هندسه ۱

آموزش و تست

پُر از تست‌های دوست‌داشتنی

پیشرفته

دهم

• محمود محمدی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

تقدیم به دخت پیامبر گرامی
حضرت فاطمه زهرا (س)

سخن نخست

بیا تا گل برافشانیم و می در ساغر اندازیم   فلک را سقف بشکافیم و طرحی نو دراندازیم

«حضرت حافظ»

دانش‌آموزان عزیز! فرزندان دلبندم!

انتشارات مهروماه وارد مرحلهٔ جدیدی از فعالیت‌های آموزشی خود شده است. هم‌زمان با تحول اساسی در سیستم آموزش کشور و ایجاد تغییرات بنیادین در کتاب‌های درسی، جمعی از بهترین اساتید و مؤلفین توانمند کشور در «مهروماه» گرد هم آمده‌اند تا برای شما کتاب‌هایی را به رشتهٔ تحریر درآورند که از خواندن آن‌ها لذت برده و دوستشان داشته باشید. کتاب‌هایی که در شکوفایی توانمندی‌های شما عزیزان دلبندم، جداً اثرگذار باشند.

اساتید و مؤلفانی که در کتاب‌های جدید مهروماه (دهم، یازدهم و سال آینده، دوازدهم) دست به قلم شدند، علاوه‌بر برخورداری از تمام ویژگی‌های یک مؤلف آموزشی خوب مانند سواد علمی بالا، تجربهٔ کافی در تدریس و تألیف و ...، یک ویژگی دیگر هم دارند؛ ویژگی که شاید محور زندگی اینجانب و رکن اساسی تمام فعالیت‌های آموزشی مهروماه را تشکیل می‌دهد: عشق به فرزندانمان. ما این مهر و عشق را با هیچ مبلغ و ثروتی عوض نمی‌کنیم، حتی اگر آن مبلغ در حد عدد آووگادرو باشد!

فرزندان همچون ماه من!

برای این‌که کتاب‌های مهروماه در این دورهٔ جدید، بیش‌ترین کارایی آموزشی را در جهت موفقیت شما داشته باشند، تدابیر فراوانی اندیشیدیم: شورای تألیف تشکیل دادیم، کارآمدترین مدیران آموزشی و مؤلفان برجسته را گرد هم آوردیم، کتاب‌ها براساس شیوه‌نامه‌هایی متکی بر چند دهه تجربهٔ موفق نگاشته شدند، چندین لایهٔ ویراستار (از دانشجویان فرهیخته و نابغه گرفته تا اساتید بنام کشور) به کار گرفتیم تا از غلط‌های علمی، محاسباتی، تایپی و... اثری باقی نماند.

گروه‌های تولید و هنری مهروماه نیز با هدایت مستقیم مدیر فرزانهٔ مهروماه، جناب احمد اختیاری، سنگ تمام گذاشتند تا کتاب‌هایی تولید شوند همچون ماه! کتاب‌هایی که برازندهٔ نام وزین «مهروماه»اند.

شاید مناسب باشد که تعدادی از مهم‌ترین انواع کتاب‌های کمک آموزشی مهروماه را برای شما معرفی کنم:

۱ کتاب‌های آموزش و کار: در این کتاب در مورد هر مبحثی که در مدرسه توسط دبیر محترم تدریس می‌شود یا خودتان از کتاب درسی مطالعه می‌کنید، ابتدا آموزش مختصر و مفید و البته کاملی از آن مبحث داده شده و سپس تمرین‌هایی ارائه شده که با حل آن‌ها می‌توانید تمام قسمت‌های تدریس‌شده یا مطالعه‌شده از کتاب درسی را، به خوبی فرا گرفته تا بر کتاب درسی با تمام جزئیات آن، مسلط شوید.

۲ کتاب‌های تست: در این کتاب‌ها، برای هر مبحث معین، ابتدا درس‌نامه‌ای مفید و جذاب و سپس تست‌های مربوط به آن مبحث ارائه شده است. درس‌نامه‌ها شامل مفاهیم و مطالب اصلی و بنیادی بوده و به نکات حاشیه‌ای که دور از موضوع محوری و اصلی‌اند، پرداخته نشده است. از طرفی، ضمن ارائهٔ پاسخ تشریحی تست‌ها، برخی از نکات ویژهٔ تستی در قالب «راهبردهای آموزشی» بسیار کاربردی و منحصربه‌فرد آورده شده است. همین‌طور، در برخی از کتاب‌های تست (مانند درس شیرین شیمی!) در کنار پاسخ تشریحی تعدادی از تست‌ها، ایستگاه‌های «شارژینگ» آمده است تا دانش‌آموزان در موضوعات مورد نظر، خیلی خوب شارژ شوند. با حل تست‌های این کتاب‌ها و مطالعهٔ پاسخ‌های کاملاً تشریحی آن‌ها و نیز درس‌نامه‌ها، راهبردها و شارژینگ‌ها، موفقیت در آزمون‌ها و کنکور امری طبیعی و آسان خواهد بود.

۳ کتاب‌های آموزش ۳۶۰ درجه: ویژگی اساسی این کتاب‌ها، ارائهٔ آموزش کامل درس و مفاهیم و همین‌طور، پرسش‌هایی است که دانش‌آموزان با حل آن‌ها، در امتحانات مدرسه با قطعیت به نمرهٔ ۲۰ رسیده و از طرفی، پایهٔ آموزشی لازم برای حمله به تست‌ها را پیدا خواهند کرد.
ضمناً، در این کتاب‌ها، ضمن ارائهٔ درس در هر مبحث، پرسش‌های جالبی از طرف سه دانش‌آموز به ترتیب قوی، متوسط و نسبتاً ضعیف پرسیده می‌شوند که پاسخ به این پرسش‌ها، مکمل خوبی برای درس‌های ارائه شده است.

۴ کتاب‌های لقمه: ابعاد این کتاب‌ها، کوچک بوده و بنابراین می‌توانند همانند تلفن همراه، همه جا همراهتان باشند. اندازه و فرم این کتاب‌ها و نیز مطالب تألیف‌شده در آن‌ها به گونه‌ای تنظیم شده‌اند که مطالعهٔ این کتاب‌ها همه جا میسّر است: در مترو و اتوبوس، توی هواپیما، توی رختخواب و حتی شاید زیر دوش حمام!

۵ کتاب‌های امتحانوفن: این کتاب برای هفته‌های آخر قبل از امتحان و شب امتحان طراحی و تألیف شده است. یکی از ویژگی‌های این کتاب، مجهز بودن آن به خلاصه درس‌های «کپسولی» منحصربه‌فرد است. در مجموع ده سری امتحان بارم‌بندی شدهٔ استاندارد با رعایت تمام ضوابط آموزش و پرورش در آن ارائه شده و علاوه بر پاسخ‌های لازم برای گرفتن نمرهٔ کامل، توضیحات اضافی جهت شیرفهم شدن دانش‌آموزان نیز در کنار پاسخ‌ها آمده است.

غیر از پنج نوع کتاب مذکور انتشارات مهروماه، کتاب‌های دیگری هم برای نظام جدید آموزشی منتشر خواهد کرد که هر کدام به جای خود، مفید و دوست داشتنی هستند؛ از جمله سری کتاب‌های معجزهٔ کنکور، کتاب‌های آزمون، کتاب‌های جمع‌بندی و کتاب‌های جامع کنکور. اطلاعات لازم در مورد تک‌تک این کتاب‌ها را می‌توانید از طریق سایت مهروماه به آدرس mehromah.ir به‌دست آورید.

با آرزوی توفیق روزافزون همهٔ فرزندان میهنم
مدیر شورای تألیف
محمدحسین انوشه

مقدمه

یکی از درس‌هایی که قدرت فکر و خلاقیت را افزایش می‌دهد، هندسه است. لازمهٔ یادگیری مطالب درس هندسه، کتاب‌های جامع و دقیق و وجود معلمان باتجربه است. در این کتاب سعی بر آن بوده که مطالب دقیق همراه با مثال‌های فراوان، جدید ومفهومی ارائه شود. این کتاب باید با توجه به برنامه و استعداد هر فرد، مورد مطالعه قرار گیرد. ما در این کتاب نه تنها کتاب درسی را در نظر گرفته‌ایم بلکه آرام آرام زمینه کنکور را هم برای شما فراهم کرده‌ایم. قبل از شروع تست‌ها، تعدادی مثال ارائه شده تا شما را برای پاسخ‌گویی به تست‌ها آماده نماید. کتاب در مدت کوتاهی نوشته نشده است بلکه زمان بیشتر از دو سال و تجربهٔ تدریس سال‌های زیادی را به همراه دارد. نگارش کتاب مطابق با کتاب‌های جدید هندسه در کشورهای پیشرفته است. ممکن است شروع کار برای شما کمی کند باشد، اما بعد از مدتی از نوع نگارش کتاب لذت می برید. کتاب را دقیق و طبق برنامهٔ منظم و با عشق و علاقه مطالعه کنید و وقتی به نیمهٔ کتاب می‌رسید نتیجهٔ آن را با تمام وجود احساس خواهید کرد. اکنون که فرصت دارید زیاد مطالعه کنید، چون زندگی کوتاه است و خیلی زود دیر می‌شود!

سطح مطالب، مثال‌ها و تست‌ها متوسط و پیشرفته است و لازمهٔ یادگیری آن‌ها علاقه و پشتکار مداوم است.

ساختار و ویژگی‌های این کتاب

۱ در ابتدای کتاب پاره‌خط، نیم‌خط، خط، زاویه و اندازهٔ زاویه را دقیق توضیح داده‌ایم و تمام آن‌ها را در کل کتاب رعایت کرده‌ایم.

۲ قبل از شروع تست هر بخش، نکات مهمی آورده‌ایم که در داخل تست‌ها کاربرد آن‌ها را می‌بینید و لازم به ذکر است که در بیشتر موارد آن‌ها را ثابت کرده‌ایم.

۳ نکاتی را که در کنکور مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده‌ایم و تست‌ها و مثال‌های جالبی را از آن نکات حل کرده‌ایم.

۴ در هر بخش تست‌های فراوان و جدیدی در نظر گرفته‌ایم که شما را برای رتبه‌های تک‌رقمی و دورقمی آماده می‌کند.

۵ غیر از پوشش دادن کامل مطالب کتاب درسی، مطالبی فراتر از کتاب آورده‌ایم که شما را برای کنکور آماده کنیم.

۶ برای دانش‌آموزان علاقه‌مند، اثبات قضایای مهم و مشهور که در کتاب درسی به آن‌ها پرداخته نشده (مانند اثبات قضیهٔ پیك) را بیان کرده‌ایم.

۷ نکته‌های بسیار جالب و دوست‌داشتنی در درس‌نامه آورده‌ایم که استفاده از آن‌ها را در مثال‌ها و تست‌ها می‌بینید. این کتاب سرشار از تست‌های متنوع و جدید است که قدرت خلاقیت شما را به چالش می‌کشد و شما را برای هر نوع مسابقه و کنکور آماده می‌کند، درضمن تمام تست‌ها پاسخ تشریحی کامل دارند.

راهنمای استفاده از کتاب

ابتدا مطالب مربوط به هر بخش را از کتاب درسی مطالعه کنید، سپس درس‌نامهٔ مربوط به همان بخش را از این کتاب مطالعه و مثال‌هایش را حل کنید و به پاسخی که به آن داده شده توجه کنید، سپس وارد حل تست‌ها شده و خودتان را محك بزنید. یادتان باشد، لزومی ندارد تست‌های هر بخش را حتماً در یك وعده حل کنید بلکه باتوجه به برنامه‌ریزی خودتان آن‌ها را در چند مرحله حل کنید.

و اما قدردانی...

در پایان بر خود لازم می‌دانم از زحمات کسانی که در تهیهٔ این کتاب مرا یاری کردند، قدردانی نمایم:

- از جناب آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات مهروماه به خاطر لطف و همراهی مثال‌زدنی ایشان؛
- از آقای دکتر داود احمدی دستجردی، خانم مهندس مریم محمدی، آقای دکتر حسین حاتمی، خانم مهندس سارا محمدی و جناب آقای بهنام بناپور؛ به دلیل همراهی در تألیف این کتاب؛
- از سرکار خانم سمیه جباری مدیر تولید محترم به خاطر همکاری صمیمانهٔ ایشان؛
- از سرکار خانم سمیه امیدی صفحه‌آرای کتاب که در نهایت دقت و صبر و حوصله، صفحه‌آرایی کتاب را به سرانجام رساندند؛
- از سرکار خانم سنور حریری مسئول واحد ویراستاری برای تلاش و همکاری بی‌وقفه ایشان؛
- از سرکار خانم‌ها مهشید برزنونی و الناز رضوانی که زحمت حروف‌چینی کتاب را بر عهده داشتند؛
- از سرکار خانم فرشته شاه‌بیک که با دقت اشکال کتاب را رسم کردند.

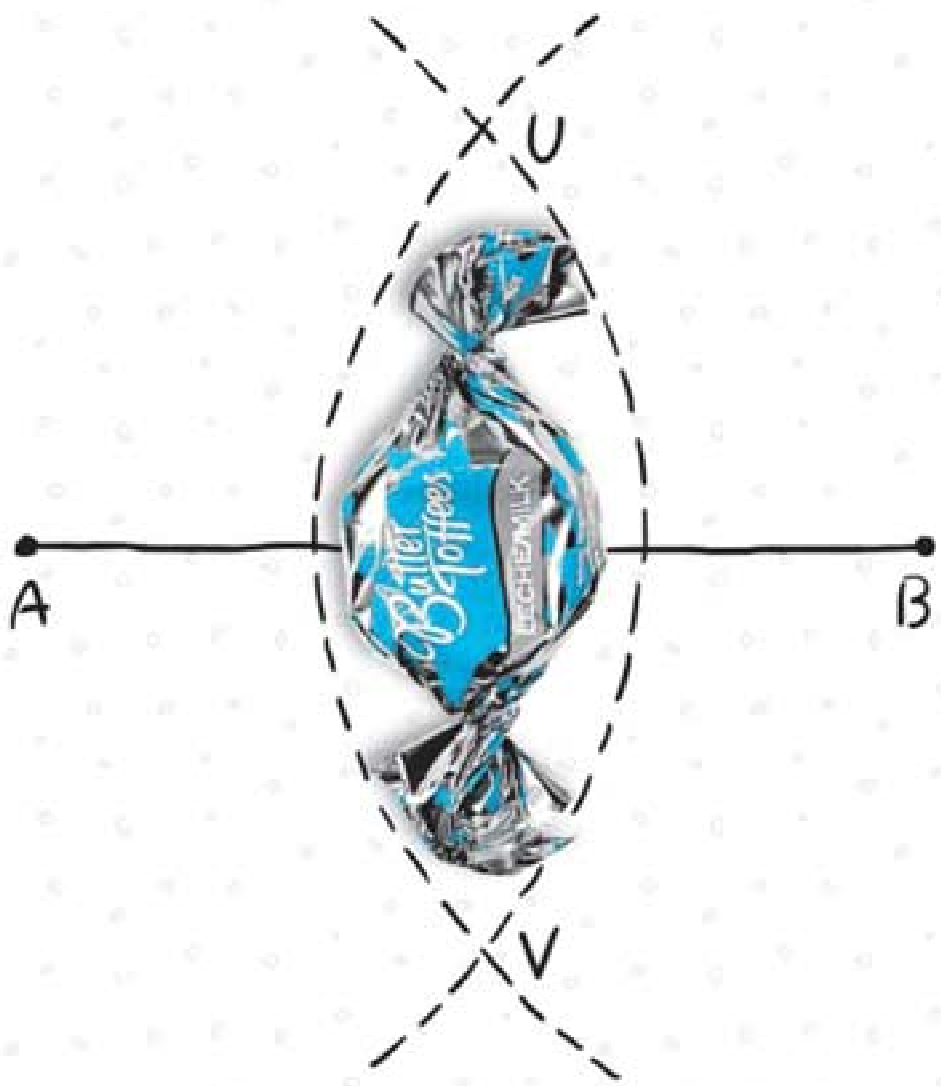
محمود محمدی
زمستان ۹۶

فهرست

فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

در این فصل تعاریف دقیقی از پاره‌خط، نیم‌خط، خط، زاویه، اندازهٔ زاویه و... آورده شده سپس ترسیم‌های هندسی متنوعی را در قالب مثال بررسی کرده‌ایم و در پایان در مورد انواع استدلال، گزاره، نقیض، برهان‌خلف و... مطالبی را آورده‌ایم. درضمن در مورد نامساوی‌ها در مثلث تست‌های فراوانی را با پاسخ تشریحی حل کرده‌ایم.



