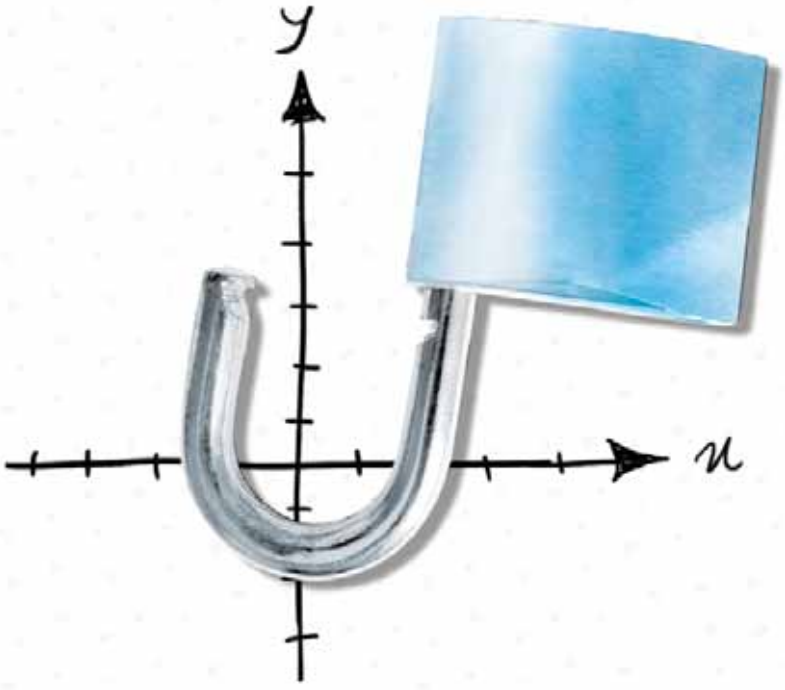
فصل اوّل

هندسه تحلیلی و جبر

فصلی که می‌بینید جعبه ابزاریه برای استفاده در بقیهٔ مباحث ریاضی.
این فصل با هندسه تحلیلی شروع می‌شه (که قبلاً تو کتاب سال چهارم بود). کلی مطالب جدید راجع به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو تو این بخش یاد می‌گیری. بعد وارد تابع و معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شه؛ همون سهمی پارسال! ولی این دفعه هم سوال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تر می‌شه. آخرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسه. این بحث تا آخرین دقایقی که ریاضی می‌خونید، دست از سرتون برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.
در کنکورهای دوره گذشته به طور معمول از این مبحث‌ها، بین دو تا سه تست آورده شده!



یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم معادلهٔ خط، شیب، عرض از مبداء، تابع خطی و... آشنا شدید. در این بخش به طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

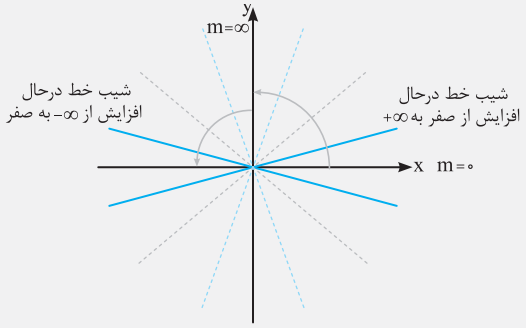
شیب: تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارتند از:

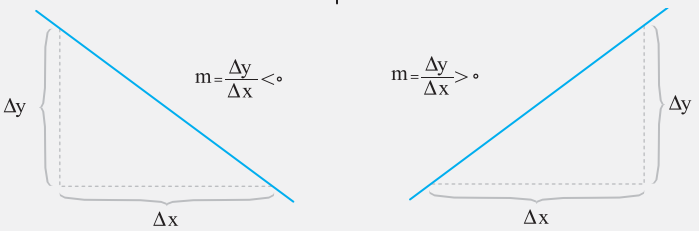
الف: در معادلهٔ $y=ax+b$ مقدار a را **شیب خط** می‌نامند.

ب: در معادلهٔ $ax+by+c=0$، **شیب** برابر $-\frac{a}{b}$ است.

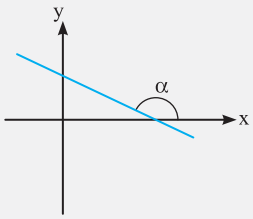
پ: میزان تغییرات y به تغییرات x که برابر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ است را **شیب خط** می‌گویند.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$





ت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، **شیب خط** است.



$$\tan\alpha=m$$

معادلهٔ خط

◄ برای به‌دست آوردن معادله خط، دو روش داریم:

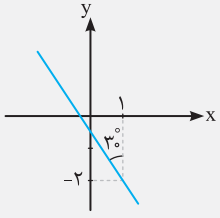
۱ **با داشتن شیب و یک نقطه:** معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از: $y-y_0=m(x-x_0)$

۲ **با داشتن دو نقطه:** هرگاه دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_0,y_0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک رابطهٔ **شیب** $m_{AB}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ خط گذرا از نقاط A و B را بیابیم و به کمک معادلهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$، ضابطهٔ خط را بیابیم.

نکته

معادلهٔ خط $y=ax+b$ را فرض نمود و با جای‌گذاری دو نقطهٔ (x_0,y_0) و (x_1,y_1) و تشکیل دستگاه، می‌توان a و b را یافت. به این ترتیب ضابطهٔ $y=ax+b$ به دست می‌آید.

مثال: عرض از مبداء خط مقابل کدام است؟



1) $-2\sqrt{2}+1$ 2) $\sqrt{3}-2$

3) $1-2\sqrt{3}$ 4) $2-2\sqrt{2}$

پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ساخته‌شده، یک زاویه 30 درجه است، بنابراین زاویهٔ دیگر 60 درجه است و می‌توان نتیجه گرفت، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها 120 درجه است.

تانژانت 120 درجه، شیب خط مفروض است.

$$m=\tan 120^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

تذکر: تانژانت‌های دو زاویهٔ مکمل قرینهٔ یک‌دیگرند.

مهروماه

با داشتن شیب $m=-\sqrt{3}$ و نقطهٔ $(1,-2)$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y+2=-\sqrt{3}(x-1)\Rightarrow y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}-2$$

پس گزینهٔ «2» درست است.

مثال: خط گذرنده از دو نقطهٔ $(1,3)$ و $(2,7)$ محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

1) $-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{5}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $-\frac{1}{5}$

پاسخ: فرض می‌کنیم معادلهٔ خط، $y=ax+b$ است. نقاط داده‌شده را در خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}(1,3)\to y=ax+b\Rightarrow 3=a(1)+b\\(2,7)\to y=ax+b\Rightarrow 7=a(2)+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\2a+b=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=-1\end{cases}$$

یعنی معادلهٔ خط $y=4x-1$ است.

این خط جایی محور طول‌ها را قطع می‌کند که $y=0$ شود.

$$0=4x-1\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

پس گزینهٔ «3» درست است.

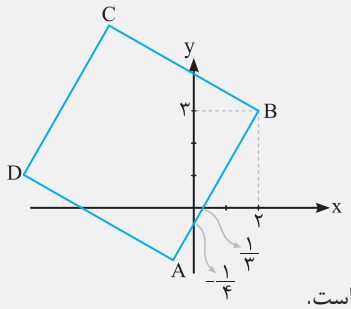
شیب‌های دو خط موازی و دو خط عمود بر هم

۱) دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند، یعنی اگر شیب‌های دو خط موازی m و m' باشند، باید $m=m'$ باشد.

۲) حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم، برابر -1 است، یعنی $mm'=-1$ است.

دقت کنید رابطهٔ $mm'=-1$ برای دو خط غیرموازی با محورهای مختصات برقرار است.

