'C'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

و طبق تساوی اجزای نظیر نتیجه می‌شود $\hat{A}=\hat{A}'$ و این خلاف فرض است. پس فرضِ خلفِ $BC=B'C'$ غلط بوده و در نتیجه $BC\neq B'C'$ درست است.

۱۳- طبق برهان خلف فرض می‌کنیم حکم درست نیست (فرض خلف) که در این صورت $AB=AC$ است.
بنابراین می‌توان نوشت:

فرض	$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$, $BD\neq DC$
حکم	$AB\neq AC$



$$\overset{\Delta}{ADB},\overset{\Delta}{ADC}:\left\{\begin{array}{l}AB=AC\\\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\AD=AD\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض‌ز‌ض)}}\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ADC}$$

و طبق تساوی اجزای نظیر نتیجه می‌گیریم $BD=DC$ که این خلاف فرض بوده و به تناقض می‌رسیم؛ پس $AB\neq AC$.

۱۴- می‌دانیم طول هر ضلع مثلث، بین جمع و تفریق دو ضلع دیگر قرار دارد. اگر طول **بزرگ‌ترین** ضلع مثلث را x در نظر بگیریم، داریم:

$|۸-۳|<x<۸+۳\Rightarrow ۵<x<۱۱\xrightarrow{x\in\mathbb{N}}x=۶,۷,۸,۹,۱۰$ ۵ مقدار وجود دارد

دقت کنید بررسی دو نامساوی دیگر مثلث لازم نیست، چون نامساوی را برای بزرگ‌ترین ضلع نوشته‌ایم.