پاره‌خط، نیم‌خط و خط

◀ در هندسه، مفهوم‌های نقطه، خط و صفحه پذیرفتنی هستند و تعریف نمی‌شوند.

◀ پاره‌خط قسمتی از یک خط است که شامل دو نقطه که نقاط انتها نام دارد و تمام نقاط بین آن دو نقطه می‌باشد. پاره‌خط با نقاط انتهای A و B را با نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهند.

◀ نماد AB یعنی طول پاره‌خط از A تا B، اندازهٔ پاره‌خط عدد مثبت و یگانه است.

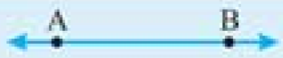
◀ خطی که از نقاط A و B می‌گذرد را با نماد $\overleftrightarrow{AB}$ نشان می‌دهند. خوب به خاطر بسپارید:

$\overline{AB}$ یعنی پاره‌خط با نقاط انتهای A و B

AB یعنی طول پاره‌خط با نقاط انتهای A و B

$\overleftrightarrow{AB}$ یعنی خطی که از نقاط A و B می‌گذرد.

◀ خلاصهٔ نمادها با توضیح و شکل هندسی در جدول زیر آمده است.

توضیح نماد	نماد	شکل هندسی
خطی که از نقاط A و B می‌گذرد	$\overleftrightarrow{AB}$	
پاره‌خطی با نقاط انتهای A و B	$\overline{AB}$	
طول قطعه از A تا B	AB	یک عدد مثبت

◀ برای نشان‌دادن طول پاره‌خط از نماد AB یا BA استفاده می‌شود (ترتیب A و B مهم نیست) اما AB باید یک عدد مثبت باشد، مثلاً $AB = ۴$ یا $AB = ۲/۵$. در شکل  نقطهٔ B وسط $\overline{AC}$ است. وقتی $AB = BC$ باشد، شکل‌های هندسی $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ را هم‌نهشت می‌گویند. عدد طول‌ها در شکل قبل مساوی است، اما پاره‌خط‌های واقعی (شکل‌های هندسی) هم‌نهشت هستند. نماد هم‌نهشتی به‌صورت $\cong$ می‌باشد.

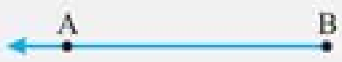
◀ اگر نقطهٔ B وسط $\overline{AC}$ باشد، آن‌گاه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

نیم‌خط

◀ نیم‌خط AB که با نماد $\overrightarrow{AB}$ نشان داده می‌شود؛ اجتماع $\overline{AB}$ و تمام نقاط x روی $\overleftrightarrow{AB}$ است، به‌طوری‌که B بین A و x قرار دارد. در شکل‌های زیر $\overleftrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AB}$، و $\overrightarrow{BA}$ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ تفاوت دارند. اولی نیم‌خطی با ابتدای A و دومی نیم‌خطی با ابتدای B است.

خط:  $\overleftrightarrow{AB}$ نقاط انتها ندارد و در دو جهت مخالف نامتناهی امتداد دارد.

نیم‌خط:  A نقطهٔ ابتدای $\overrightarrow{AB}$ است و از طرف B به‌طور نامتناهی امتداد دارد.

نیم‌خط:  B نقطهٔ ابتدای $\overrightarrow{BA}$ است و از طرف A به‌طور نامتناهی امتداد دارد.

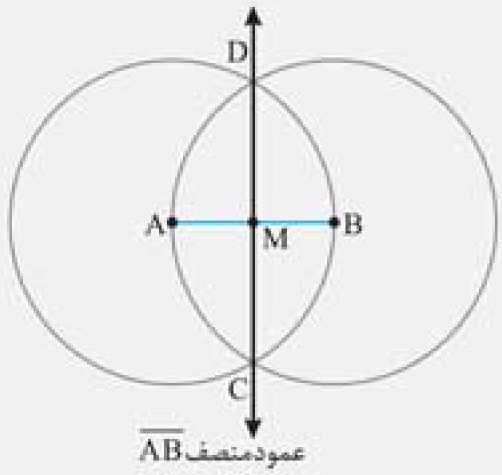
نیم‌خط‌های متقابل

◀ نیم‌خط‌های متقابل، دو نیم‌خط هستند با نقطهٔ ابتدای مشترک و اجتماع نیم‌خط‌های متقابل یک خط راست می‌باشد. در شکل  زیر $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ نیم‌خط‌های متقابل هستند.

◀ اشتراک دو شکل هندسی مجموعهٔ نقاطی است که دو شکل در تقاطع دارند. اگر دو خط متقاطع باشند اشتراک آن‌ها یک نقطه است. وقتی دو خط در دو نقطه (یا بیش‌تر) شریک باشند، منطبق هستند. در این موقعیت می‌گوییم تنها یک خط وجود دارد. در شکل  $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ یک خط هستند، اما در شکل  خط‌های ℓ_1 و ℓ_2 در نقطهٔ P متقاطع می‌باشند.

تعریف: دو خط موازی دو خطی هستند که در یک صفحه می‌باشند، اما تقاطع ندارد. اشتراک آن‌ها تهی است. بنابراین چنان‌چه دو خط ℓ و n موازی باشند، می‌نویسیم $\ell \parallel n$ و $\ell \cap n = \varnothing$.

رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



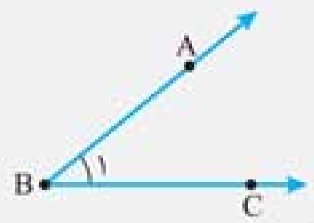
◄ برای رسم عمودمنصف $\overline{AB}$ بدین ترتیب عمل می‌کنیم.

دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ AB باز کرده، سپس به مرکزهای A و B دایره‌هایی به شعاع AB رسم می‌کنیم.

این دو دایره یکدیگر را در دو نقطهٔ C و D تلاقی می‌کنند. خطی که از نقاط C و D عبور می‌کند، عمودمنصف $\overline{AB}$ است و $\overline{AB}$ را در نقطهٔ M وسط $\overline{AB}$ تلاقی می‌کند.

خطی که از نقاط C و D می‌گذرد را با نماد $\overleftrightarrow{CD}$ نشان می‌دهند.

زاویه



تعریف: زاویه اجتماع دو نیم‌خط است که در نقطهٔ ابتدا شریک بوده و روی یک خط نمی‌باشند.

شکل مقابل یک زاویه را نشان می‌دهد که با نماد $\angle ABC$ یا $\angle CBA$ نشان می‌دهند.

نیم‌خط‌های BA و BC اضلاع زاویه هستند. B نقطهٔ ابتدای مشترک نیم‌خط‌ها رأس زاویه است.

وقتی یک زاویه را با سه حرف نام‌گذاری می‌کنیم، رأس همیشه در وسط نام برده می‌شود.

با یک حرف هم زاویه را نام‌گذاری می‌کنند. زاویهٔ مقابل را به‌صورت $\angle B$ هم نشان می‌دهند، یا به‌صورت $\angle ۱$.

اما باید به خاطر داشته باشید که $\angle B = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$.

اندازهٔ زاویه

◄ اندازهٔ زاویهٔ عدد مثبت یگانه است.

◄ اندازهٔ زاویه‌ها بین ۰° و ۱۸۰° می‌باشد.

◄ زاویه‌ای که اندازهٔ آن کم‌تر از ۹۰° باشد را حاده می‌گویند.

◄ زاویه‌ای که اندازهٔ آن دقیق ۹۰° باشد را زاویهٔ قائمه می‌گویند.

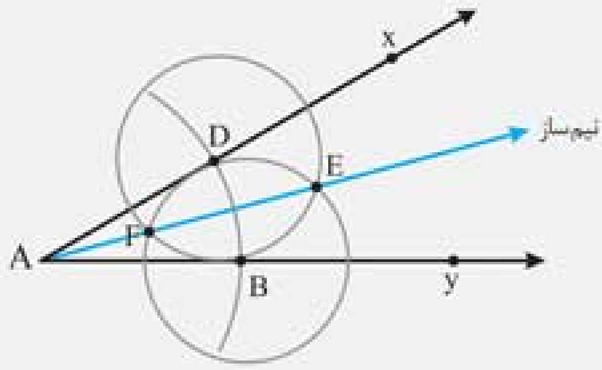
◄ زاویه‌ای که اندازه‌اش بین ۹۰° و ۱۸۰° باشد را منفرجه می‌نامند.

◄ زاویه‌ای که اندازه‌اش دقیقاً ۱۸۰° باشد را زاویهٔ نیم‌صفحه یا دو قائمه می‌گویند.

◄ اندازهٔ زاویه به طول اضلاع بستگی ندارد. برای اندازه‌گیری زاویه از نقاله استفاده می‌کنند. وقتی اندازهٔ زاویه B برابر ۴۵° باشد، می‌نویسند $m\angle B = ۴۵^\circ$. چنان‌چه اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۹۰° باشد، می‌نویسند $m\angle A = ۹۰^\circ$ و غیره.

رسم نیم‌ساز یک زاویه

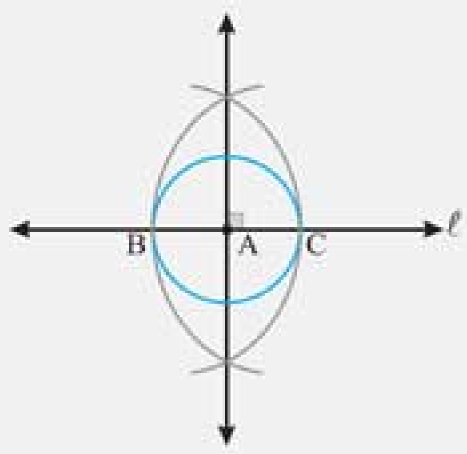
◄ **طریقهٔ رسم**



زاویهٔ xAy داده شده است. می‌خواهیم نیم‌ساز آن را رسم کنیم. به مرکز A (رأس زاویه) و به شعاع دلخواه، قوسی می‌زنیم. اضلاع زاویه را در نقاط B و D تلاقی می‌کند. به مراکز B و D و به شعاع BD دو دایره رسم می‌کنیم، تلاقی این دو دایره را نقاط E و F می‌نامیم. نیم‌خط $\overrightarrow{AF}$ نیم‌ساز زاویهٔ $x\hat{A}y$ است.

برای یک زاویهٔ داده‌شده یک و فقط یک نیم‌ساز وجود دارد.

رسم عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن خط

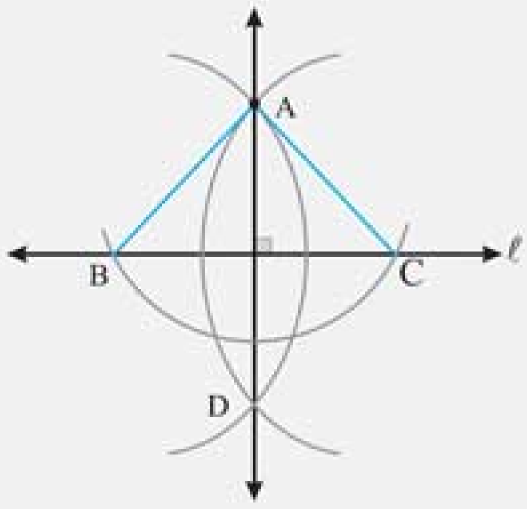


◄ برای رسم عمود بر خط ℓ از نقطهٔ A واقع بر خط ℓ، به این ترتیب عمل می‌کنیم. توسط پرگار به مرکز A و به شعاع مثبت دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره خط ℓ را در نقاط B و C تلاقی می‌کند.

◄ عمودمنصف پاره‌خط $\overline{BC}$ را رسم می‌کنیم.

◄ این عمودمنصف عمود بر ℓ در نقطهٔ A می‌باشد.

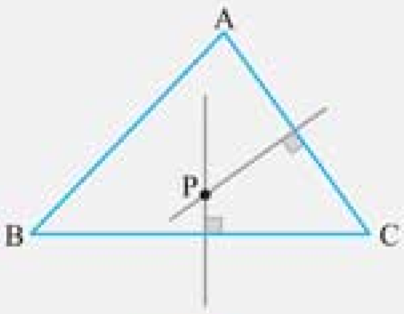
رسم عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن خط



◀ **طریقهٔ رسم**

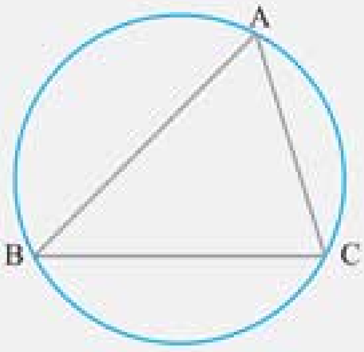
برای رسم عمود بر خط ℓ از نقطهٔ A که خارج خط ℓ است، طبق زیر عمل می‌کنیم. نقطهٔ B را روی خط ℓ اختیار می‌کنیم و توسط پرگار به مرکز A و به شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم. یا خط ℓ در نقطهٔ B بر دایره مماس شود که $\overline{AB}$ عمود بر ℓ است یا دایره خط ℓ را در دو نقطهٔ B و C تلاقی می‌کند. چنان‌چه دایره خط ℓ را در دو نقطهٔ B و C تلاقی کند، نیم‌ساز زاویه $B\hat{A}C$ را رسم می‌کنیم. این نیمساز $\overline{BC}$ را به زاویهٔ قائمه تلاقی می‌کند، یعنی بر خط ℓ عمود است.

رسم مرکز دایرهٔ محیطی مثلث



◀ برای به‌دست آوردن نقطهٔ P مرکز دایرهٔ محیطی ΔABC کافی است تلاقی دو عمودمنصف دو تا از ضلع‌های مثلث را به‌دست آوریم.

(توجه داشته باشید که عمودمنصف ضلع سوم هم از نقطهٔ P می‌گذرد.)

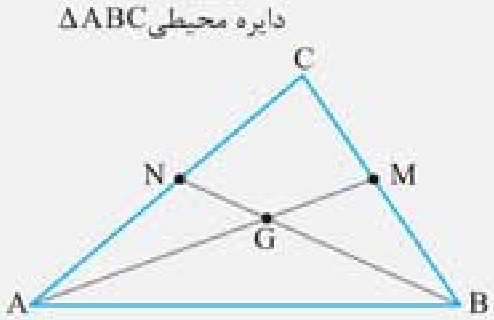


دایره محیطیΔABC

◀ **P مرکز دایرهٔ محیطی مثلث**

(دایرهٔ محیطی مثلث ABC دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ P تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث بوده و از سه رأس مثلث بگذرد.)

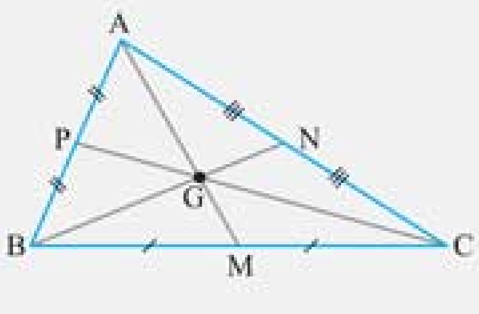
توجه: برای به‌دست آوردن P رسم دو عمودمنصف دو ضلع مثلث کافی است.



مثال: مرکز ثقل مثلث را مشخص کنید.

پاسخ: برای رسم مرکز ثقل G از **ΔABC** نقطهٔ تلاقی دو میانهٔ مثلث را به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ تلاقی سه میانهٔ هر مثلث را مرکز ثقل آن مثلث می‌گویند و معمولاً با حرف G نشان می‌دهند.