مثال: اگر معادلهٔ ضلع AB در مستطیل شکل زیر $3x-4y=-6$ باشد،



عرض از مبداء خط BC کدام است؟

1) $\frac{11}{2}$ 2) $\frac{14}{3}$ 3) $\frac{15}{2}$ 4) $\frac{17}{3}$

پاسخ: ضلع BC بر ضلع AB عمود است، پس شیب BC عکس و قرینهٔ شیب AB است.

$$AB: 3x-4y=-6\Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\Rightarrow m_{AB}=\frac{3}{4}$$

حال شیب BC را می‌یابیم:

$$m_{BC}.m_{AB}=-1\Rightarrow m_{BC}\times\frac{3}{4}=-1\Rightarrow m_{BC}=-\frac{4}{3}$$

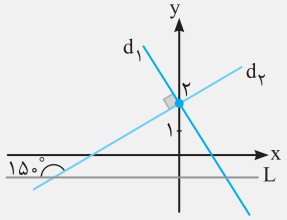
به کمک مختصات نقطهٔ $B(2,3)$ و شیب $m=-\frac{4}{3}$، معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم.

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-3=-\frac{4}{3}(x-2)\Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$$

عرض از مبداء این خط $\frac{17}{3}$ است.

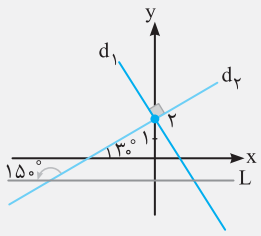
پس گزینهٔ «4» درست است.

مثال: با توجه به شکل زیر، اگر خط L موازی محور xها رسم شده باشد، خط d_1 در کدام نقطه، محور طول‌ها را قطع می‌کند؟



1) $\sqrt{3}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: خط با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ 30 درجه می‌سازد، پس شیب آن $\tan 30^\circ$ یعنی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.



چون خط d_1 بر خط d_2 عمود است، بنابراین شیب خط d_1 عکس و قرینهٔ شیب خط d_2 است.

$$d_2 : m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

عرض از مبداء این خط $+2$ است.

معادلهٔ خط d_1 برابر $y = -\sqrt{3}x + 2$ است.

برای یافتن محل برخورد این خط با محور طول‌ها، باید عرض آن را صفر بگذاریم:

$$y = -\sqrt{3}x + 2 \to 0 = -\sqrt{3}x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

پس گزینهٔ «4» درست است.

1. معادلهٔ خط گذرا به دو نقطهٔ $A(3,0)$ و $B(0,-2)$ کدام است؟

1) $2x - 3y - 6 = 0$ 2) $2x + 3y + 6 = 0$ 3) $2x + 3y - 6 = 0$ 4) $2x - 3y + 6 = 0$

2. به ازای کدام مقادیر m نقاط $(m,3)$، $(6,4m+1)$ و مبداء مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

1) -2 و $\frac{9}{4}$ 2) -2 و $\frac{3}{4}$ 3) -2 و $-\frac{3}{4}$ 4) 2 و $-\frac{9}{4}$

3. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ محل برخورد دو خط $y = 2x$ و $y = \frac{x}{2}$، بر خط $y = -x + 4$ عمود است. معادلهٔ آن خط کدام است؟

1) $y = x$ 2) $y = -x$ 3) $y = x + 1$ 4) $y = -x + 1$

4. خطی که از نقاط متمایز $A(m,-1)$ و $B(1,1-2m)$ می‌گذرد، محور yها را در نقطه‌ای به عرض 3 قطع کرده است. این خط محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

1) -2 2) 1 3) $-1/5$ 4) $-2/5$

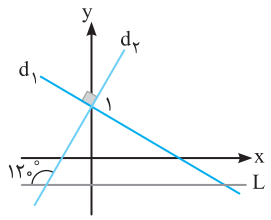
5. یکی از خطوط به معادلهٔ $(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(2,-1)$ و $B(8,3)$ عمود است. معادلهٔ این خط کدام است؟

1) $2y + 3x = 4$ 2) $2y + 3x = 1$ 3) $2y - 3x = -5$ 4) $3y - 2x = -5$

6. در مثلثی با رئوس $A(-1,-4)$، $B(-5,6)$ و $C(3,2)$ معادلهٔ ارتفاع AH کدام است؟

1) $y = 2x - 2$ 2) $2y + x + 9 = 0$ 3) $y = 4x$ 4) $y = -2x - 6$

7. در شکل زیر خط d_1 عمود بر خط d_2 است و خط L موازی محور xها رسم شده است. خط d_1 در کدام نقطه، محور طول‌ها را قطع می‌کند؟



1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) 2

8. اگر $A(-1,2)$، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟

1) $y = -x - 3$ 2) $y = -x + 1$ 3) $y = -2x$ 4) $y = x + 3$

9. نقاط $A(2,5)$، $B(3,-1)$ و $C(0,2)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

1) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 2) $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ 3) $(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ 4) $(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$

10. معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$، $y = 2x$ و $x = 1$ است، معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟ (کنکور زیرخاکی)

1) $y = \frac{2}{3}$ 2) $x = \frac{2}{3}$ 3) $y + x = \frac{2}{3}$ 4) $y + x = \frac{1}{3}$

مهروماه

11. دو نقطهٔ A و B به طول‌های $x_A=1$ و $x_B=2$ روی خط $y=4x-3$ قرار دارند. اگر تصاویر A و B روی محور xها C و D باشند، مساحت ذوزنقهٔ ABCD چقدر است؟

1) 3 2) 2 3) 5 4) 4

12. دو نقطهٔ M و M' روی محور طول‌ها وجود دارند که اگر $A(1,-2)$ و $B(3,2)$ باشند، زاویه‌های $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}'B$ قائمه می‌شود. حاصل‌ضرب طول نقاط M و M' کدام است؟

1) 1 2) -1 3) 2 4) -2

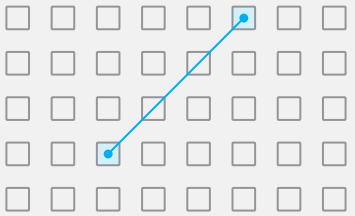
فاصلهٔ دو نقطه

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید.

$$d=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

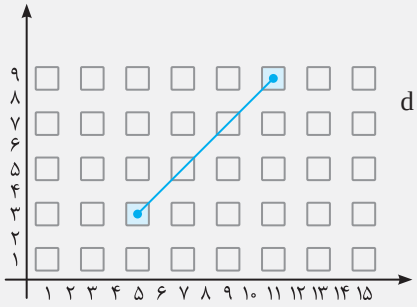
و فاصلهٔ هر نقطه مانند $A(x_A,y_A)$ از مبداء برابر $OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}$ است.

مثال: در یک کلاس، پنج ردیف 8 نفره نیمکت مطابق شکل چیده شده است. اگر ابعاد طول و عرض هر نیمکت را 50 سانتی‌متر در نظر بگیریم، فاصلهٔ مرکز نیمکت ردیف 2، شمارهٔ 3 با مرکز نیمکت ردیف 5، شمارهٔ 6 کدام است؟ (فضای خالی بین دو نیمکت نیز به اندازهٔ یک نیمکت است.)



1) $50\sqrt{18}$ 2) $25\sqrt{18}$
3) $25\sqrt{85}$ 4) $50\sqrt{72}$

پاسخ:



می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ (5,3) را از نقطهٔ (11,9) بیابیم:

$$d=\sqrt{(11-5)^2+(9-3)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$$

چون ابعاد هر نیمکت 50cm است فاصلهٔ واقعی $50\times\sqrt{72}$ می‌باشد.

پس گزینهٔ «4» درست است.