سه میانهٔ یک مثلث در یک نقطه متقاربند که این نقطه داخل مثلث است.



$$AG = \frac{۲}{۳}(AM) \quad \text{و} \quad GM = \frac{۱}{۳}(AM)$$

$$BG = \frac{۲}{۳}(BN) \quad \text{و} \quad GN = \frac{۱}{۳}(BN)$$

$$CG = \frac{۲}{۳}(CP) \quad \text{و} \quad GP = \frac{۱}{۳}(CP)$$

مثال: فرض کنید میانه‌های مثلث ABC شکل بالا به طول‌های AM = ۱۲ ، BN = ۱۵ و CP = ۱۸ و G مرکز ثقل مثلث است. طول‌های AG، GM و BG را به دست آورید.

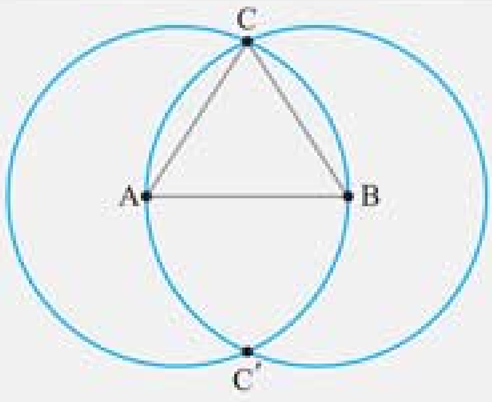
پاسخ:

$$AG = \frac{۲}{۳}(AM) = \frac{۲}{۳}(۱۲) = ۸$$

$$GM = AM - AG = ۱۲ - ۸ = ۴ \left(\text{یا } GM = \frac{۱}{۳}AM\right)$$

$$BG = \frac{۲}{۳}(BN) = \frac{۲}{۳}(۱۵) = ۱۰$$

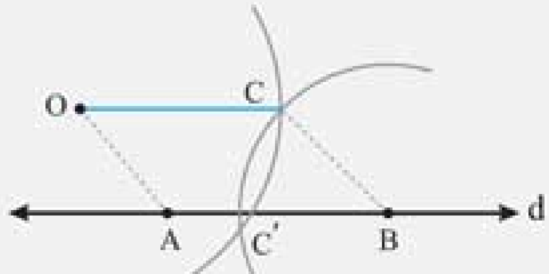
مثال: **مثلث متساوی‌الاضلاعی که یک ضلع آن پاره‌خط $\overline{AB}$ است را رسم نمایید.**



پاسخ: دو دایره رسم می‌کنیم، یکی به مرکز A و دیگری به مرکز B و هر دو به شعاع AB.

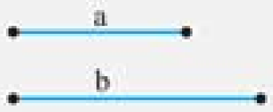
فرض کنیم یکی از نقاط تقاطع دو دایره C باشد. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
مسئله دو جواب دارد، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر ABC' است. C و C' نسبت به $\overline{AB}$ قرینه هستند و دو مثلث ABC و ABC' قابل انطباق می‌باشند.

مثال: **نقطهٔ O خارج خط d قرار دارد. از نقطهٔ O خطی به موازات خط d رسم کنید.**



پاسخ: دو نقطهٔ دلخواه A و B را روی خط d اختیار می‌کنیم. (شکل زیر)
آن‌گاه به مرکز O و به شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم. همچنین به مرکز B و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. C روی هر دو دایره، نقطه‌ای است که $\overline{OC}$ با d موازی است. چهارضلعی OABC متوازی‌الاضلاع است. مسئله همواره یک جواب دارد. یکی از نقاط تلاقی دو دایره جواب است، نقطهٔ دوم جواب نیست.

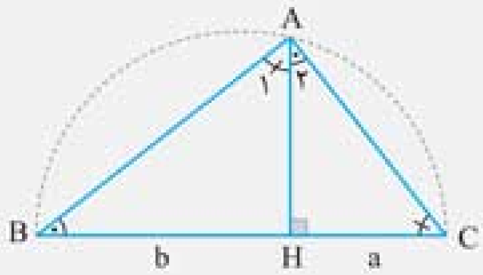
مثال: **دو پاره‌خط به طول‌های a و b داده شده است. توضیح دهید چگونه می‌توان پاره‌خطی به طول $\sqrt{ab}$ رسم کرد.**



پاسخ: واضح است که $a > 0$ و $b > 0$ و در نتیجه $ab > 0$.

$\overline{BC}$ را به طول $a + b$ رسم می‌کنیم، سپس نیم‌دایره‌ای به قطر $\overline{BC}$ رسم می‌کنیم.

$BH = b$ و $HC = a$



از نقطهٔ H عمودی بر $\overline{BC}$ رسم می‌کنیم. این عمود نیم‌دایره را در A قطع می‌کند.

$AH = \sqrt{ab}$ زیرا $A\overset{\Delta}{B}H \sim A\overset{\Delta}{C}H$ ، $(m(\hat{A}_1) = m(\hat{C})$ و $m(\hat{A}_2) = m(\hat{B}))$

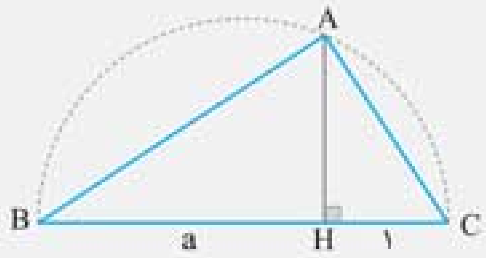
$$\frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = HC.BH = a.b$$

$$AH = \sqrt{ab}$$

توجه: در صورتی‌که به قطر $\overline{BC}$ دایره رسم می‌کردید، مشابه $\overline{AH}$ پاره‌خط دیگر $\overline{A'H}$ در پایین $\overline{BC}$ تشکیل می‌شد که $\overline{A'H}$ قرینهٔ $\overline{AH}$ نسبت به $\overline{BC}$ بود و $\overline{AH} \cong \overline{A'H}$.

مثال: **پاره‌خطی به طول a داده شده است. پاره‌خطی به طول $\sqrt{a}$ رسم کنید.** $(a > 0)$

پاسخ: پاره‌خط $\overline{BC}$ را به طول $a + 1$ رسم می‌کنیم. $(BH = a\ ,\ HC = 1)$ نیم‌دایره‌ای به قطر $\overline{BC}$ رسم می‌کنیم. از H عمودی بر $\overline{BC}$ رسم کرده، نیم‌دایره را در A قطع می‌کند.

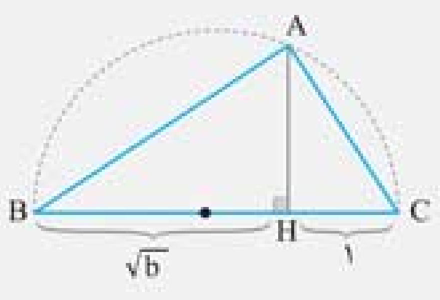


$$AH^2 = BH \times HC = a \times 1 = a \Rightarrow AH = \sqrt{a}$$

بنابراین طول $\overline{AH}$ برابر $\sqrt{a}$ است.

مثال: **پاره‌خطی به طول b داده شده است، پاره‌خطی به طول $\sqrt[4]{b}$ رسم کنید.**

پاسخ: با توجه به مسئلهٔ قبل، پاره‌خط به طول $\sqrt{b}$ را به‌دست می‌آوریم و عملیات مشابه انجام داده $\sqrt[4]{b}$ را مشخص می‌کنیم.

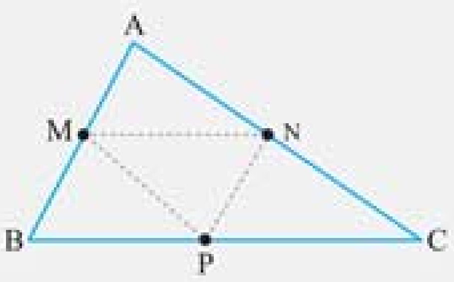


$BH = \sqrt{b}$ و $HC = 1$، به قطر BC نیم‌دایره‌ای رسم می‌کنیم. در H عمودی بر $\overline{BC}$ رسم می‌نماییم تا با نیم‌دایره در A تلاقی کند، $AH = \sqrt[4]{b}$ است.

$$AH^2 = BH.HC = \sqrt{b} \times 1 = \sqrt{b}$$

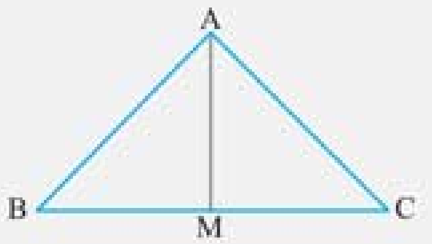
$$AH = \sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt[4]{b}$$

مثال: **وسط‌های اضلاع مثلثی داده شده است. آن مثلث را رسم کنید.**



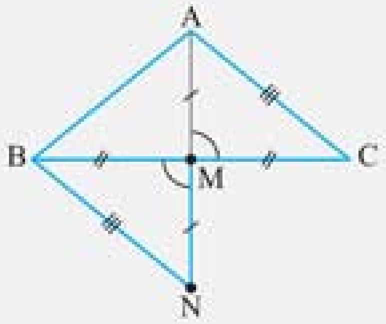
پاسخ: از مثلث ABC نقاط M، N و P به ترتیب وسط‌های اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ داده شده است. می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم. کافی است از M موازی $\overline{NP}$ و از N موازی $\overline{MP}$ و از P موازی $\overline{MN}$ رسم کنیم، تلاقی این خط‌ها مثلث ABC را به‌وجود می‌آورد.

مثال: از مثلث ABC، AB، AC و اندازهٔ میانهٔ نظیر رأس A از مثلث داده شده است، مثلث را رسم کنید.



پاسخ: اندازه‌های $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{AM}$ را داریم، باید مثلث را رسم کنیم. فرض کنیم مسئله حل‌شده باشد. میانهٔ $\overline{AM}$ را به اندازهٔ خودش تا N امتداد می‌دهیم. $(AM = MN)$ و N را به B وصل می‌کنیم.

$\overset{\Delta}{BMN} \cong \overset{\Delta}{ACM}$ (ض ز ض)



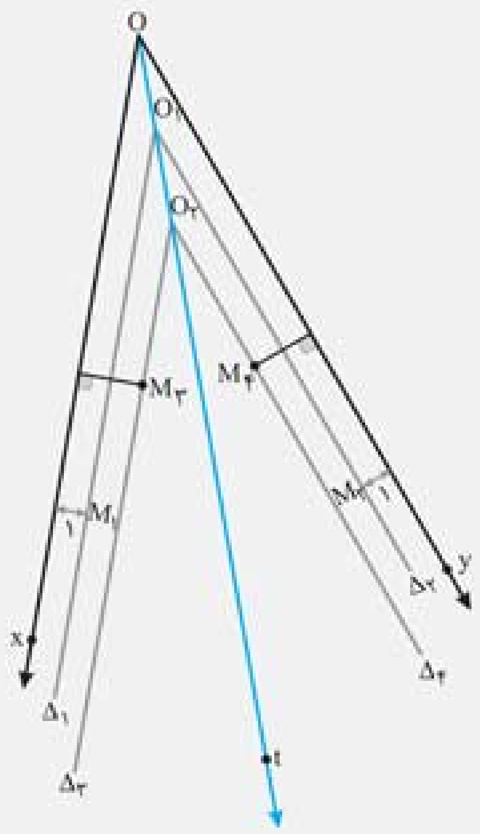
در نتیجه $BN = AC$. پس مثلث ABN با داشتن اندازه‌های سه ضلع قابل رسم است (راه‌حل مسئله مشخص شد.) مثلث ABN را رسم می‌کنیم. سپس $\overline{BM}$ را به اندازهٔ خودش تا C امتداد می‌دهیم و C را به A مستقیم وصل می‌کنیم، مثلث ABC مشخص می‌شود.

مثال: دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف: نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۱ واحد باشد. (نقطه در صفحهٔ زاویه باشد.)

ب: نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ۲ واحد باشد. (نقطه در صفحهٔ زاویه باشد.)

پ: با استفاده از (الف) و (ب) نیم‌ساز زاویهٔ موردنظر را رسم کنید.



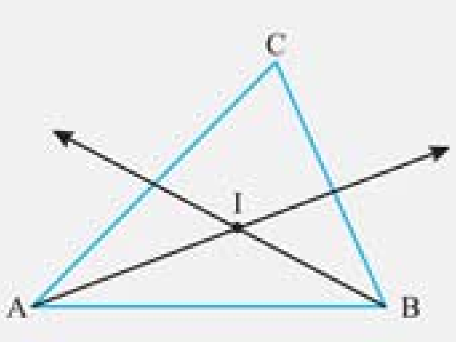
پاسخ:

الف: نقاط M_1 و M_2 را داخل زاویه به ترتیب فاصله‌های ۱ از $\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{oy}$ در نظر گرفته و از این نقاط خطوطی موازی با $\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{oy}$ رسم می‌کنیم و تلاقی آن‌ها را O_1 می‌نامیم. O_1 از هر ضلع زاویه به فاصلهٔ ۱ است.

ب: نقاط M_3 و M_4 را داخل زاویه و به فاصلهٔ ۲ از $\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{oy}$ در نظر گرفته و از این نقاط خطوطی موازی با $\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{oy}$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن‌ها را نقطهٔ O_2 می‌نامیم.

پ: O_2 از هر ضلع زاویه به فاصلهٔ ۲ است. O را به O_1 وصل کرده، امتداد می‌دهیم از O_2 هم می‌گذرد و نیم‌خط $\overrightarrow{OO_1}$ (یا $\overrightarrow{OO_2}$) نیم‌ساز زاویه است. یادآوری می‌کنیم که هر نقطه که روی نیم‌ساز زاویه باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است (و بالعکس).

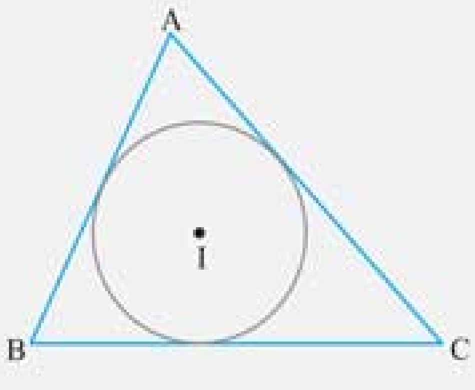
مثال: دایرهٔ محاطی مثلث را رسم نمایید.



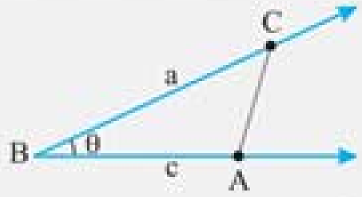
پاسخ: برای به‌دست آوردن مرکز دایرهٔ محاطی مثلث (نقطهٔ I) از ΔABC، تلاقی دو نیم‌ساز زاویه‌های داخلی مثلث را به‌دست می‌آوریم. (دایرهٔ محاطی مثلث ABC، دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ I و بر سه ضلع مثلث مماس است.)

شکل زیر مثلث ABC و دایرهٔ محاطی آن را نشان می‌دهد.

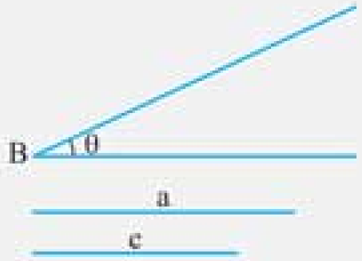
فاصله I تا یکی از اضلاع مثلث اندازه شعاع دایره محاطی مثلث می‌باشد.



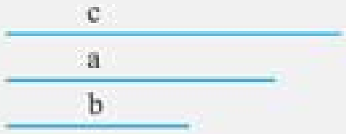
مثال: اندازه‌های دو ضلع و اندازهٔ زاویهٔ شامل آن‌ها داده شده است، مثلث را رسم کنید.



پاسخ: زاویه‌ای هم‌اندازه با زاویهٔ داده‌شده رسم می‌کنیم. از رأس زاویه، اندازهٔ ضلع‌های داده شده را روی اضلاع زاویه مشخص می‌کنیم و نقاط انتهای اضلاع مشخص‌شده را به هم وصل می‌کنیم.



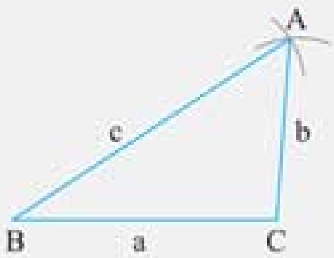
مثال: اندازه‌های سه ضلع از مثلثی داده شده است، مثلث را رسم کنید.



پاسخ: اندازه‌های سه ضلع مثلثی a، c و b داده شده است. می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم. پاره‌خط $\overline{BC}$ را به طول a رسم می‌کنیم. سپس دایره‌هایی به مراکز B و C و به شعاع‌های اندازهٔ دو ضلع دیگر یعنی b و c رسم می‌کنیم، تلاقی آن‌ها نقطهٔ A رأس سوم مثلث است. دو حالت برای رأس سوم وجود دارد، زیرا دایره‌ها دو نقطهٔ اشتراک دارند، دو مثلث نسبت به ضلع $\overline{BC}$ قرینه می‌شوند در نتیجه دو مثلث هم‌نهشت هستند.

برای این‌که دایره‌هایی به مرکزهای B و C متقاطع باشند لازم و کافی است که اندازهٔ ضلع مثلث کوچک‌تر از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث باشد و بزرگ‌تر از قدرمطلق تفاضل اندازه‌های آن‌ها.

(کافی است که اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع مثلث از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث کم‌تر باشد).



مثال: اندازهٔ یک ضلع و اندازهٔ دو زاویه از یک مثلث داده شده است. مثلث را رسم نمایید.

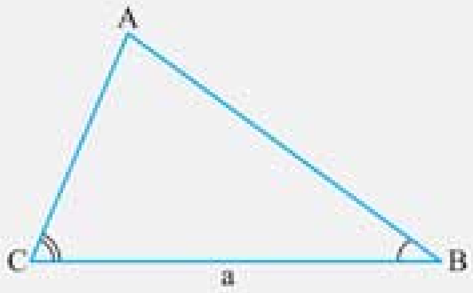
پاسخ: وقتی اندازهٔ دو زاویه را به ما بدهند می‌توانیم اندازهٔ زاویه سوم را به‌دست آوریم.

(مجموع اندازه‌های سه زاویهٔ داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.)

اکنون دو زاویهٔ مجاور به ضلع داده‌شده را داریم. کافی است این زاویه‌ها را در نقاط انتهای این ضلع مشخص کنیم.

شرط جواب داشتن مسئله آن است که مجموع اندازه‌های دو زاویه کوچک‌تر از دو قائمه باشد.

ضلع $\overline{BC}$ به اندازهٔ a را داریم. در نقاط انتهای آن دو زاویه‌ای که اندازهٔ آن‌ها را داریم، مطابق شکل مشخص کرده، تلاقی ضلع‌ها رأس سوم را مشخص می‌کند. $(m\angle B + m\angle C) < ۱۸۰^\circ$

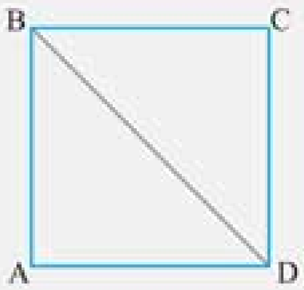


مثال: مجموع اندازه‌های قطر و یک ضلع مربعی داده شده است، آن را رسم نمایید.

پاسخ: $AD + DB$ را به ما داده‌اند و می‌خواهیم مربع را رسم کنیم. در این مواقع باید $\overline{AD}$ و $\overline{BD}$ را روی یک پاره‌خط داشته باشیم، تا مسئله راحت حل شود.

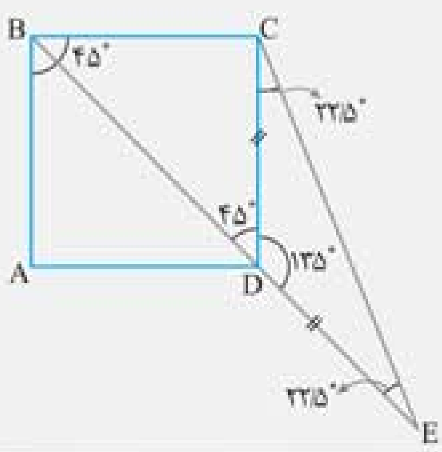
فرض کنیم مسئلهٔ حل‌شده باشد و مربع ABCD (شکل زیر) جواب باشد. قطر $\overline{BD}$ را امتداد می‌دهیم، به‌طوری که $DE = AD$، مثلث CDE متساوی‌الساقین است، زیرا $CD = DE$.

$m(\hat{DEC}) = m(\hat{DCE}) = ۲۲/۵^\circ$ و $m(\hat{CDE}) = ۱۳۵^\circ$



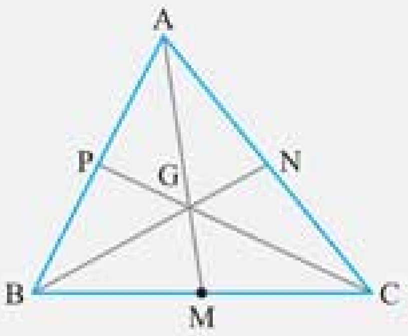
اما مثلث BEC قابل رسم است، زیرا BE را داریم (به ما داده‌اند)، زوایای $\hat{CBE}$ و $\hat{BEC}$ هم قابل رسم می‌باشند. بعد از رسم آن روی ضلع $\overline{BC}$ مربع را به‌وجود می‌آوریم.

توجه: (زاویهٔ ۴۵° نصف ۹۰° است که رسم آن ساده است و زاویهٔ $۲۲/۵^\circ$ هم نصف ۴۵° است که رسم آن هم ساده است.)



مثال: **سه میانه از مثلثی داده شده است، آن را رسم کنید.**

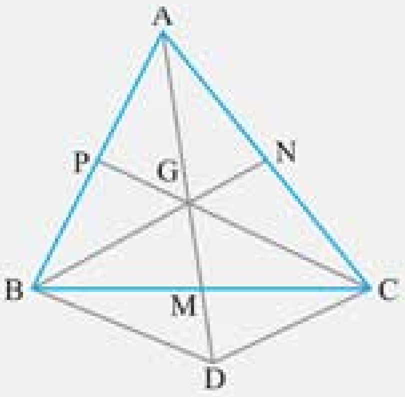
پاسخ: قبل از این‌که مسئله را حل کنیم، صورت قضیه‌ای را یادآور می‌شویم؛ چنان‌چه سه میانهٔ یک مثلث را رسم کنیم، در نقطه‌ای مثل G (به‌نام مرکز ثقل مثلث) تلاقی دارند و $GM = \frac{۱}{۳}AM$, $AG = \frac{۲}{۳}AM$



$$GN = \frac{۱}{۳}BN , BG = \frac{۲}{۳}BN$$

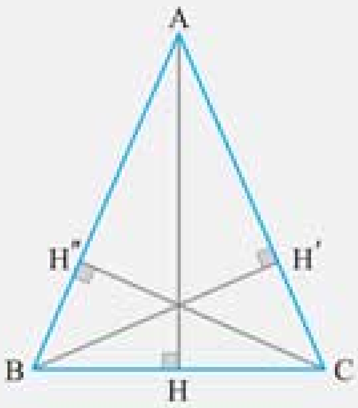
$$GP = \frac{۱}{۳}CP , CG = \frac{۲}{۳}CP$$

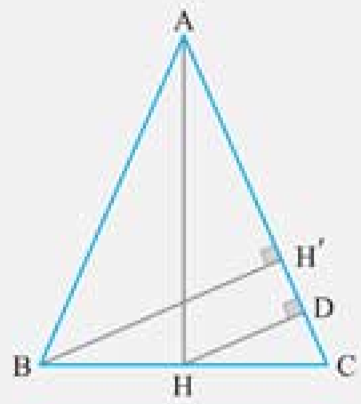
و حالا حل مسئله را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم مسئله حل شده باشد. $\overline{GM}$ را به اندازهٔ خودش تا D امتداد می‌دهیم. چهارضلعی $GBDC$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهایش منصف یکدیگرند. مثلث GBD با داشتن اندازهٔ سه ضلع قابل رسم است داریم $DG = AG = \frac{۲}{۳}AM$، $BG = \frac{۲}{۳}BN$ و $BD = GC = \frac{۲}{۳}CP$) بعد از رسم مثلث BGD، B را به وسط $\overline{GD}$ وصل کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم، C به‌دست می‌آید. $\overline{GD}$ را به اندازهٔ خودش از طرف G امتداد می دهیم، A به‌دست می‌آید و مثلث ABC رسم می‌شود. (البته با داشتن اندازهٔ سه میانهٔ مثلث)



مثال: **مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که اندازهٔ سه ارتفاعش معلوم است.**

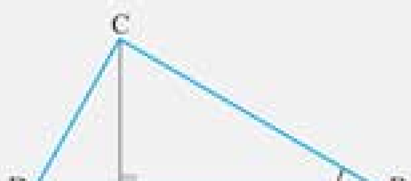
پاسخ: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)$، $BH' = CH''$. بنابراین با معلوم بودن اندازه‌های دو ارتفاع $\overline{AH}$ و $\overline{BH'}$ مثلث متساوی‌الساقین را رسم می‌کنیم. اگر از H عمود $\overline{HD}$ را بر $\overline{AC}$ رسم کنیم، واضح است که $HD = \frac{BH'}{۲}$، پس اندازهٔ $\overline{HD}$ هم معلوم است. اکنون مثلث قائم‌الزاویه AHD با معلوم‌بودن اندازه‌های وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه قابل رسم است، آن را رسم می‌کنیم. سپس در H عمودی بر $\overline{AH}$ رسم کرده، این عمود امتداد $\overline{AD}$ را در C تلاقی می‌کند و B قرینهٔ C نسبت به $\overline{AH}$ است. در نتیجه مثلث ABC مشخص می‌شود.





مثال: **مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ زاویهٔ حاده B و تفاضل اندازه‌های دو ضلع این زاویهٔ مثلث داده شده است.**

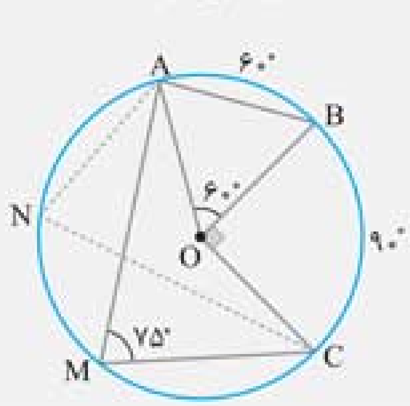
پاسخ: فرض کنیم مسئله حل‌شده باشد. $\overline{BA}$ را از طرف A امتداد می‌دهیم تا D به‌طوری‌که $BD = BC$. بنابراین $BC - BA = BD - BA = DA$، پس DA معلوم است و مثلث BCD متساوی‌الساقین است $(BC = BD)$. در نتیجه $m(\hat{D}) = m(D\hat{C}B)$، در نتیجه $m(\hat{B}) + ۲m(\hat{D}) = ۱۸۰^\circ$ یا $m(\hat{D}) = ۹۰^\circ - \frac{m(\hat{B})}{۲}$. حالا راه‌حل مسئله مشخص شده است.



مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC را با معلوم بودن DA و $m(\hat{D})$ رسم می‌کنیم. توجه داشته باشید که $m(\hat{D}) = ۹۰ - \frac{m(\hat{B})}{۲}$ معلوم است. سپس $D\hat{C}B$ را که اندازه‌اش برابر $m(\hat{D})$ است، رسم می‌کنیم و رأس B به‌دست می‌آید و مثلث ABC مشخص می‌شود.

مثال: **یک زاویهٔ ۷۵° رسم کنید.**

پاسخ: به مرکز O و به شعاع دلخواه، دایره‌ای رسم می‌کنیم. مثلث AOB طول هر ضلعش برابر شعاع دایره است که رسم می‌کنیم پس $m(A\hat{O}B) = ۶۰^\circ$. از O عمود $\overline{OC}$ را بر $\overline{OB}$ رسم می‌کنیم، $m(B\hat{O}C) = ۹۰^\circ$.

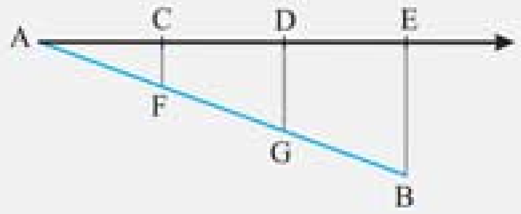


پس $m(A\hat{O}C)=۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$ و $A\hat{O}C$ یک زاویهٔ مرکزی است، بنابراین اگر M را روی کمان $\widehat{AC}$ اختیار کنیم، $m(A\hat{M}C)=\frac{m(\widehat{ABC})}{۲}=\frac{۶۰^\circ+۹۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$. (اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌رویش می‌باشد.)

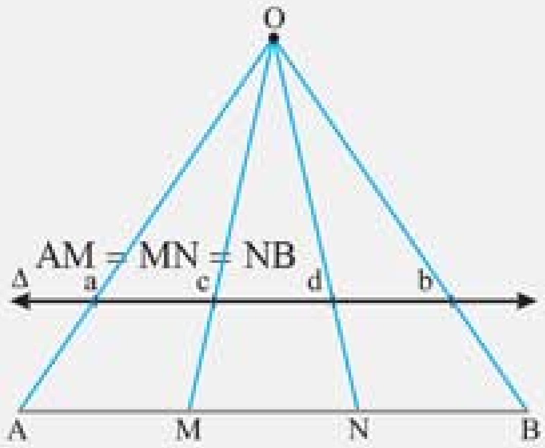
هر نقطهٔ دیگر روی $\widehat{AMC}$ به جز نقاط A و C همین خاصیت را دارد، یعنی $m(A\hat{N}C)=۷۵^\circ$.

مثال: پاره خط AB داده شده است، آن را به ۳ قسمت مساوی تقسیم نمایید.

پاسخ: فرض کنید پاره‌خط AB (یعنی $\overline{AB}$) را به ما داده‌اند. می‌خواهیم آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم.



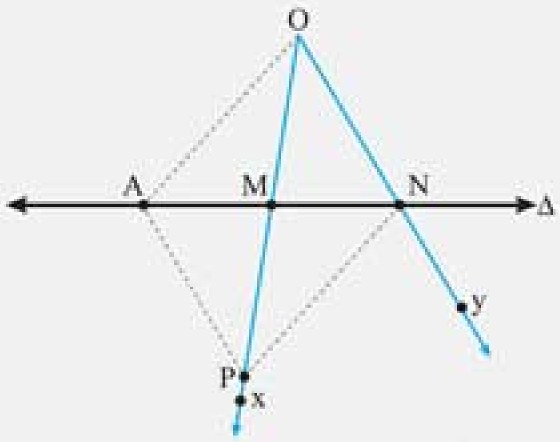
روش اول: از نقطهٔ A نیم‌خط دلخواهی عبور می‌دهیم. (مطابق شکل) و روی نیم‌خط از همین نقطهٔ A سه قطعهٔ مساوی و متوالی جدا می‌کنیم، AC، CD و DE. نقطهٔ B را به E وصل می‌کنیم آن‌گاه از نقاط D و C به موازات $\overline{BE}$ رسم می‌نماییم. این موازی‌ها $\overline{AB}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.



روش دوم: فرض کنیم پاره‌خط دادهشدهٔ AB را می‌خواهیم به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم. خط دلخواه Δ را موازی $\overline{AB}$ رسم می‌کنیم و روی آن سه قسمت متوالی و مساوی مانند ac، cd و db را جدا می‌کنیم. آن‌گاه A را به a وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا امتداد $\overline{Bb}$ را در O قطع کند. نیم‌خط‌های Oc و Od، $\overline{AB}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

$$AM = MN = NB$$

مثال: زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نقطهٔ A در صفحهٔ زاویه و خارج زاویه، داده شده است. از نقطهٔ A قاطعی چنان رسم کنید که دو ضلع زاویه را در نقاط M و N قطع کرده و AM = MN باشد.