نقطهٔ وسط پاره‌خط

مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB با مختصات نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با:

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$$

مثال: اگر سه نقطهٔ $A(-1,0)$، $B(3,4)$ و $C(2,5)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول میانهٔ CM کدام است؟

1) 3 2) $\sqrt{10}$ 3) $\sqrt{11}$ 4) $\sqrt{12}$

پاسخ: ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط AB را می‌یابیم:

$$M\left(\frac{3-1}{2},\frac{4+0}{2}\right)=M(1,2)$$

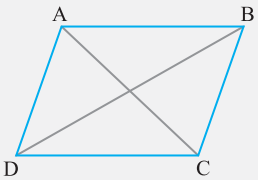
حال طول پاره‌خط CM را می‌یابیم:

$$CM=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}=\sqrt{(1-2)^2+(2-5)^2}=\sqrt{10}$$

پس گزینهٔ «2» درست است.

رابطهٔ بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع

در هر متوازی‌الاضلاع ABCD، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابرند.



$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

13. اگر نقاط $A(1,2)$، $B(3,7)$، $C(4,5)$ و $D(m+1,n-1)$ مختصات چهار رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، حاصل $m.n$ کدام است؟

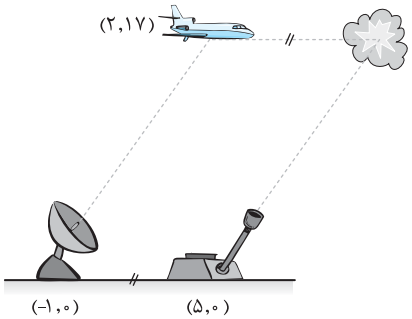
1) -1 2) 2 3) 1 4) 3

14. نقاط $A(0,-1)$، $B(3,2)$ و $C(-2,1)$ سه رأس یک مثلث هستند. نوع مثلث کدام است؟

1) قائم‌الزاویه 2) متساوی‌الساقین

3) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین 4) نامشخص

15. مطابق شکل اگر هواپیما، رادار و ضدهوایی در یک صفحه باشند، ضدهوایی به کدام مختصات شلیک کند تا هواپیما شکار شود؟



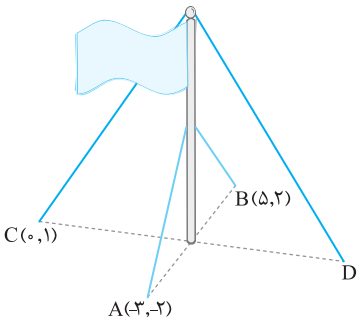
1) $(8,17)$

2) $(5,17)$

3) $(17,5)$

4) $(17,8)$

16. یک میلهٔ پرچم، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری‌که فاصلهٔ هر نقطه تا میله با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله برابر است. مختصات نقطهٔ D کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



1) $(2,-1)$

2) $(-1,2)$

3) $(3,-2)$

4) $(-2,3)$

17. نقطهٔ $(7,6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y-3x=11$ و $3y+4x=8$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (تجربی 90)

1) $(1,5)$ 2) $(3,4)$ 3) $(3,5)$ 4) $(4,3)$

18. مثلثی با رئوس $A(2,6)$، $B(-2,5)$ و $C(2,3)$ مفروض است. طول میانهٔ AM کدام است؟

1) 2 2) $2\sqrt{2}$ 3) 4 4) 8

19. در مثلثی با رئوس $A(4,3)$، $B(2,0)$ و $C(6,-1)$ معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC کدام است؟

1) $3y=x-2$ 2) $x=4$ 3) $y=3$ 4) $-y=3x-6$

20. نقاط $A(1,0)$، $B(4,2)$ و $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی‌الساقین است؟

1) -3 2) -2 3) 2 4) 3

21. دو نقطه روی نیم‌ساز ربع اول و سوم داریم که از نقطهٔ $A(1,2)$ به فاصلهٔ 2 هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

فاصلهٔ نقطه از خط

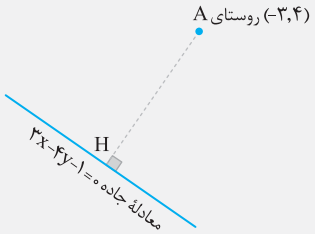
◄ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر $AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است.

نکته

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط عمودی $x=K$ برابر $|K-x_0|$ و از خط افقی $y=K'$ برابر $|K'-y_0|$ است.

مثال: می‌خواهیم از یک روستا که در مختصات $(-3,4)$ قرار دارد یک راه آسفالت به جاده‌ای به معادلهٔ $3x-4y-1=0$ احداث کنیم. اگر واحدهای مختصات برحسب کیلومتر باشد و هزینهٔ احداث هر کیلومتر جاده 100 میلیون تومان باشد، حداقل هزینه احداث جاده کدام است؟

1) 520 میلیون
2) 540 میلیون
3) 560 میلیون
4) 580 میلیون



پاسخ:

کوتاه‌ترین فاصله، خط عمود AH است.

$$AH=\frac{|3x_A-4y_A-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3(-3)-4(4)-1|}{\sqrt{25}}=\frac{26}{5}$$

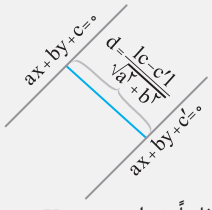
طول جاده $\frac{26}{5}$ کیلومتر است و برای احداث این جاده $\frac{26}{5}\times 100=520$ میلیون باید هزینه نمود.

پس گزینهٔ «1» درست است.

فاصلهٔ دو خط موازی

◄ فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

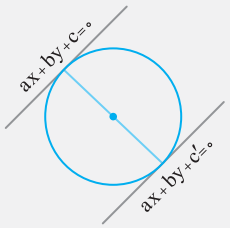


◄ دقت کنید که قبل از استفاده از این فرمول اولاً باید همهٔ بخش‌های معادله به سمت چپ منتقل شوند و ثانیاً ضرایب x و y در دو معادله باید برابر باشند و در صورت لزوم باید با ضرب و تقسیم یک یا چند عدد در معادلات، ضرایب را یکسان نمود.

مثال: دایره‌ای بر دو خط $y-2x+1=0$ و $2y-4x=-7$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

1) $\sqrt{5}$
2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
3) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
4) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

پاسخ: ابتدا در ضابطهٔ $2y-4x=-7$ عدد -7 را به سمت چپ منتقل می‌کنیم و سپس طرفین را بر 2 تقسیم می‌کنیم تا ضرایب در دو معادله یکسان شوند.



$$\begin{cases} y-2x+1=0 \\ y-2x+\frac{7}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow 2R=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|\frac{7}{2}-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

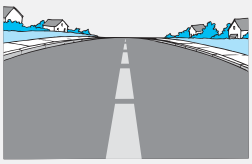
$$\Rightarrow 2R=\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

پس گزینهٔ «3» درست است.

معادلهٔ خط وسط دو خط موازی

◄ مجموعه نقاطی که از دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ فاصله‌ای برابر دارند. بر روی خطی موازی دو خط قبلی به معادلهٔ $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$ قرار دارند.

مثال: اگر معادلهٔ جدول‌های کنار خیابانی مستقیم $2x+3y-1=0$ و $4x+6y+5=0$ باشند، معادلهٔ خط‌چین وسط خیابان کدام است؟



1) $2x-3y-\frac{1}{4}=0$ 2) $2x+3y-\frac{3}{4}=0$

3) $2x+3y+\frac{3}{4}=0$ 4) $2x-3y+\frac{1}{4}=0$

پاسخ: خط‌چین وسط خیابان دقیقاً خطی موازی وسط امتداد دو جدول طرفین خیابان است، پس می‌توان پس از یکسان کردن ضرایب معادلات جدول‌ها، معادله خط‌چین را پیدا کرد:

$$\begin{cases}2x+3y-1=0\\4x+6y+5=0\end{cases}\xrightarrow{\div 2}\begin{cases}2x+3y-1=0\\2x+3y+\frac{5}{2}=0\end{cases}\xrightarrow{\text{میانگین}}2x+3y+\frac{-1+\frac{5}{2}}{2}=0$$

$$2x+3y+\frac{3}{4}=0$$

پس گزینهٔ «3» درست است.

22. نقطهٔ C با کدام طول روی خط $y=2x-3$ باشد تا فاصلهٔ آن از نقاط $A(1,2)$ و $B(2,0)$ یکسان باشد؟

1) $\frac{5}{3}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{22}{13}$ 4) $\frac{13}{6}$

23. اگر $A(-1,2)$ و $B(3,4)$ باشند، معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB کدام است؟

1) $y=2x-5$ 2) $y=-2x+5$ 3) $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 4) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

24. یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات آن‌ها در نقشه به صورت $E(3,10)$ و $F(7,2)$ است. هدف آن است که هر دانش‌آموز در نزدیک‌ترین مدرسه نسبت به خانهٔ خود ثبت‌نام کند. معادلهٔ خطی که روستا را با این هدف به دو قسمت تقسیم می‌کند کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

1) $y=2x-4$ 2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ 3) $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ 4) $y=-2x+4$

25. مساحت مثلثی به رأس‌های $A(2,5)$، $B(3,0)$ و $C(0,2)$ کدام است؟ (تجربی خارج 92)

1) 6 2) 6/5 3) 7 4) 7/5

26. مساحت مثلثی با سه رأس $B(5,2)$، $A(4,0)$ و $C(-1,2)$ کدام است؟

1) $\frac{13}{2}$ 2) 6 3) $\frac{11}{2}$ 4) 5

27. اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,2)$ از خط $3x+my-1=0$ برابر 2 باشد، m کدام است؟

1) $m=-4$ 2) $m=4$ 3) $m=1$ 4) $m=-1$

28. یک رأس مربع، نقطهٔ $A(2,-1)$ و یک ضلع آن واقع بر خط $3x+4y=1$ است. مساحت مربع کدام است؟

1) 0/05 2) 0/25 3) 0/01 4) 0/04

29. معادلهٔ ضلع مربعی $3x-4y=7$ است. اگر $A(1,2)$ یک رأس آن باشد، محیط مربع کدام است؟

1) 12 2) $\frac{12}{5}$ 3) $\frac{144}{25}$ 4) $\frac{48}{5}$

30. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $x-3y=4$ و $3x+y=1$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(2,1)$ است. مساحت این مستطیل چقدر است؟

1) 4/8 2) 4 3) 3/5 4) 3

31. معادلهٔ قطر مربعی به صورت $5x+12y-4=0$ است. اگر $A(1,1)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع چقدر است؟

1) $2\sqrt{2}$ 2) $4\sqrt{2}$ 3) 2 4) 4

32. نقطهٔ $(-3,1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $2y-x=5$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج 93)

1) 40 2) 45 3) 75 4) 80

33. اگر $A(-1,2)$، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع BH کدام است؟

1) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ 2) $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ 3) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 4) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

مهروماه

34. فاصلهٔ دو خط به معادلات $y=\sqrt{3}x+2$ و $\sqrt{3}y-3x+6=0$ کدام است؟ (تجربی خارج 88)

1) $2-\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{3}-1$ 3) $\sqrt{3}+1$ 4) $2+\sqrt{3}$

35. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x-2y=3$ و $y=x+1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

1) $\frac{9}{8}$ 2) $\frac{9}{4}$ 3) $\frac{25}{8}$ 4) $\frac{25}{4}$

36. فاصلهٔ دو خط موازی $y=\sqrt{3}x+1$ و $ax+by=6$ برابر $0/5$ واحد است. a کدام است؟

1) 3 2) -3 3) $3\sqrt{3}$ 4) $-3\sqrt{3}$

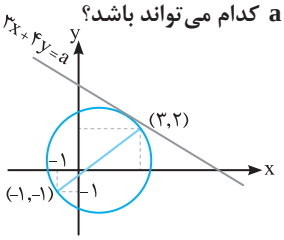
37. دو نقطه روی خط به معادلهٔ $y=x-1$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $2x-3y=5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟ (تجربی 89)

1) 9 و -15 2) 11 و -15 3) 15 و -11 4) -9 و 11

38. عرض از مبداء مثبت خطی که فاصلهٔ آن از خطی به معادلهٔ $3x+4y=1$ به برابر 2 است، کدام است؟

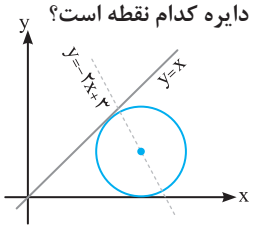
1) 2/25 2) 2/75 3) 0/75 4) 0/25

39. دو انتهای قطر دایره‌ای نقاط $(-1,-1)$ و $(3,2)$ هستند. اگر این دایره بر خط $3x+4y=a$ مماس باشد، a کدام می‌تواند باشد؟



1) $-\frac{35}{2}$
2) -17
3) 17
4) $\frac{35}{2}$

40. مرکز دایره‌ای در ربع اول روی خط $y=-2x+3$ قرار دارد که بر محور طول‌ها و خط $y=x$ مماس است. مرکز دایره کدام نقطه است؟



1) $-3+2\sqrt{3}$ 2) $-3-3\sqrt{2}$ 3) $-3+3\sqrt{2}$ 4) $-2+3\sqrt{2}$

41. معادله‌های دو ضلع موازی مربعی به صورت $ax+y=5$ و $x+y=7a$ هستند. مختصات مرکز مربع روی کدام خط قرار دارد؟

1) $x+y+6=0$ 2) $x+y-6=0$ 3) $x-y-6=0$ 4) $x-y+6=0$

42. معادلهٔ نیم‌ساز دو خط $3x+4y=1$ و $4x+3y=3$ کدام می‌تواند باشد؟

1) $y=x-2$ 2) $y=x+2$ 3) $y=-x+2$ 4) $y=-x-2$

تابع درجهٔ ۲ و معادلهٔ درجهٔ دوم

یادآوری: معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را با شرط $a\neq 0$ معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامند.

این معادله دارای مُبَیِن $\Delta=b^2-4ac$ است.

در این معادله:

اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای **2 ریشه** است.

اگر $\Delta=0$ باشد، معادله ریشه **مضاعف** دارد.

اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشه **ندارد**.

ریشه‌های معادله در صورت وجود از فرمول $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند. در صورتی که $\Delta=0$ باشد، ریشهٔ مضاعف معادله $x=\frac{-b}{2a}$ می‌شود.

نکته

هرگاه تجزیهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم به کمک فاکتورگیری یا اتحاد یک جمله‌ای مشترک امکان‌پذیر باشد، بهتر است به کمک این اتحادها معادله را حل کنیم.

مثلاً برای حل معادلات $x^2-2x=0$ و $x^2-7x+12=0$ بهتر است به روش‌های زیر عمل کنیم:

$$x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

$$x^2-7x+12=0\Rightarrow(x-3)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=4\end{cases}$$

یک تکنیک حرفه‌ای

◄ برای تجزیهٔ معادلات درجهٔ دومی که جملهٔ درجهٔ 2 آن‌ها، ضریب دارد، بهتر است به روش زیر عمل کنیم:

فرض کنید می‌خواهیم عبارت ax^2+bx+c را تجزیه کنیم.

الف: عبارت را به صورت $\frac{1}{a}(ax\quad)(ax\quad)$ می‌نویسیم.

ب: دو عدد می‌یابیم که مجموع آن‌ها b و ضرب آن‌ها ac باشد.

پ: دو عدد یافته‌شده (مثلاً k و k') را در عبارت‌های داخل پرانتز جای‌گذاری می‌کنیم. $\frac{1}{a}(ax+k)(ax+k')$

مثلاً برای حل معادلهٔ $2x^2-15x+27=0$ بهتر است عبارت درجهٔ دوم را تجزیه کنیم:

$$2x^2-15x+27=0\Rightarrow\frac{1}{2}(2x\quad)(2x\quad)=0$$

($\times$ بالای -15، 54 زیر 27)

اکنون باید 2 عدد بیابیم که مجموع آن‌ها -15 و حاصل‌ضرب آن‌ها 54 باشد (دقت کنید 27 در نظر گرفته نمی‌شود)

این دو عدد -9 و -6 می‌باشد. آن‌ها را در پرانتزها جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}(2x-6)(2x-9)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=\frac{9}{2}\end{cases}$$

نکته

۱) در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر مجموع ضرایب صفر شود یکی از ریشه‌ها 1 و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-5x+2=0$ برابر $x=1$ و $x=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$ است.