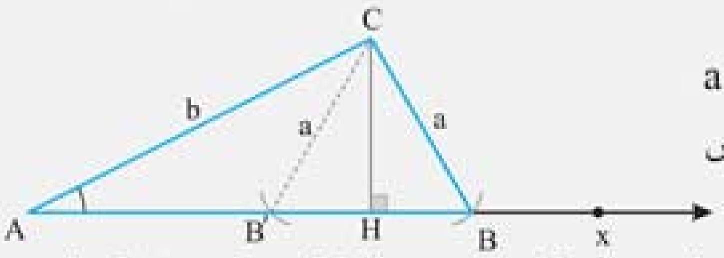


پاسخ: فرض کنیم مسئله حل شده باشد و خط Δ از نقطهٔ A عبور کرده و دو ضلع زاویه را در نقاط M و N قطع کرده باشد و AM = MN.

اگر روی نیم‌خط $\overrightarrow{Ox}$، نقطهٔ P را چنان اختیار کنیم که OM = MP آن‌گاه چهارضلعی OAPN متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهایش هم‌دیگر را نصف کرده‌اند. اکنون راه حل مسئله به‌دست آمده است، به‌این ترتیب که از نقطهٔ A خطی موازی نیم‌خط $\overrightarrow{Oy}$ رسم می‌کنیم، نیم‌خط $\overrightarrow{Ox}$ را در P تلاقی می‌کند. وسط پاره‌خط $\overline{OP}$ را M می‌گیریم. خطی که از دو نقطهٔ A و M می‌گذرد، (یعنی $\overline{AM}$) جواب مسئله است، AM = MN.

مثال: از مثلثی اندازه‌های دو ضلع و اندازهٔ زاویهٔ مقابل به یکی از آن ضلع‌ها داده شده است، آن را رسم کنید.

پاسخ: فرض کنیم مثلث ABC جواب باشد، که اندازهٔ $\hat{A}$ و a و b اندازه‌های دو ضلع آن داده شده است. $\overline{BC}$ مقابل $\hat{A}$ و $\overline{AC}$ مقابل $\hat{B}$ است. زاویه‌ای هم‌اندازه با $\hat{A}$ رسم می‌کنیم، سپس پاره‌خط $\overline{AC}$ را هم برابر با b روی یکی از ضلع‌ها جدا می‌کنیم، با این عمل نقطهٔ C هم جایش معلوم می‌شود.



اکنون کافی است جای B را مشخص کنیم. دایره‌ای به مرکز C و به شعاع a رسم می‌کنیم. تلاقی دایره با ضلع دوم زاویهٔ $\hat{A}$ جای نقطهٔ B را مشخص می‌کند و مثلث ABC مشخص می‌شود.

بحث: دایره‌ای که به مرکز C و به شعاع a رسم می‌کنیم، ضلع دوم زاویه را در حالت کلی در دو نقطه قطع می‌کند. (ممکن است قطع نکند یا در یک نقطه مماس شود.) از C عمود $\overline{CH}$ را بر ضلع دوم زاویهٔ $\hat{A}$ فرود می‌آوریم.

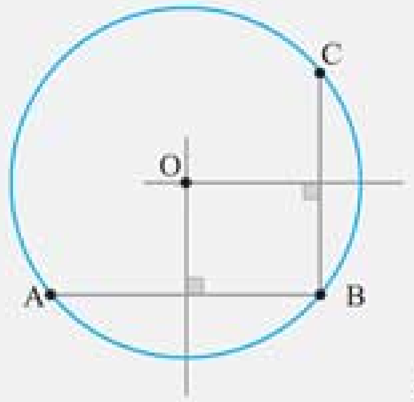
الف: اگر $CH > a$ دایره، ضلع دوم زاویه را قطع نمی‌کند و رسم مثلث غیرممکن است.

ب: اگر $CH < a$ دایره، ضلع دوم زاویه را در نقاط B' و B تلاقی می‌کند. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: زاویهٔ $\hat{A}$ حاده باشد. در این حالت نقطهٔ H وسط $B'B$ روی نیم‌خط $\overrightarrow{Ax}$ می‌باشد. حداقل یکی از نقاط B' و B روی این نیم‌خط خواهد بود. همیشه حداقل یک جواب وجود دارد. جواب دوم وجود دارد اگر نقطهٔ دوم بین A و H باشد که این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $a < b$.

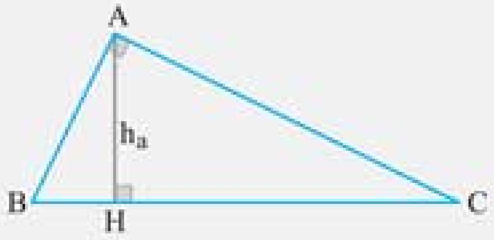
حالت دوم: زاویهٔ $\hat{A}$ منفرجه باشد. آن‌گاه نقطهٔ H روی نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{Ax}$ خواهد بود. بنابراین حداقل یکی از نقاط B' و B جواب نخواهد بود و در نتیجه حداکثر یک جواب دارد. یکی وجود دارد اگر نقطهٔ دوم دورتر باشد از H تا A، که رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $a > b$ و سرانجام اگر زاویهٔ $\hat{A}$ قائمه باشد، مسئله به‌صورت زیر بیان می‌شود. رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازهٔ وتر و اندازهٔ یک ضلع آن داده شده است و مسئله دارای جواب است، اگر اندازهٔ وتر از اندازهٔ ضلع قائم بزرگ‌تر باشد.

مثال: سه نقطهٔ A، B و C که بر یک استقامت نیستند، داده شده است. دایره ای رسم نمایید که از این سه نقطه بگذرد.



پاسخ: عمودمنصف‌های دو پاره‌خط که از وصل‌کردن نقاط حاصل می‌شود را رسم می‌کنیم. نقطهٔ O تلاقی آن‌ها مرکز دایره است. OA (یا OB یا OC) شعاع دایره است. این دایره را دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌نامند. اگر سه نقطه روی یک خط راست باشند، دایره‌ای که از سه نقطه بگذرد، وجود ندارد و در صورتی‌که سه نقطه غیرواقع بر یک خط راست باشند، مسئله همواره یک جواب دارد.

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ وتر و اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر آن معلوم است.

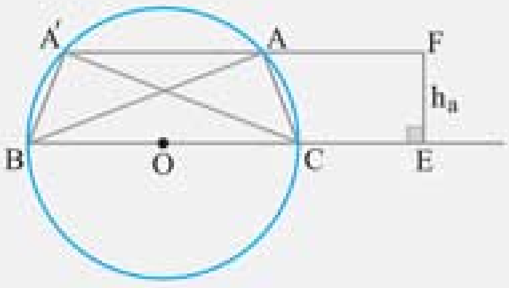


پاسخ: از مثلث قائم‌الزاویه، وتر $\overline{BC}$ و h_a را داریم، می‌خواهیم آن را رسم کنیم.

دایره‌ای به قطر $\overline{BC}$ رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه E روی $\overleftrightarrow{BC}$، عمودی به اندازهٔ h_a رسم می‌کنیم. ($EF = h_a$)

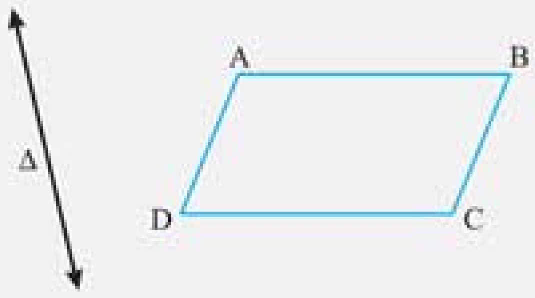
$EF = h_a$

از F به موازات خط $\overleftrightarrow{BC}$ رسم می‌کنیم و تلاقی آن را با دایره، نقاط A و A' می‌نامیم. مثلث‌های ABC و $A'BC$ جواب‌های مسئله‌اند.

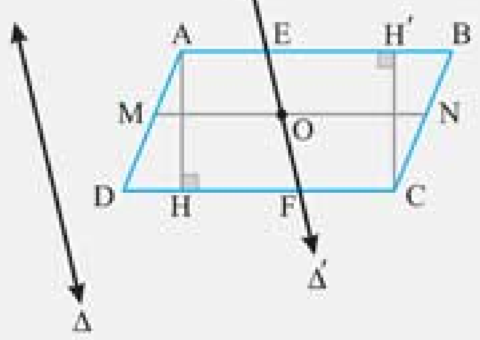


بحث: اگر موازی خط $\overleftrightarrow{BC}$ دایره را در دو نقطه قطع کند، مسئله دو جواب دارد. اگر با دایره در یک نقطه اشتراک داشته باشد، مسئله یک جواب دارد و چنان‌چه با دایره، اشتراکی نداشته باشد، مسئله جواب ندارد. شرط جواب آن است که $۰ < h_a \le \frac{BC}{۲}$.

مثال: متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و خط Δ واقع در صفحهٔ آن داده شده است. خطی موازی خط Δ در صفحهٔ متوازی‌الاضلاع چنان رسم کنید که مساحت متوازی‌الاضلاع را نصف کند.



پاسخ: وسط‌های دو ضلع موازی مثلاً $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ (یعنی نقاط M و N) را به هم وصل می‌کنیم و وسط $\overline{MN}$ یعنی O را مشخص می‌کنیم. از O خط Δ' را موازی Δ رسم می‌کنیم، این خط(یعنی Δ') جواب است. زیرا دو ذوزنقهٔ $AEFD$ و $EBCF$ مساحت‌های برابر دارند. ارتفاع آن‌ها که برابر است، $CH' = AH$ و



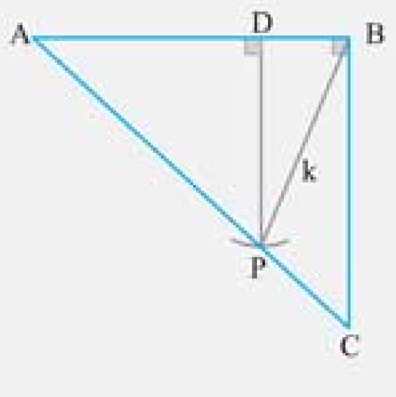
$$\left.\begin{array}{l} S_{AEFD} = (\overbrace{AE+DF}^{۲MO})(\frac{AH}{۲}) = (MO)(AH) \\ S'_{EBCF} = (\underbrace{EB+FC}_{۲ON})(\frac{CH'}{۲}) = (ON)(CH') \end{array}\right\} \xrightarrow[AH=CH']{MO=ON} S = S'$$

توجه داشته باشید که نقطه O مرکز متوازی الاضلاع $ABCD$ است.

بحث: ممکن است ذوزنقه‌ها در حالت‌های خاصی تبدیل به مثلث یا متوازی‌الاضلاع شوند که استدلال ساده است.

توجه داشته باشید که نقطه O مرکز متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است.

مثال: پاره‌خط AB را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که مجموع مربعات اندازه‌های این دو قسمت مساوی $k^۲$ باشد.

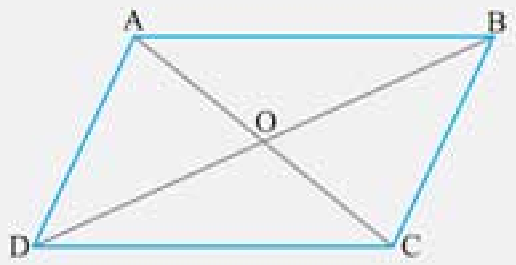


پاسخ: با داشتن پاره‌خط AB مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC را رسم می‌کنیم ($m(\hat{B}) = ۹۰^\circ$ ، $AB = BC$) به مرکز B و به شعاع k قوسی می‌زنیم. این قوس پاره‌خط AC را در P تلاقی می‌کند. از P عمودی بر $\overline{AB}$ رسم می‌کنیم و پای عمود را D می‌نامیم. این نقطهٔ D همان جواب است، زیرا $AD = DP$ (چرا؟) و

$$AD^۲ + DB^۲ = DP^۲ + DB^۲ = PB^۲ = k^۲$$

بحث: مسئله دو جواب یا یک جواب دارد. ممکن است که جواب نداشته باشد. بستگی به تلاقی قوسی که زدیم دارد با $\overline{AC}$ که آن را در دو نقطه یا یک نقطه تلاقی کند، یا این‌که اصلاً تلاقی نداشته باشد.

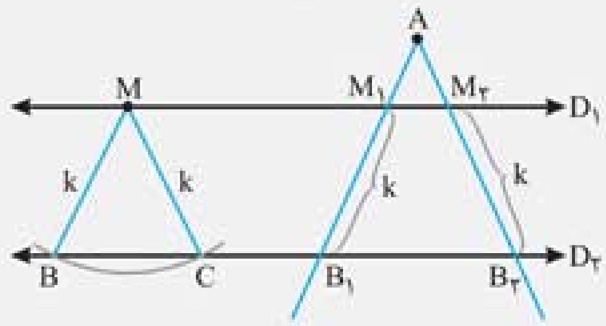
مثال: از متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر و اندازهٔ یک ضلع را داده‌اند. متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.



پاسخ: فرض کنیم مسئله حل‌شده باشد. چون AC، BD و CD را داریم، پس اندازهٔ سه ضلع مثلث COD را داریم؛ این مثلث قابل رسم است، $\overline{CO}$ را تا A امتداد می‌دهیم، به‌طوری که $OA = OC$ و $\overline{DO}$ را تا B امتداد می‌دهیم، به‌طوری که $OD = OB$. سپس B را به A و C، A را به D وصل می‌کنیم، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ حاصل می‌شود.

تذکر: در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و وقتی اندازهٔ یک قطر را داشته باشیم، اندازهٔ نصف آن‌ها را هم داریم.

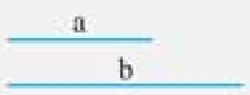
مثال: دو خط متوازی D_1 و D_2 و نقطهٔ A واقع در صفحهٔ دو خط موازی داده شده‌اند. از نقطهٔ A خطی چنان رسم کنید که قسمت محصور بین D_1 و D_2 به طول k باشد.



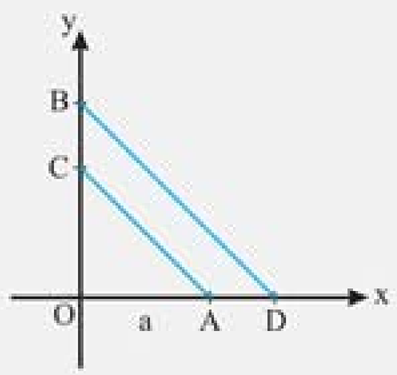
پاسخ: نقطهٔ دلخواه M را روی یکی از دو خط (مثلاً D_1) اختیار کرده و به مرکز M و شعاع k قوسی می‌زنیم. این قوس در حالت کلی D_2 را در نقاط B و C قطع می‌کند. بنابراین $MB = MC = k$. آن‌گاه از A دو خط به موازات پاره‌خط‌های $\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ رسم می‌کنیم. قسمت‌های محصور بین D_1 و D_2 برابر k می‌شود.

بحث: اگر قوسی که به مرکز M و به شعاع k رسم می‌کنیم، D_2 را در دو نقطه قطع کند، مسئله دو جواب دارد. بر D_2 مماس شود، مسئله یک جواب دارد و چنان‌چه با D_2 تلاقی نداشته باشد، مسئله جواب ندارد.

مثال: دو پاره‌خط (شکل مقابل) به طول‌های a و b داده شده‌اند. پاره‌خطی رسم کنید که طول آن $a.b$ باشد.



پاسخ: نقطهٔ A را روی محور xها چنان اختیار می‌کنیم که $OA = a$ و به‌طور مشابه نقطهٔ B را روی محور yها چنان اختیار می‌کنیم که $OB = b$. $OC = 1$ را هم مطابق شکل مشخص می‌کنیم. نقطهٔ A را به C مستقیم وصل می‌کنیم. از نقطهٔ B خطی موازی $\overline{CA}$ رسم می‌کنیم، محور xها را در D تلاقی می‌کند.