۲) در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+c=b$ باشد یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+5x+2=0$ برابر $x=-1$ و $x=\frac{-c}{a}=\frac{-2}{3}$ می‌باشند.

مثال: معادلهٔ $mx^2-(3m+1)x+5m-1=0$ دارای ریشهٔ مضاعف است. ریشه‌های مضاعف آن کدام‌اند؟

1) -2 و -4 2) 2 و 4 3) -2 و 4 4) 2 و -4

پاسخ: اگر معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس دلتای آن برابر صفر است، بنابراین:

$$\Delta=0\xrightarrow{b^2-4ac=0}(-(3m+1))^2-4(m)(5m-1)=0\Rightarrow 9m^2+6m+1-20m^2+4m=0$$

$$\Rightarrow -11m^2+10m+1=0\Rightarrow 11m^2-10m-1=0$$

$$\frac{1}{11}(11m-11)(11m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=1\\m=-\frac{1}{11}\end{cases}$$

از طرفی ریشهٔ مضاعف تابع $x=\frac{-b}{2a}$ است.

$$x=-\frac{b}{2a}=0\Rightarrow-\frac{-(3m+1)}{2m}=\frac{3m+1}{2m}=\begin{cases}m=1\to x=\frac{4}{2}=2\\m=\frac{-1}{11}\to x=\frac{\frac{8}{11}}{\frac{-2}{11}}=-4\end{cases}$$

پس گزینهٔ «4» درست است.

مهروماه

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

1. ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: ابتدا شب خط AB را می‌یابیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-0}{0-3}=\frac{2}{3}$$

سپس معادلهٔ خط را به کمک یکی از نقاط A یا B می‌نویسیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-0=\frac{2}{3}(x-3)\Rightarrow y=\frac{2}{3}x-2$$

طرفین را در 3 ضرب می‌کنیم:

$$3y=2x-6\Rightarrow 3y-2x+6=0 \quad \text{یا} \quad -3y+2x-6=0$$

روش دوم: فرض می‌کنیم معادلهٔ خط به صورت $y=ax+b$ باشد، با جای‌گذاری دو نقطهٔ $A(3,0)$ و $B(0,-2)$ در معادله، مجهولات a و b را می‌یابیم:

$$y=ax+b\Rightarrow\begin{cases}0=a(3)+b\\-2=a(0)+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+b=0\\b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=-2\end{cases}\Rightarrow y=\frac{2}{3}x-2$$

طرفین را در 3 ضرب می‌کنیم:

$$3y=2x-6\Rightarrow 2x-3y-6=0$$

2. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر سه نقطه را به ترتیب $A(m,3)$، $B(6,4m+1)$ و $O(0,0)$ در نظر بگیریم، شیب‌های دو خط OA و OB باید با هم برابر باشند تا این سه نقطه در یک راستا قرار بگیرند:

$$m_{OA}=m_{OB}\Rightarrow\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}\Rightarrow\frac{3-0}{m-0}=\frac{4m+1-0}{6-0}$$

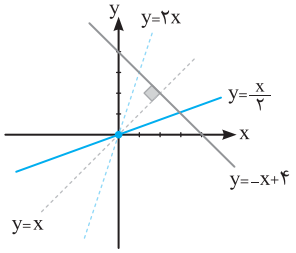
$$4m^2+m-18=0\Rightarrow\frac{1}{4}(4m+9)(4m-8)=0\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{-9}{4}\\m=2\end{cases}$$

3. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا محل برخورد دو خط $y=2x$ و $y=\frac{x}{2}$ را با تشکیل دستگاه می‌یابیم:

$$\begin{cases}y=2x\\y=\frac{x}{2}\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{x}{2}\Rightarrow 4x=x\Rightarrow x=0\Rightarrow y=0$$

محل برخورد، نقطهٔ $(0,0)$ است. خط مطلوب، بر خط $y=-x+4$ عمود است. پس شیب آن عکس و قرینهٔ شیب خط $y=-x+4$ است.



$$m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{-1}=1$$

معادلهٔ خط مطلوب را به کمک نقطهٔ $(0,0)$ و شیب $m=1$ می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$$

4. ۱ ۲ ۳ ۴

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را می‌یابیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2m-(-1)}{1-m}=\frac{2-2m}{1-m}=2$$

معادلهٔ خط را با شیب 2 و نقطهٔ $A(m,-1)$ می‌نویسیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-(-1)=2(x-m)\Rightarrow y=2x-2m-1$$

این خط محور عرض‌ها را در $y=3$ قطع نموده است، بنابراین:

$$(0,3)\rightarrow 3=2(0)-2m-1\Rightarrow m=-2\Rightarrow y=2x-2(-2)-1=2x+3$$

برای یافتن نقطه‌ای که محور طول‌ها را قطع می‌کند، y را صفر می‌گذاریم:

$$y=2x+3\Rightarrow 0=2x+3\Rightarrow x=\frac{-3}{2}=-1/5$$

5. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا شیب خط AB را می‌یابیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-(-1)}{8-2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

چون خط مطلوب، بر خط AB عمود است پس شیب آن، عکس و قرینهٔ شیب AB است.

$$m'=\frac{-1}{m_{AB}}=\frac{-1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$$

بنابراین شیب خط $(K+1)y+2Kx-K+1=0$ برابر $-\frac{3}{2}$ است.

$$(K+1)y+2Kx-K+1=0\Rightarrow y=\frac{-2K}{K+1}x+\frac{K-1}{K+1}$$

$$m'=\frac{-2K}{K+1}=\frac{-3}{2}\Rightarrow 4K=3K+3\Rightarrow K=3$$

حال با جای‌گذاری 3 به جای K معادله را حل می‌کنیم:

$$(K+1)y+2Kx-K+1=0\xrightarrow{K=3}2y+3x=1$$

6. ۱ ۲ ۳ ۴

شیب BC را می‌یابیم:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-6}{3-(-5)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

چون ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است، بنابراین شیب AH عکس و قرینهٔ BC می‌باشد.

$$m_{AH}=\frac{-1}{m_{BC}}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$$

حال معادلهٔ خط AH را می‌یابیم.

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-(-4)=2(x-(-1))\Rightarrow y=2x-2$$

7. ۱ ۲ ۳ ۴

شیب خط d_2 برابر $\tan 60^\circ$، یعنی $m_2=\sqrt{3}$ است. چون خط d_1 بر d_2 عمود است، شیب آن عکس و قرینهٔ شیب m_2 است.

$$m_1=\frac{-1}{m_2}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

با استفاده از شیب خط به‌دست آمده و نقطه برخورد دو خط d_2 و d_1 به مختصات (0,1) معادله خط d_1 را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-1=\frac{-\sqrt{3}}{3}(x-0)\Rightarrow y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x+1$$

این خط محور طول‌ها را در نقطه‌ای به عرض $y=0$ قطع می‌کند.

$$0=\frac{-\sqrt{3}}{3}x+1\Rightarrow x=\sqrt{3}$$

8. ۱ ۲ ۳ ۴

شیب خط BC را می‌یابیم:

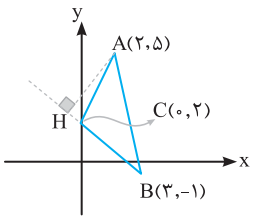
$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=1\Rightarrow m_{AH}=\frac{-1}{m_{BC}}=\frac{-1}{1}=-1$$

و سپس معادلهٔ خط AH را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-2=-1(x+1)\Rightarrow y=-x+1$$