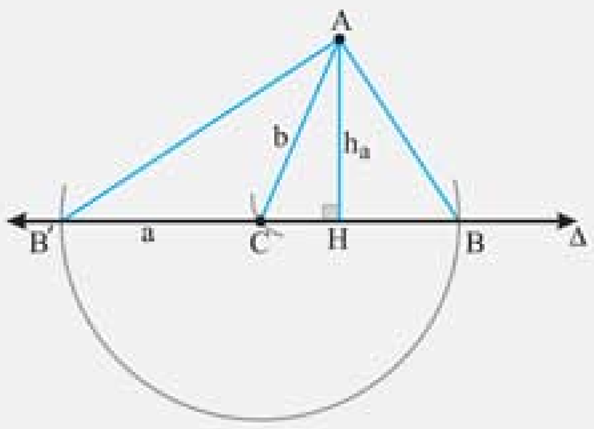


$$O\overset{\Delta}{A}C \sim O\overset{\Delta}{B}D \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$$

$$\begin{cases} OA = a \\ OC = 1 \\ OB = b \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{OD}{b} \quad , \quad OD = ab$$

بنابراین پاره‌خط، $\overline{OD}$ طولش $OD = a.b$.

مثال: از مثلث ABC، $BC = a$ و $AC = b$ و اندازهٔ ارتفاع نظیر رأس A، h_a داده شده است. مثلث را رسم کنید. $(h_a < b)$



پاسخ: روی خط دلخواه Δ، نقطهٔ H را اختیار کرده و عمودی بر Δ در H رسم کرده و روی آن $AH = h_a$ را جدا می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع b کمان رسم می‌کنیم Δ را در C تلاقی می‌کند. به مرکز C و به شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم Δ را در نقاط B و B' قطع می‌کند. مثلث‌های ABC و $AB'C$ جواب‌های مسئله می‌باشند. بحث مسئله ساده است که آن را برای شما باقی گذاشته‌ایم.

تمرینات تکمیلی

۱. از مثلث ABC که $m(\hat{A})=90^\circ$ و $AB=AC$، مقدار ارتفاع وارد بر وتر معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲. اندازه قطر مربع $ABCD$ معلوم است. آن را رسم کنید.

۳. از یک لوزی طول ضلع و طول یکی از اقطار معلوم است لوزی را رسم کنید.

۴. از مثلثی اندازه دو میانه و اندازه ضلعی که میانه نظیر آن رسم نشده است در درست است. مثلث را رسم کنید.

۵. از مثلثی یک ضلع و اندازه زاویه مجاور به آن و اندازه شعاع دایره محاطی معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۶. از مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی اندازه ارتفاع وارد بر وتر معلوم است مثلث را رسم کنید.

۷. قوسی از یک دایره معلوم است. مرکز آن دایره را پیدا کنید.

۸. دو نقطه A و B در طرفین خط xy قرار دارند. از این دو نقطه دو خط رسم کنید که نسبت به $\overleftrightarrow{xy}$ متقان باشند.

۹. از مثلثی a و b (اندازه ضلع‌های $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$) و $m(\hat{A})$ معلوم است به شرط $a>b$ مثلث را رسم کنید.

۱۰. با معلوم بودن طول a، طول $x=\sqrt{a^2}$ را رسم کنید.

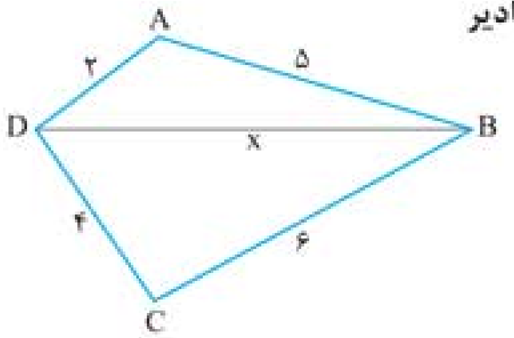
۱۱. بدون استفاده از نقاله زاویه‌ای رسم کنید که اندازه آن $67^\circ 30'$ باشد.

۱۲. از ذوزنقه متساوی‌الساقینی طول هر یک از دو قاعده و اندازه تفاضل دو زاویه غیرمساوی داده شده است. ذوزنقه را رسم کنید.

۱۳. از مثلثی اندازه یک زاویه و اندازه‌های نیمساز و ارتفاعی که از این رأس می‌گذرد معلوم است، مثلث را رسم کنید.

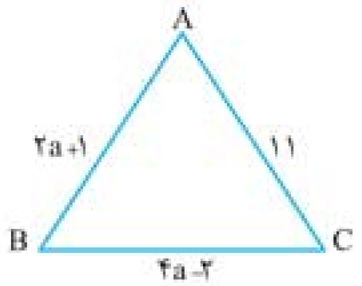
۱۴. پاره‌خطی به طول ℓ و امتداد معلوم را بر دو خط مفروض d_1 و d_2 متکی کنید.

۱. در شکل زیر $AD = 2cm$ ، $AB = 5cm$ ، $DC = 4cm$ ، $BC = 6cm$ و $BD = x$. مجموع مقادیر صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، کدام است؟



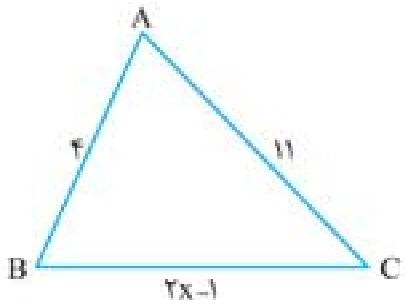
۱) ۱۸
۲) ۱۵
۳) ۱۰
۴) ۷

۲. در مثلث زیر a عدد صحیح و مثبت است و $AC = 11cm$ ، $AB = 2a + 1cm$ و $BC = 4a - 2cm$. مجموع مقادیر صحیح و مثبتی که a می‌تواند اختیار کند، کدام است؟



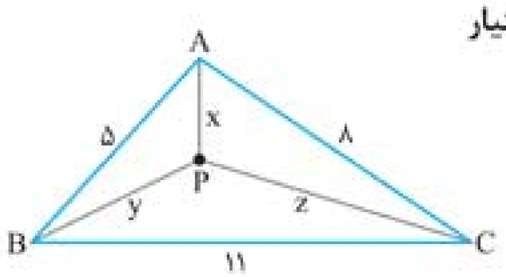
۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۲
۴) ۲۴

۳. در مثلث ABC، (شکل زیر) $AB = 4cm$ ، $AC = 11cm$ و $BC = 2x - 1cm$. کم‌ترین مقدار صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، کدام است؟



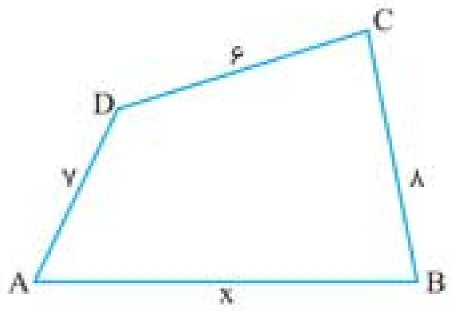
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۴. با توجه به اندازه‌های روی شکل زیر، کم‌ترین مقدار صحیحی که مجموع $x + y + z$ می‌تواند اختیار کند، کدام است؟



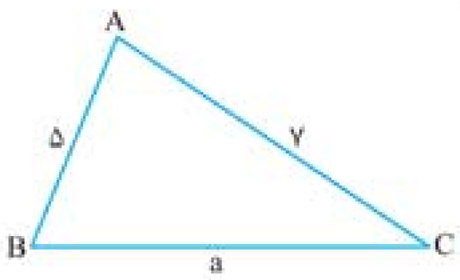
۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۵. اگر $AD = 7cm$ ، $DC = 6cm$ و $BC = 8cm$. با توجه به شکل زیر و اطلاعات داده‌شده، بزرگ‌ترین مقدار صحیح x کدام است؟



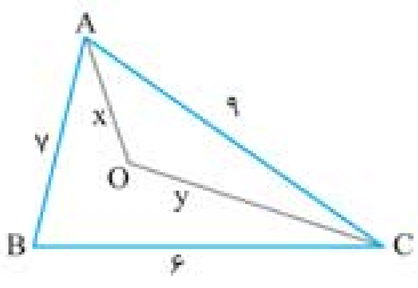
۱) ۲۱
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۱۷

۶. در مثلث ABC، شکل زیر $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$ ، $AB = 5cm$ ، $AC = 7cm$ و $BC = a\,cm$. کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند برای a رخ بدهد؟



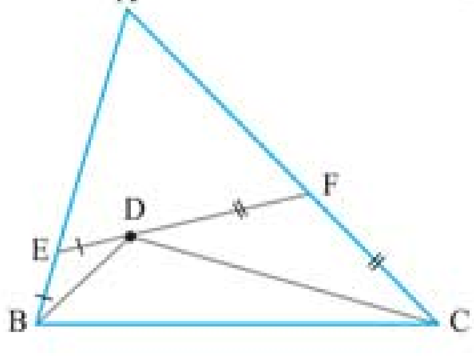
۱) ۶
۲) ۷
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۷. در مثلث ABC، $AB = 7cm$ ، $AC = 9cm$ و $BC = 6cm$. با توجه به شکل زیر کم‌ترین مقدار صحیح مجموع $x + y$ کدام است؟



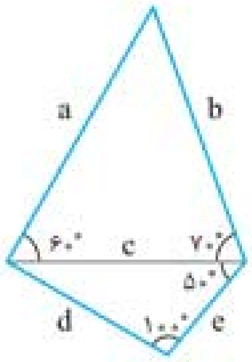
۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۸. در شکل زیر داریم: $BE = ED$ ، $DF = FC$ ، $AB = 6cm$ و $AC = 9cm$. مقدار محیط مثلث AEF چقدر است؟



۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۹. با توجه به اطلاعات موجود در شکل زیر، کدام نامساوی زیر درست است؟



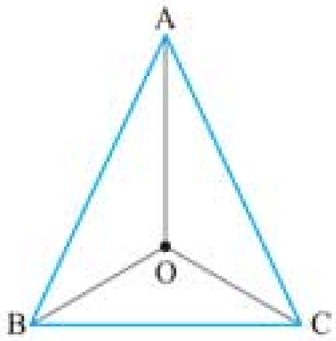
۱) $a > c > e$

۲) $d > b > a$

۳) $d > a > c$

۴) $c = d > a$

۱۰. اگر محیط مثلث ABC (شکل زیر) برابر ۱۶ cm باشد، کم‌ترین مقدار صحیح مجموع $OA + OB + OC$ برابر است با:



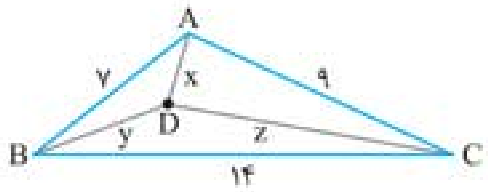
۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

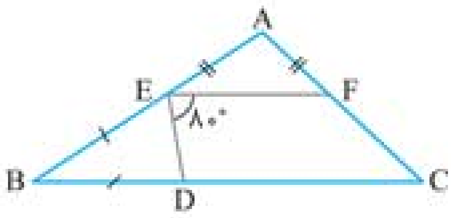
۱۱. در مثلث ABC شکل زیر، بزرگ‌ترین مقدار صحیحی که مجموع $x + y + z$ می‌تواند اختیار کند، کدام است؟



۱) ۲۶ ۲) ۲۹

۳) ۲۲ ۴) ۲۴

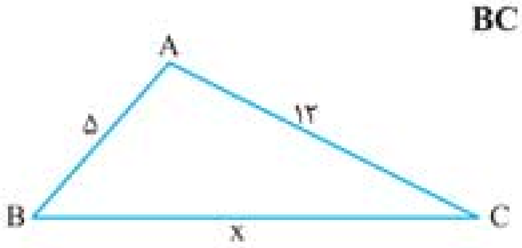
۱۲. در مثلث ABC شکل زیر $AE = AF$ ، $BE = BD$ ، $m(D\hat{E}F) = ۸۰^\circ$ ، مقدار $\hat{C}$ چند درجه است؟



۱) ۵۰ ۲) ۳۵

۳) ۲۰ ۴) ۱۵

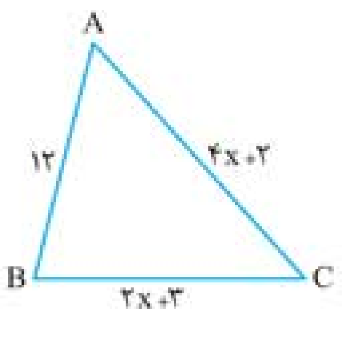
۱۳. در شکل زیر، $AB = ۵cm$ ، $AC = ۱۲cm$ و $m(\hat{A}) > ۹۰^\circ$. بیش‌ترین مقدار صحیحی که $BC = x$ می‌تواند اختیار کند، چقدر است؟



۱) ۱۸ ۲) ۱۶

۳) ۲۰ ۴) ۲۳

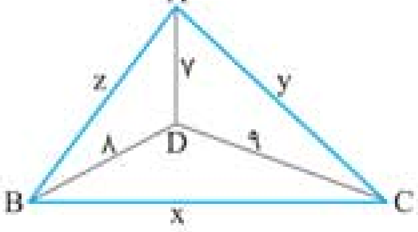
۱۴. در مثلث ABC چنان‌چه $x \in z$ ، $AB = ۱۲cm$ ، $BC = ۲x + ۳cm$ و $AC = ۴x + ۲cm$. بیشترین مقدار صحیح محیط مثلث چند سانتی‌متر است؟



۱) ۴۱ ۲) ۵۰

۳) ۵۳ ۴) ۵۹

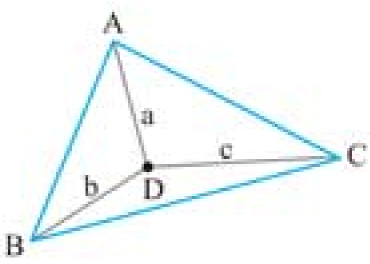
۱۵. در شکل زیر، $AD = ۷cm$ ، $DB = ۸cm$ ، $DC = ۹cm$ ، $AC = y\,cm$ ، $AB = z\,cm$ و $BC = x\,cm$. بیش‌ترین مقدار صحیحی که محیط مثلث ABC می‌تواند اختیار کند، چند سانتی‌متر است؟



۱) ۱۶ ۲) ۱۸

۳) ۴۷ ۴) ۴۸

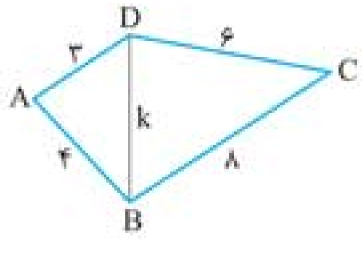
۱۶. در مثلث ABC، $AB + AC + BC = ۳۵$ ، $AD = a\,cm$ ، $BD = b\,cm$ و $CD = c\,cm$. بیش‌تر مقدار صحیحی که $a + b + c$ می‌تواند اختیار کند، چقدر است؟



۱) ۲۱ ۲) ۲۵

۳) ۳۰ ۴) ۳۴

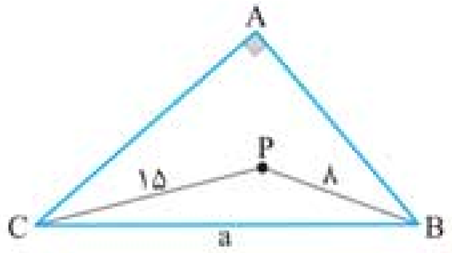
۱۷. در شکل زیر، $AD = ۳cm$ ، $AB = ۴cm$ ، $DC = ۶cm$ ، $BC = ۸cm$ و $BD = k\,cm$. بیش‌ترین مقدار صحیحی که k می‌تواند اختیار کند، چقدر است؟



۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

۱۸. در شکل زیر $m(\hat{A})=90^\circ$، $PB=8$ و $PC=15$. با توجه به شکل و اطلاعات داده‌شده، مجموع مقادیر صحیحی که a اختیار می‌کند، کدام است؟



۱) ۹۸
۲) ۹۹
۳) ۱۰۰
۴) ۱۰۱

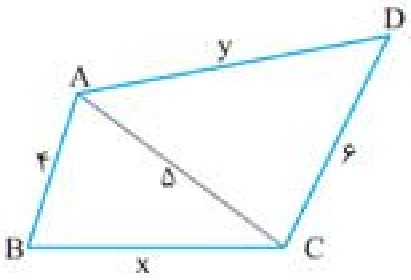
۱۹. در مثلثی به طول اضلاع ۱۳، ۱۳ و ۱۰ واحد، فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی میانه‌ها از دورترین رأس آن کدام است؟ (ریاضی خارج کشور ۸۷)

۱) $4\sqrt{3}$
۲) $6\sqrt{2}$
۳) ۸
۴) ۹

۲۰. مثلثی با معلوم بودن اندازهٔ دو میانه $m_a=9$ و $m_b=12$ و طول $BC=a$ قابل رسم است. اندازهٔ a کدام عدد می‌تواند باشد؟ (ریاضی خارج از کشور ۸۶)

۱) ۱۰
۲) ۹
۳) ۱۵
۴) ۲۲

۲۱. در شکل زیر، $AB=4cm$، $AC=5cm$، $CD=6cm$، $BC=x\,cm$ و $AD=y\,cm$. بیش‌ترین مقدار صحیحی که $y-3x$ می‌تواند اختیار کند، چه‌قدر است؟

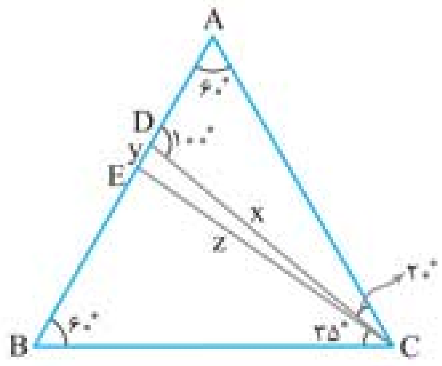


۱) ۲۲
۲) ۲۳
۳) ۲۴
۴) ۲۵

۲۲. اندازهٔ دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۸ و $2\sqrt{11}$ واحد است. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی میانه‌ها از وسط وتر این مثلث کدام است؟ (ریاضی خارج کشور ۸۵)

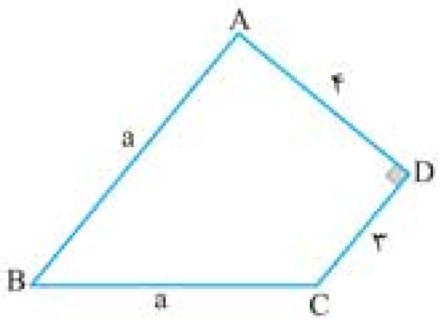
۱) $\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{3}$
۳) ۲
۴) ۳

۲۳. در مثلث ABC داریم: $AB=BC=AC$، $m(A\hat{C}D)=20^\circ$ و $m(E\hat{C}B)=35^\circ$. با توجه به شکل، x، y و z در کدام نامساوی‌ها صدق می‌کنند؟



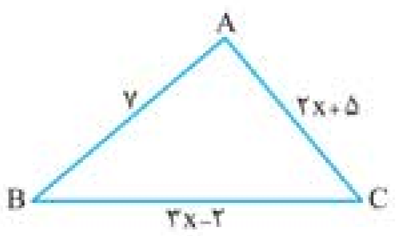
۱) $x<y<z$
۲) $y<z<x$
۳) $x<z<y$
۴) $z<y<x$

۲۴. در شکل زیر، $\overline{AD}\perp\overline{DC}$، $AD=4cm$، $DC=3cm$، $BC=a\,cm$ و $AB=a\,cm$. کم‌ترین مقدار صحیح a کدام است؟



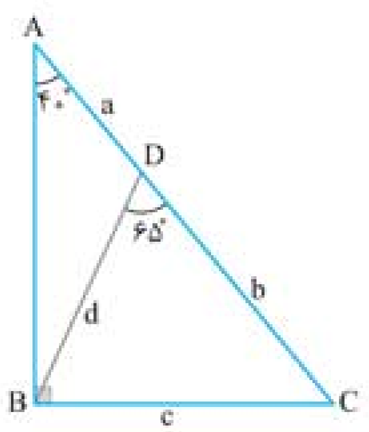
۱) ۱۲
۲) ۱۰
۳) ۵
۴) ۳

۲۵. در مثلث ABC شکل زیر، $AB=7cm$، $AC=2x+5cm$ و $BC=3x-2cm$. بزرگ‌ترین مقدار صحیح x چقدر است؟

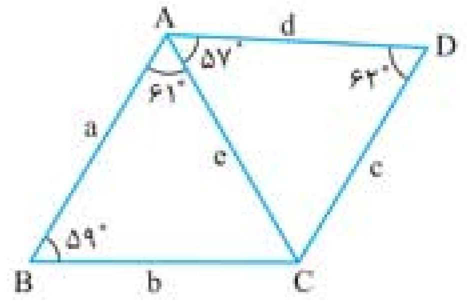


۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۲۶. در مثلث ABC، $\overline{AB}\perp\overline{BC}$، $m(\hat{A})=40^\circ$ و $m(B\hat{D}C)=65^\circ$. با توجه به شکل، کدام نامساوی بین a، b، c و d برقرار است؟



۱) $a>b>c>d$
۲) $b=c>d>a$
۳) $c>a>b=d$
۴) $c=a>b>d$



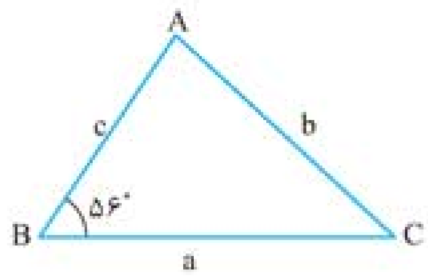
۲۷. با توجه به اطلاعات شکل زیر، طول کدام ضلع از همه بزرگ‌تر است؟

۱) a

۲) b

۳) c

۴) d



۲۸. در مثلث ABC، $m(A\hat{B}C) = ۵۶^\circ$، در شکل زیر کدام‌یک از گزینه‌های زیر غیرممکن است؟

۱) $a > b > c$

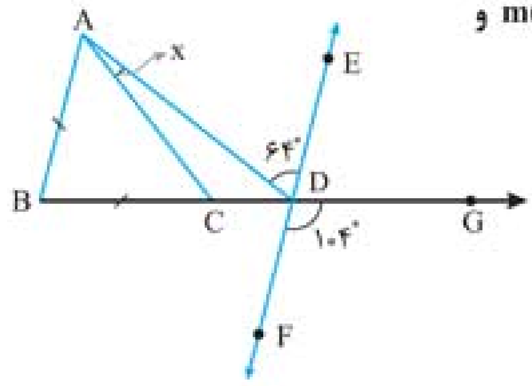
۲) $c > b > a$

۳) $b > c > a$

۴) $b < a < c$

۲۹. اندازهٔ زاویه‌های داخلی مثلث ABC متناسب با ۳، ۴ و ۸ می‌باشند. اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث چند درجه است؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۴ ۳) ۹۰ ۴) ۹۶



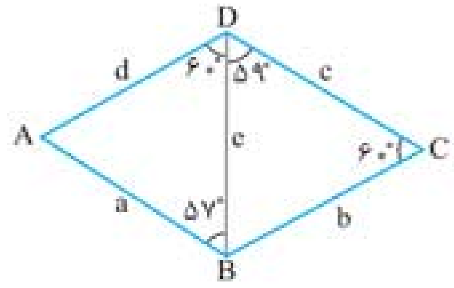
۳۰. در مثلث ABC شکل زیر، $AB = BC$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ، $m(A\hat{D}E) = ۶۴^\circ$ ، $m(F\hat{D}G) = ۱۰۴^\circ$ و $m(C\hat{A}D) = x$ چند درجه است؟

۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۲

۴) ۱۳

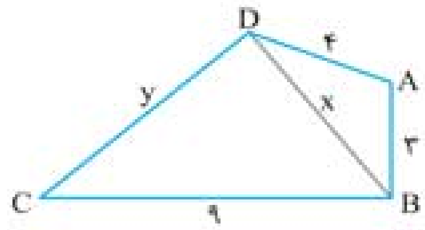


۳۱. در چهارضلعی ABCD، $AD = d$ ، $DC = c$ ، $AB = a$ ، $BC = b$ و $DB = e$، با توجه به شکل کدام‌یک از همه بزرگ‌تر است؟

۱) e ۲) c

۳) a ۴) b

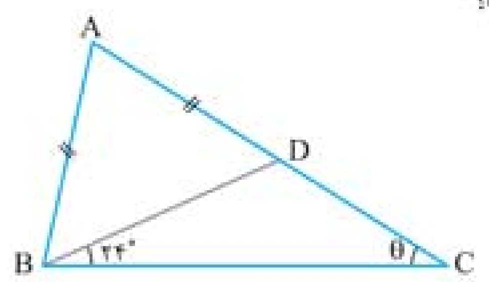
۳۲. در چهارضلعی ABCD شکل زیر، داریم:



$AD = ۴cm$ ، $AB = ۳cm$ ، $BC = ۹cm$ ، $BD = xcm$ ، $DC = ycm$ ، $m(B\hat{A}D) > ۹۰^\circ$ و $x \in z$. با توجه به اطلاعات فوق y کدام‌یک از مقادیر زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۱۱ ۴) ۱۵



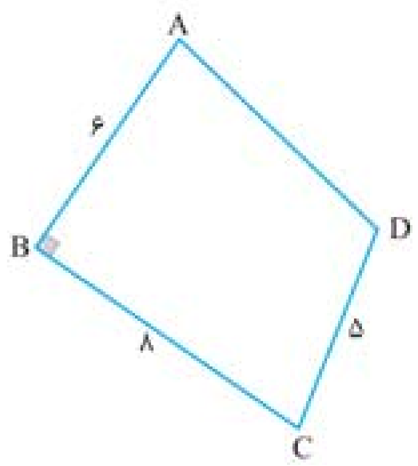
۳۳. در مثلث ABC، $CA = CB$ ، $AD = AB$ ، $m(D\hat{B}C) = ۲۴^\circ$ و $m(A\hat{C}B) = \theta$. مقدار θ چند درجه است؟

۱) ۲۴

۲) ۲۸

۳) ۳۰

۴) ۳۲



۳۴. در چهارضلعی ABCD، $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، $AB = ۶cm$ ، $BC = ۸cm$ و $CD = ۵cm$. با توجه به داده‌ها و شکل، AD کدام مقدار نمی‌تواند باشد؟

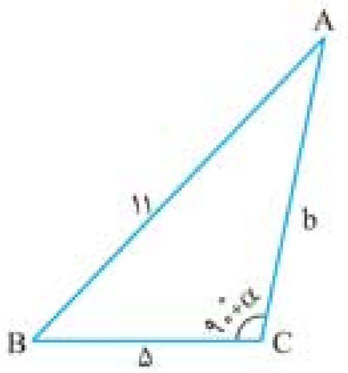
۱) ۵

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۳۵. در مثلث ABC (شکل زیر) $m(\hat{C}) = 90^\circ + \alpha$ ، $AB = 11cm$ ، $BC = 5cm$ ، b چند مقدار صحیح متمایز اختیار می‌کند؟ (α مثبت است.)



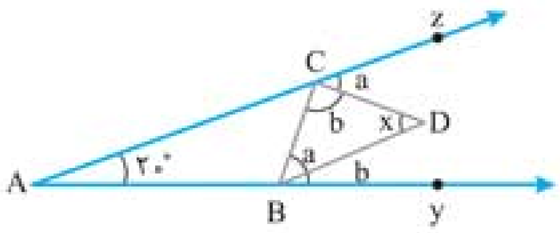
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

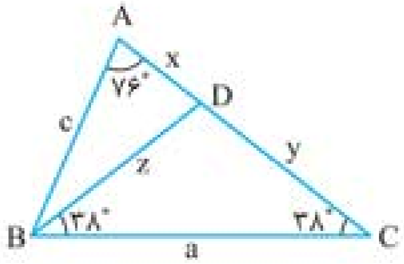
۳۶. اگر $m(C\hat{A}B) = 20^\circ$ و $m(B\hat{D}C) = x$ ، با توجه به شکل زیر مقدار x چند درجه است؟



۱) ۴۰
۲) ۵۰

۳) ۶۵
۴) ۸۰

۳۷. با توجه به شکل زیر و اندازه‌های داده‌شده، کدام گزینهٔ زیر <u>نادرست</u> است؟



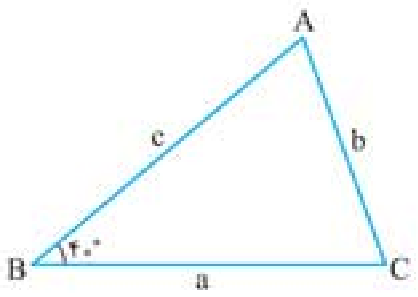
۱) $x + y > c$

۲) $y > x$

۳) $a = x + y$

۴) $a > z$

۳۸. در مثلث ABC، $m(A\hat{B}C) = 40^\circ$ ، $b < c < a$ ، $m(B\hat{A}C)$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟



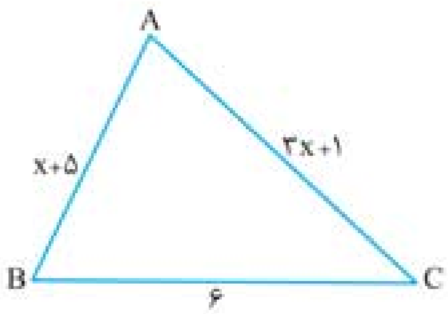
۱) 50°

۲) 70°

۳) 80°

۴) 120°

۳۹. در شکل زیر، با توجه به این‌که x بزرگ‌ترین عدد صحیح است، اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟



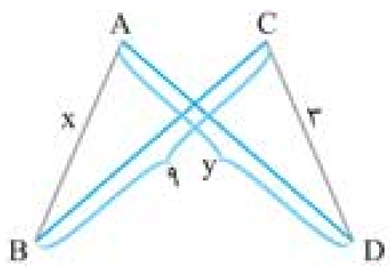
۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۲

۴) ۱۳

۴۰. در شکل زیر $BC = 9cm$ ، $CD = 3cm$ ، $AB = x\,cm$ و $AD = y\,cm$. با توجه به شکل زیر و اطلاعات داده‌شده، کوچک‌ترین مقدار صحیح مجموع $x + y$ کدام است؟



۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

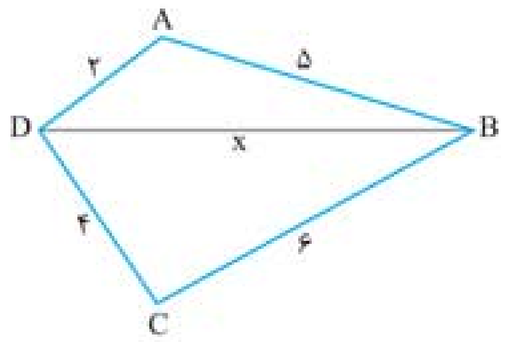
۴) ۹

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

۱.	۲	۸.	۴	۱۵.	۳	۲۲.	۲	۲۹.	۴	۳۶.	۴
۲.	۱	۹.	۱	۱۶.	۴	۲۳.	۲	۳۰.	۳	۳۷.	۳
۳.	۲	۱۰.	۳	۱۷.	۴	۲۴.	۴	۳۱.	۲	۳۸.	۳
۴.	۴	۱۱.	۲	۱۸.	۳	۲۵.	۲	۳۲.	۴	۳۹.	۴
۵.	۳	۱۲.	۳	۱۹.	۳	۲۶.	۲	۳۳.	۲	۴۰.	۲
۶.	۳	۱۳.	۲	۲۰.	۳	۲۷.	۲	۳۴.	۱		
۷.	۱	۱۴.	۳	۲۱.	۴	۲۸.	۳	۳۵.	۳		

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱.