9. ۱ ۲ ۳ ۴

برای یافتن نقطهٔ H باید معادلهٔ دو خط AH و BC را بیابیم و آن‌ها را با هم قطع دهیم.



$$\begin{cases}BC\ \hat{o}\ i\ K\tilde{A}\{: m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{+2-(-1)}{0-3}=-1\\ BC\ \hat{o}\ i\ \text{ãjl÷¶}: y-y_C=m(x-x_C)\Rightarrow y-2=-1(x-0)\Rightarrow y=-x+2\end{cases}$$

از آن‌جایی که خط AH بر خط BC عمود است شیب خط AH عکس و قرینه شیب خط BC است.

$$m_{AH}=\frac{-1}{m_{BC}}=\frac{-1}{-1}=1$$

معادلهٔ خط AH را می‌یابیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-5=1(x-2)\Rightarrow y=x+3$$

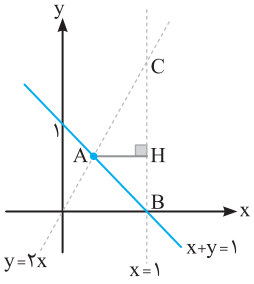
برای یافتن نقطهٔ H باید دستگاه معادلات دو خط BC و AH را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases}y=-x+2\\ y=x+3\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\Rightarrow y=\frac{5}{2}$$

10. ۱ ۲ ۳ ۴

یکی از اضلاع مثلث $(x=1)$ خطی عمود است. پس بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم.
همان‌طور که می‌بینید، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث، ارتفاع AH می‌باشد که یک خط افقی است و معادلهٔ آن باید به صورت $y=K$ باشد.
به این ترتیب فقط گزینهٔ «1» می‌تواند درست باشد.

نکته: در سوالات مثلث، اگر یکی از اضلاع آن افقی یا عمودی باشد بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم.



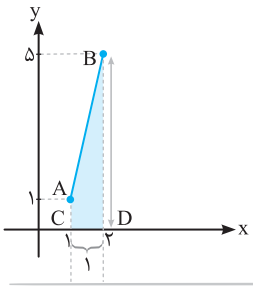
اگر بخواهیم K را بیابیم، باید معادلهٔ دو خط $x+y=1$ و $y=2x$ را قطع دهیم و عرض نقطهٔ تقاطع را بیابیم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x+2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$

با استفاده از مختصات نقطه $A(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ معادلهٔ کوتاه‌ترین ارتفاع به‌صورت $y=\frac{2}{3}$ است.

11. ۱ ۲ ۳ ۴

با رسم شکل به محاسبهٔ مساحت ذوزنقه می‌پردازیم:



$$y_A=4(1)-3=1$$
$$y_B=4(2)-3=5$$

همان‌طور که می‌بینید طول قاعدهٔ بزرگ برابر 5 و طول قاعدهٔ کوچک برابر 1 است. ارتفاع ذوزنقه هم فاصلهٔ $x=2$ تا $x=1$ یعنی $h=1$ است.

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{مجموع قاعده‌ها} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{5+1}{2}\times 1=3$$

12. ۱ ۳ ۴

نقطهٔ $(x,0)$ را به عنوان مختصات نقطهٔ M روی محور طول‌ها در نظر می‌گیریم، شیب خط‌های AM و BM را می‌یابیم:

$$m_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{0-(-2)}{x-1}=\frac{2}{x-1}$$
$$m_{BM}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\frac{0-2}{x-3}=\frac{-2}{x-3}$$

می‌دانیم $m_{AM}.m_{BM}=-1$ است و حاصل‌ضرب نقاط x و x' برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\frac{2}{x-1}\times\frac{-2}{x-3}=-1 \Rightarrow x^2-4x+3=4 \Rightarrow x^2-4x-1=0$$
$$xx'=\frac{c}{a}=\frac{-1}{1}=-1$$

13. ۱ ۲ ۴

در متوازی‌الاضلاع ABCD مجموع مختصات رئوس مقابل هم، با یک‌دیگر برابرند، یعنی:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+4=3+m+1 \\ 2+5=7+n-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow m.n=1$$

14. ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: طول اضلاع AB، AC و BC را محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{18}$$
$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-2-0)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{8}$$
$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-2-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$$

اگر دقت کنید $AB^2+AC^2=BC^2$ می‌باشد. بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است.

روش دوم: تأیید قائمه بودن زاویهٔ مثلث، بررسی عکس و قرینه بودن شیب‌های دو ضلع قائمه است.

$$\begin{cases} m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-(-1)}{3-0}=1 \\ m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1-(-1)}{-2-0}=-1 \end{cases} \Rightarrow m_{AB}.m_{AC}=-1$$

رأس A قائمه است.

مهروماه

15. ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که شکل حاصل متوازی‌الاضلاع است، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابرند. مختصات نقطه مورد نظر را (x,y) فرض می‌کنیم.

پس داریم: $\begin{cases}2+5=-1+x\\0+17=0+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8\\y=17\end{cases}$

ضدهوایی باید به نقطهٔ $(8,17)$ شلیک کند تا امکان شکار هواپیما وجود داشته باشد.

16. ۱ ۲ ۳ ۴

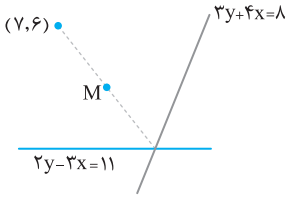
مختصات وسط پاره خط CD و مختصات وسط پاره‌خط AB با هم برابرند، پس:

$$\begin{cases}\frac{x_C+x_D}{2}=\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_C+y_D}{2}=\frac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{0+x_D}{2}=\frac{-3+5}{2}\\\frac{1+y_D}{2}=\frac{-2+2}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D=2\\y_D=-1\end{cases}\Rightarrow D(2,-1)$$

17. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر دو خط $2y-3x=11$ و $3y+4x=8$ را با هم قطع دهیم، مختصات رأس مقابل نقطهٔ $(7,6)$ به دست می‌آید.

دقت کنید نقطهٔ $(7,6)$ روی هیچ یک از دو خط $2y-3x=11$ و $3y+4x=8$ قرار ندارد. بنابراین رأس $(7,6)$ نقطهٔ مقابل، برخورد دو خط است.



$$3\times\begin{cases}3y+4x=8\\4\times\end{cases}\begin{cases}2y-3x=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9y+12x=24\\8y-12x=44\end{cases}$$

$$17y=68\Rightarrow y=4\Rightarrow x=-1$$

مختصات M یعنی وسط قطر را می‌یابیم:

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{7+(-1)}{2}=3\\y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{6+4}{2}=5\end{cases}$$

18. ۱ ۳ ۴

اول مختصات M یعنی وسط BC را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0\\y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5+3}{2}=4\end{cases}\Rightarrow M(0,4)$$

حال، اندازهٔ پاره‌خط AM را محاسبه می‌کنیم: $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(4-6)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

19. ۱ ۳ ۴

ابتدا مختصات نقطهٔ وسط BC را می‌یابیم:

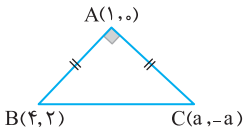
$$\begin{cases}x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+6}{2}=4\\y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+(-1)}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M(4,-\frac{1}{2})$$

حال شیب خط AM را محاسبه می‌کنیم: $m_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{-\frac{1}{2}-3}{4-4}=\frac{-\frac{7}{2}}{0}=$ ¼kz° þÃ0÷Ù

تذکر: هرگاه شیب خطی **تعریف نشده** باشد آن خط **قائم** است و معادلهٔ آن $x=x_0$ می‌باشد.

$x=x_0\Rightarrow x=x_M=4$ یا $x=x_A=4$

20. ۱ ۲ ۳



روش اول: می‌دانیم $AB=AC$ است، پس:

$$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$

$$\sqrt{(4-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(-a-0)^2}$$

$$\sqrt{13}=\sqrt{2a^2-2a+1}$$

طرفین را به توان 2 می‌رسانیم:

$$2a^2-2a+1=13\Rightarrow 2a^2-2a-12=0$$
$$\Rightarrow a^2-a-6=0\Rightarrow (a-3)(a+2)=0\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-2 \end{cases}$$

از طرفی رابطهٔ فیثاغورس، یعنی $AB^2+AC^2=BC^2$ هم باید برقرار باشد.

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(-a-2)^2}=\sqrt{2a^2-4a+20}$$

حال مقادیر AB، AC و BC را در رابطهٔ فیثاغورس جای‌گذاری می‌کنیم:

$$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 13+(2a^2-2a+1)=2a^2-4a+20\Rightarrow a=3$$

بدیهی است جواب نهایی تست $a=3$ است.

روش دوم: شیب خط AC باید عکس و قرینهٔ شیب خط AB باشد چرا که دو خط بر هم عمودند.

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-a-0}{a-1}$$
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-0}{4-1}=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow m_{AC}.m_{AB}=-1$$
$$\Rightarrow \frac{-a}{a-1}\times\frac{2}{3}=-1\Rightarrow \frac{-2a}{3a-3}=-1\Rightarrow 2a=3a-3\Rightarrow a=3$$

21. ۱ ۲ ▨ ۴

نقطهٔ (a,a) را روی نیم‌ساز ربع اول و سوم در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن‌را تا نقطهٔ $A(1,2)$ محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{(a-1)^2+(a-2)^2}=2\Rightarrow (a^2-2a+1)+(a^2-4a+4)=4\Rightarrow 2a^2-6a+1=0$$

در معادلهٔ $2a^2-6a+1=0$ مجموع 2 ریشه برابر $S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-6)}{2}=3$ است.

نکته:
در هر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، مجموع 2 ریشه برابر با $S=\frac{-b}{a}$ است.

22. ۱ ۲ ۳ ▨

روش اول: نقطه‌ای به مختصات $M(x,2x-3)$ روی خط $y=2x-3$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ آن تا نقاط $A(1,2)$ و $B(2,0)$ را می‌یابیم و آن‌ها را با هم مساوی می‌گذاریم:

$$MA=MB\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(2x-3-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(2x-3)^2}\Rightarrow 6x=13\Rightarrow x=\frac{13}{6}$$

روش دوم: معادلهٔ خط عمودمنصف را می‌یابیم:

پای عمودمنصف $(\frac{1+2}{2},\frac{2+0}{2})=(\frac{3}{2},1)$

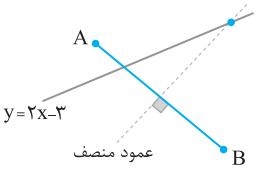
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-2}{2-1}=-2$$

شیب عمودمنصف $m'=\frac{-1}{m_{AB}}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

معادلهٔ عمودمنصف را می‌یابیم:

$$y-y_0=m'(x-x_0)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

حال، معادلهٔ عمودمنصف را با خط $y=2x-3$ قطع می‌دهیم:



$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ y=2x-3 \end{cases}\Rightarrow 2x-3=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{13}{6}$$

23. ۱ ▨ ۳ ۴

روش اول: از آن‌جایی که فاصلهٔ هر نقطه روی عمودمنصف تا دو سر پاره‌خط برابر است، با فرض این‌که نقطهٔ $M(x,y)$ روی عمودمنصف است می‌توان گفت:

$$MA=MB\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4=x^2-6x+9+y^2-8y+16\Rightarrow 8x+4y=20\Rightarrow y=-2x+5$$

مهروماه

روش دوم: شیب و نقطهٔ وسط AB را می‌یابیم:

$$M(\frac{-1+3}{2},\frac{2+4}{2})\Rightarrow M(1,3)$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-2}{3-(-1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

شیب عمودمنصف، عکس و قرینهٔ شیب خط AB است.

$$\text{شیب عمودمنصف } m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

معادلهٔ خط عمودمنصف را می‌نویسیم:

$$y-3=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+5$$

24. ۱ ۲ ۳ ۴

خط مطلوب، همان عمودمنصف پاره‌خط EF (یا فاصلهٔ دو مدرسه) است.

$$\text{مختصات وسط EF}:\begin{cases}x_M=\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{3+7}{2}=5\\ y_M=\frac{y_E+y_F}{2}=\frac{10+2}{2}=6\end{cases}$$

شیب EF را می‌یابیم و آن‌را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب عمودمنصف پیدا شود:

$$m_{EF}=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{2-10}{7-3}=\frac{-8}{4}=-2\Rightarrow \text{شیب عمودمنصف}=\frac{-1}{m_{EF}}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

معادله خط را می‌نویسیم:

$$y-6=\frac{1}{2}(x-5)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

25. ۱ ۲ ۳ ۴

راهبرد ۱

برای یافتن مساحت مثلثی با رئوس $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ می‌توان از روش زیر استفاده نمود.

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\\ x_C & y_C\\ x_A & y_A\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A)-(x_By_A+x_Cy_B+x_Ay_C)]$$

تذکر:

۱) ترتیب چیدن نقاط در فرمول S اهمیتی ندارد، فقط اولین نقطه در مرتبهٔ آخر باید تکرار شود.

۲) در صورت **منفی** شدن جواب S، مساحت برابر **قدرمطلق** آن است.

به کمک راهبرد فوق مساحت را می‌یابیم:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[((2\times0)+(3\times2)+(0\times5))-(3\times5+0\times0+2\times2)]=\frac{1}{2}[6-19]=\frac{-13}{2}=-6/5$$

از آن‌جایی که مساحت نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $S=6/5$ است.

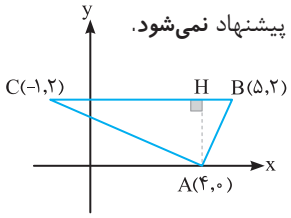
26. ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: با استفاده از راهبرد گفته شده داریم:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 0\\ -1 & 2\\ 5 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[(5\times0+4\times2+(-1)\times2)-(4\times2+(-1)\times0+5\times2)]=\frac{1}{2}[6-18]=-6\to S=6$$

روش دوم: شکل مثلث را رسم می‌کنیم.

دقت کنید دلیل رسم، در این تست این است که دو نقطه عرض‌های برابر دارند در غیر این صورت روش رسم پیشنهاد **نمی‌شود**.



با توجه به شکل، طول ارتفاع $AH=2$ و طول قاعدهٔ $BC=6$ است.

$$S=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}(2\times6)=6$$

27. ۱ ۳ ۴

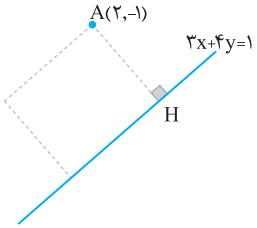
فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,2)$ را از خط $3x+my-1=0$ پیدا می‌کنیم و آن‌را برابر 2 می‌گذاریم:

$$\frac{|3(1)+m(2)-1|}{\sqrt{3^2+m^2}}=2\Rightarrow\frac{|2m+2|}{\sqrt{9+m^2}}=2\Rightarrow\frac{2|m+1|}{\sqrt{9+m^2}}=2\Rightarrow\frac{|m+1|}{\sqrt{9+m^2}}=1\Rightarrow|m+1|=\sqrt{9+m^2}$$

$$\Rightarrow m^2+2m+1=9+m^2\Rightarrow2m=8\Rightarrow m=4$$

28. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط $3x+4y-1=0$ برابر ضلع مربع است.



$$AH=\frac{|3x_0+4y_0-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3(2)+4(-1)-1|}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}=0/2$$

مساحت مربع برابر است با:

$$S=(\text{ضلع})^2=(0/2)^2=0/04$$

29. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصلهٔ رأس تا خط $3x-4y-7=0$ را می‌یابیم که همان طول ضلع مربع است.