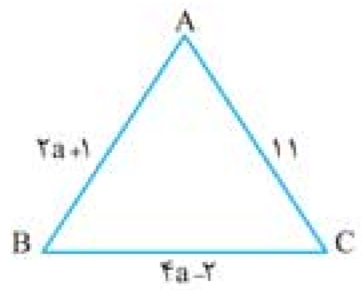


$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABD}:|۵-۲|<x<۵+۲\\ \text{و}\\ \overset{\triangle}{BCD}:|۶-۴|<x<۶+۴\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}۳<x<۷\\ \text{و}\\ ۲<x<۱۰\end{array}$$

$\Rightarrow ۳<x<۷ \;,\; x\in\{۴,۵,۶\}$ مجموعه‌مقادیر صحیح x

$۴+۵+۶=۱۵$

۲.

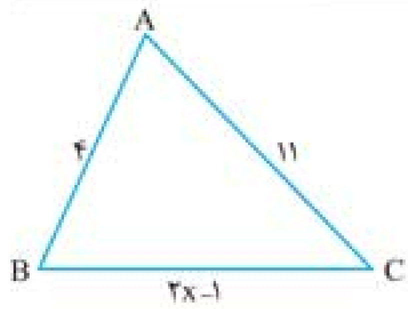


$$\begin{cases}AC<AB+BC\\ AC>|BC-AB|\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}۱۱<(۲a+۱)+(۴a-۲)\\ ۱۱>|۴a-۲-۲a-۱|\end{array}$$

$$\begin{cases}۱۱<۶a-۱\\ ۱۱>|۲a-۳|\end{cases}\xrightarrow{۲a-۳\geq ۰}\begin{cases}۶a>۱۲\\ ۱۱>|۲a-۳|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>۲\\ ۱۱>۲a-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>۲\\ ۱۴>۲a\end{cases}$$

$۲<a<۷\Rightarrow a\in\{۳,۴,۵,۶\}\;,\;۳+۴+۵+۶=۱۸$

۳.



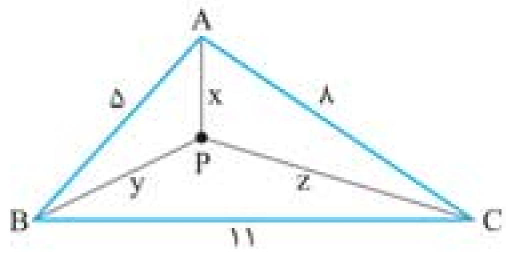
$\overset{\triangle}{ABC}:|AB-AC|<BC<AB+AC$

$|۴-۱۱|<۲x-۱<۴+۱۱$

$۷<۲x-۱<۱۵\Rightarrow ۸<۲x<۱۶\Rightarrow ۴<x<۸$

مقادیر صحیحی که x می‌تواند اختیار کند عبارتند از: ۵، ۶ و ۷ و کم‌ترین آن‌ها ۵ است.

۴.

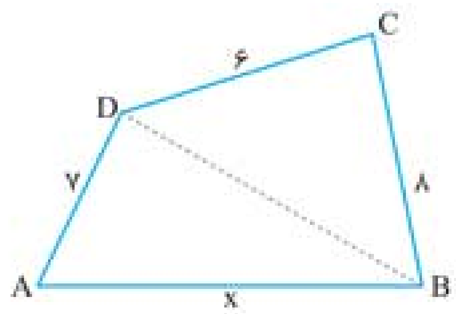


$$\frac{AB+AC+BC}{۲}<PA+PB+PC<AB+AC+BC$$

$$\Rightarrow\frac{۵+۸+۱۱}{۲}<x+y+z<۵+۸+۱۱\Rightarrow ۱۲<x+y+z<۲۴$$

$x+y+z$ کم‌ترین مقدار صحیح مجموع $=۱۳$

۵.



$AB=x<AD+DC+CB\Rightarrow x<۷+۶+۸=۲۱$

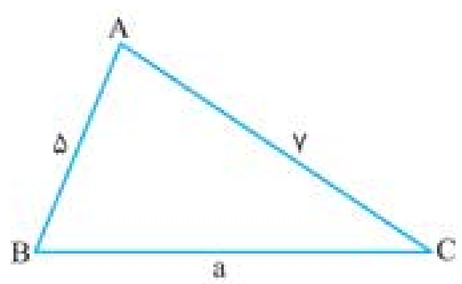
x بزرگ‌ترین مقدار صحیح $=۲۰$

اثبات نامساوی که نوشته‌ایم

$$\begin{cases}x<AD+DB & \text{در } \overset{\triangle}{ABD} \text{ داریم:}\\ \underline{DB<DC+CB} & \text{در } \overset{\triangle}{BCD} \text{ داریم:}\end{cases}$$ طرفین دو نامساوی را جمع می‌کنیم

$x<AD+DC+CB$

۶.



$m(\hat{A})>m(\hat{B})\Rightarrow BC>AC$

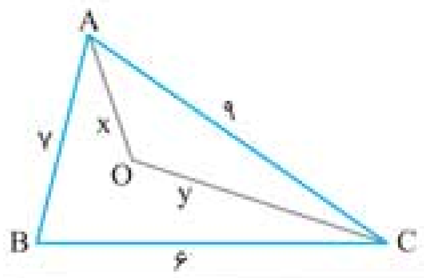
$BC>AC\Rightarrow a>۷$

$BC<AC+AB\Rightarrow a<۷+۵=۱۲$

بنابراین: $۷<a<۱۲$

با توجه به گزینه‌ها $a=۱۰$ مورد قبول است.

۷.



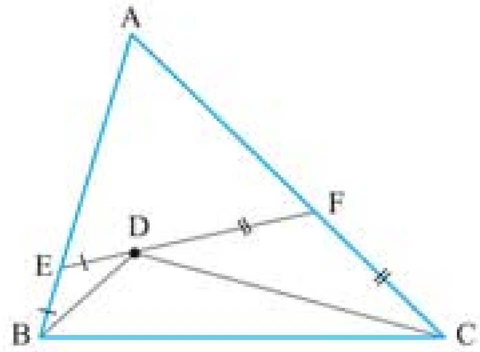
$AC < OA + OC < AB + BC$

$۹ < x + y < ۷ + ۶$

مجموعه مقادیر صحیح $x+y$: $۹ < x + y < ۱۳ \Rightarrow x + y \in \{۱۰,۱۱,۱۲\}$

$\Rightarrow$ کم‌ترین مقدار صحیح مجموع $x + y = ۱۰$

۸.

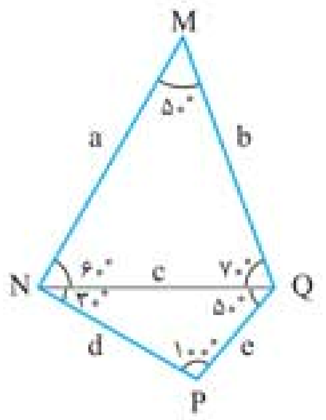


محیط مثلث $AEF = AE + EF + AF = (AE + \underbrace{ED}_{=EB}) + (\underbrace{DF}_{=FC} + AF) =$

$= (AE + EB) + (FC + AF) = (AB) + (AC) = ۶ + ۹ = ۱۵cm$

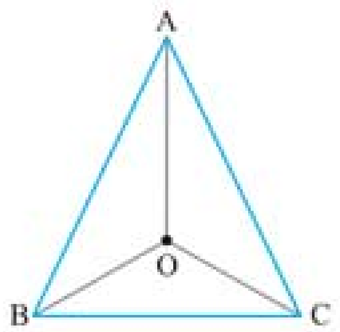
محیط مثلث $AEF = ۱۵cm$

۹.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{MNQ}: ۷۰^\circ > ۵۰^\circ \Rightarrow a > c \\ \text{و} \\ \overset{\triangle}{PNQ}: ۱۰۰^\circ > ۳۰^\circ \Rightarrow c > e \end{array}\right\} \Rightarrow a > c > e$$

۱۰.

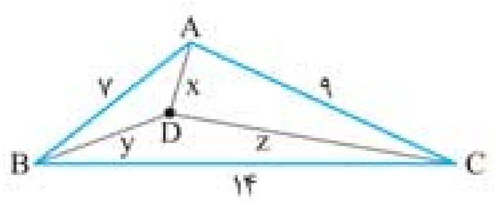


محیط مثلث $ABC = AB + AC + BC = ۱۶cm$

$$\frac{AB + AC + BC}{۲} < OA + OB + OC < AB + AC + BC$$

$۸ < OA + OB + OC < ۱۶ \Rightarrow$ کم‌ترین مقدار صحیح مجموع $OA + OB + OC = ۹$

۱۱.



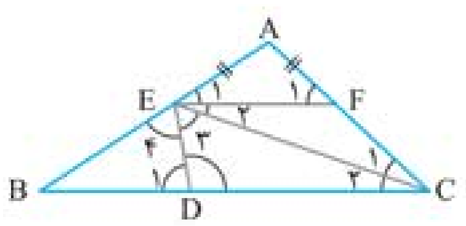
$$\frac{AB + AC + BC}{۲} < DA + DB + DC < AB + AC + BC$$

$$\frac{۷ + ۹ + ۱۴}{۲} < x + y + z < ۷ + ۹ + ۱۴$$

$۱۵ < x + y + z < ۳۰$

بیش‌ترین مقدار صحیح مجموع $x + y + z = ۲۹$

۱۲.



(در $\overset{\triangle}{EFC}$، اندازهٔ زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن)

$m(\hat{E}_۱) = m(\hat{F}_۱) = m(\hat{C}_۱) + m(\hat{E}_۲)$

$m(\hat{E}_۱) = m(\hat{F}_۱) = m(\hat{C}_۱) + m(\hat{E}_۲)$

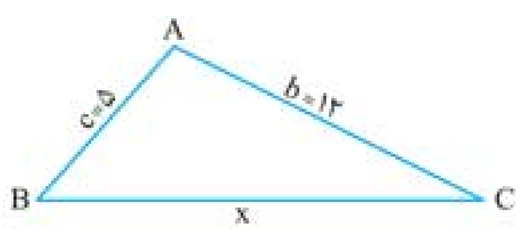
$m(\hat{E}_۴) = m(\hat{D}_۱) = m(\hat{C}_۲) + m(\hat{E}_۳)$

جمع

$(m(\hat{E}_۱) + m(\hat{E}_۴)) = (m(\hat{C}_۱) + m(\hat{C}_۲)) + (m(\hat{E}_۲) + m(\hat{E}_۳))$

$۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = m(\hat{C}) + ۸۰^\circ \Rightarrow m(\hat{C}) = ۲۰^\circ$

۱۳.



$m(\hat{A}) > ۹۰^\circ \Rightarrow \sqrt{b^۲ + c^۲} < a < b + c$

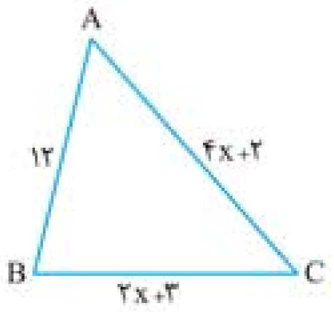
$\sqrt{۱۲^۲ + ۵^۲} < x = a < ۱۲ + ۵ \Rightarrow \sqrt{۱۶۹} < x < ۱۷$

$۱۳ < x < ۱۷ \Rightarrow$ بیشترین مقدار $x = ۱۶$

بیش‌ترین مقدار صحیح $x = ۱۶$

۱۴. ۱ ۲ ۴

در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کم‌تر است.



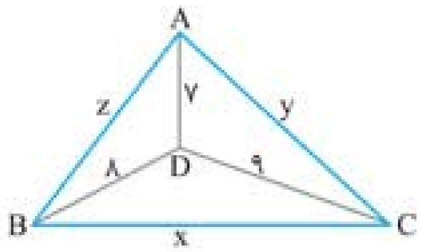
$$\begin{cases} ۱۲<(۴x+۲)+(۲x+۳) \\ ۴x+۲<۱۲+(۲x+۳) \\ ۲x+۳<(۴x+۲)+۱۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۷<۶x \\ ۲x<۱۳ \\ -۱۱<۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{۷}{۶} \\ x<\frac{۱۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۷}{۶}<x<\frac{۱۳}{۲}$$

مجموعه مقادیر صحیح x $=\{۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow$ بیش‌ترین مقدار صحیح x $=۶$

بیش‌ترین مقدار محیط مثلث $=(۱۲)+(۴\times۶+۲)+(۲\times۶+۳)=۱۲+۲۶+۱۵=۵۳cm$

۱۵. ۱ ۲ ۴



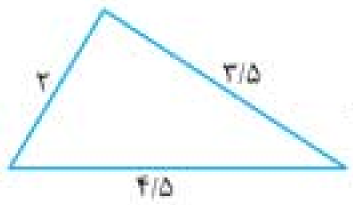
$$\frac{BC+AC+AB}{۲}<DA+DB+DC<BC+AC+AB$$

$$\frac{x+y+z}{۲}<\underbrace{۷+۸+۹}_{۲۴}<x+y+z$$

$x+y+z<۴۸$ (یعنی محیط مثلث) بیش‌ترین مقدار صحیح $x+y+z=۴۷$

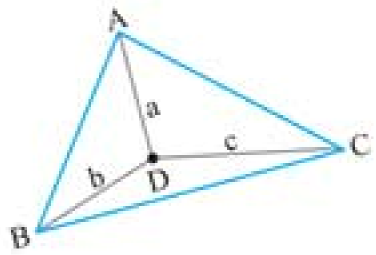
توجه: محیط، مقدار صحیح باشد، یا ضلع‌ها مقدار صحیح باشد با هم تفاوت دارد. وقتی ضلع‌ها مقدار صحیح باشد، محیط حتماً مقدار صحیح است. اما وقتی محیط مقدار صحیح باشد، لزومی ندارد طول ضلع‌ها صحیح باشد.

مثلاً در شکل محیط $=۲+۳/۵+۴/۵=۱۰$



که مقدار محیط صحیح است ولی طول همهٔ ضلع‌ها صحیح نیست.

۱۶. ۱ ۲ ۳



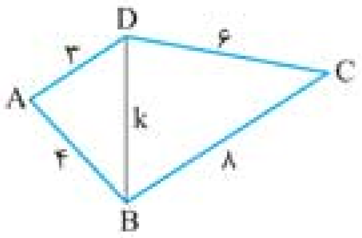
$$\frac{AB+AC+BC}{۲}<DA+DB+DC<AB+AC+BC$$

$$\frac{۳۵}{۲}<a+b+c<۳۵$$

$a+b+c<۳۵$ ، بیش‌ترین مقدار صحیحی که $a+b+c$ اختیار می‌کند $=۳۴$

۱۷. ۱ ۲ ۳

در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کم‌تر و از قدرمطلق تفاضل آن دو ضلع بیش‌تر است.

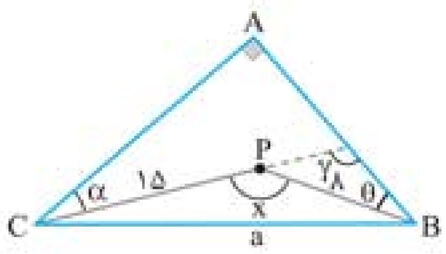


$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABD}: |۴-۳|<k<۳+۴=۷ \\ \text{و} \\ \overset{\triangle}{BCD}: |۸-۶|<k<۸+۶=۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱<k<۷ \\ \text{و} \\ ۲<k<۱۴ \end{cases} \Rightarrow ۲<k<۷$$

بیش‌ترین مقدار صحیح k $=۶$

۱۸. ۱ ۲ ۴

فرض کنیم:



$m(A\hat{B}P)=\theta\ ,\ m(A\hat{C}P)=\alpha$

$m(B\hat{P}C)=x$

$x=\theta+\gamma=\theta+۹۰^\circ+\alpha \Rightarrow x>۹۰^\circ$

$\sqrt{۱۵^۲+۸^۲}<a<۱۵+۸ \Rightarrow \sqrt{۲۸۹}<a<۲۳$

$۱۷<a<۲۳$

عدد صحیح است $a \in \{۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲\}$

مجموع مقادیر صحیح a $=۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲=۱۰۰$