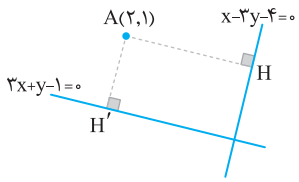
$$AH=\frac{|3x_0-4y_0-7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3(1)-4(2)-7|}{\sqrt{25}}=\frac{12}{5}$$

محیط مربع، 4 برابر ضلع آن است.

$$P=4(\text{ضلع})=4(\frac{12}{5})=\frac{48}{5}$$

30. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصلهٔ نقطهٔ A را از دو خط داده‌شده می‌یابیم. این فاصله‌ها، همان طول اضلاع مستطیل است.



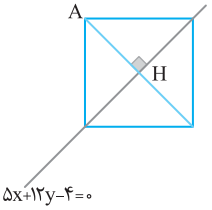
$$AH=\frac{|x_0-3y_0-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|2-3(1)-4|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$AH'=\frac{|3x_0+y_0-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|3(2)+1-1|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$S=AH.AH'=\frac{5}{\sqrt{10}}\times\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{30}{10}=3$$

31. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصلهٔ نقطهٔ A از قطر $5x+12y-4=0$ برابر با نصف طول قطر مربع است.



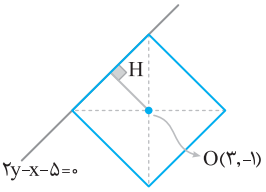
$$AH=\frac{|5x_0+12y_0-4|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|5(1)+12(1)-4|}{\sqrt{169}}=\frac{13}{13}=1$$

بنابراین طول قطر مربع $2(1)=2$ خواهد بود.

$$S=\frac{d^2}{2}=\frac{(2)^2}{2}=2$$

32. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصله نقطهٔ $(3,-1)$ در مرکز مربع تا معادلهٔ یک ضلع آن، برابر نصف طول ضلع مربع است.

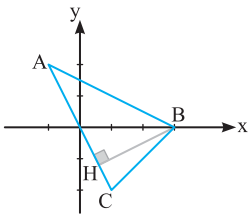


$$OH=\frac{|2y_0-x_0-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2(-1)-3-5|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

طول ضلع مربع 2 برابر OH یعنی $\frac{20}{\sqrt{5}}$ است، پس مساحت مربع برابر می‌شود با $S=(\frac{20}{\sqrt{5}})^2=80$.

33. ۱ ۲ ۴

ابتدا شیب و معادلهٔ خط AC را می‌یابیم:



$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-2-2}{1-(-1)}=\frac{-4}{2}=-2$$

اکنون معادله AC را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m_{AC}(x-x_A)\Rightarrow y-2=-2(x+1)\Rightarrow y=-2x\Rightarrow y+2x=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ B از خط $y+2x=0$ همان ارتفاع BH است.

$$BH=\frac{|y+2x|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{|0+2(3)|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

34. ۱ ۲ ۳ ۴

معادلهٔ هر دو خط را به سمت چپ مساوی انتقال می‌دهیم:

$$\begin{cases}\sqrt{3}y-3x+6=0 & (1)\\ y-\sqrt{3}x-2=0 & (2)\end{cases}$$

با تقسیم ضابطهٔ شمارهٔ (1) بر $\sqrt{3}$ ضرایب خطوط (1) و (2) را یکسان می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}y-3x+6}{\sqrt{3}}=0\Rightarrow y-\frac{3}{\sqrt{3}}x+\frac{6}{\sqrt{3}}=0\Rightarrow y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=0$$

حال دوباره ضابطهٔ دو خط را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=0\\ y-\sqrt{3}x-2=0\end{cases}$$

اکنون می‌توانیم فاصلهٔ دو خط را بیابیم:

$$d=\frac{|2\sqrt{3}-(-2)|}{\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}}=\frac{2\sqrt{3}+2}{2}=\sqrt{3}+1$$

35. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصلهٔ دو ضلع مربع، **طول ضلع مربع** است.

$$\begin{cases}2x-2y-3=0\\ y-x-1=0\end{cases}$$

با ضرب -2 در معادلهٔ دوم ضرایب x و y را در دو ضابطه، یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x-2y-3=0\\ 2x-2y+2=0\end{cases}$$

حال طول ضلع مربع را به کمک فاصلهٔ دو خط می‌یابیم:

$$\text{طول ضلع}=\frac{|-3-2|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{8}}$$

برای یافتن مساحت مربع کافی است ضلع را به توان 2 برسانیم:

$$S=(\frac{5}{\sqrt{8}})^2=\frac{25}{8}$$

36. ۱ ۲ ۳ ۴

از آن‌جایی که دو خط $y=\sqrt{3}x+1$ و $y=\frac{-a}{b}x+\frac{6}{b}$ موازی‌اند باید شیب‌های آن‌ها برابر باشند. $-\frac{a}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow -a=\sqrt{3}b$

حال فاصلهٔ دو خط $y-\sqrt{3}x-1=0$ و $y+\frac{a}{b}x-\frac{6}{b}=0$ را می‌یابیم:

$$\text{فاصله}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{(x\text{ ضریب})^2+(y\text{ ضریب})^2}}=\frac{|-\frac{6}{b}+1|}{\sqrt{(\frac{a}{b})^2+1}}=\frac{|\frac{-6}{b}+1|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1}}=\frac{|-\frac{6}{b}+1|}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$|\frac{-6}{b}+1|=1\Rightarrow\begin{cases}\frac{-6}{b}+1=1\Rightarrow -\frac{6}{b}=0\rightarrow \text{غ ق ق}\\ \frac{-6}{b}+1=-1\Rightarrow\frac{-6}{b}=-2\Rightarrow b=3\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $a=-\sqrt{3}b$، پس $a=-3\sqrt{3}$ است.

37. ۱ ۳ ۴

روش اول: نقطهٔ $M(x,x-1)$ را روی خط $y=x-1$ در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن را از خط $2x-3y-5=0$ می‌یابیم که برابر $\sqrt{13}$ است، یعنی:

$$MH=\frac{|2x-3(x-1)-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-x-2|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}\Rightarrow|x+2|=13\Rightarrow\begin{cases}x+2=13\Rightarrow x=11\\ x+2=-13\Rightarrow x=-15\end{cases}$$

روش دوم: معادلهٔ خطی موازی خط $2x-3y-5=0$ را مانند $2x-3y+c=0$ فرض می‌کنیم که فاصلهٔ این دو خط برابر $\sqrt{13}$ باشد.

$$\frac{|c-(-5)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}\Rightarrow|c+5|=13\Rightarrow\begin{cases}c=8\\ c=-18\end{cases}$$

معادلات خط را بر اساس c های پیداشده می‌نویسیم:

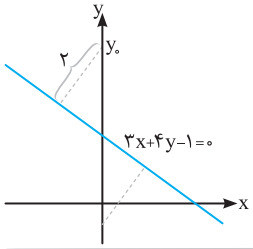
$$2x-3y+c=0\Rightarrow\begin{cases}2x-3y+8=0\\ 2x-3y-18=0\end{cases}$$

حال این خطوط را با $y=x-1$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=x-1\\ 2x-3y+8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=11\\ y=10\end{cases}\text{ و }\begin{cases}y=x-1\\ 2x-3y-18=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-15\\ y=-16\end{cases}$$

38. ۱ ۳ ۴

فرض می‌کنیم عرض از مبدا خط مورد نظر سوال برابر y_0 است. پس مطابق شکل فاصلهٔ نقطهٔ $(0,y_0)$ را تا خط $3x+4y-1=0$ برابر 2 می‌گذاریم:



$$\frac{|3x_0+4y_0-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\Rightarrow\frac{|3(0)+4y_0-1|}{5}=2$$

$$\Rightarrow|4y_0-1|=10\Rightarrow\begin{cases}4y_0-1=10\Rightarrow y_0=\frac{11}{4}=2/75\ \checkmark\\ 4y_0-1=-10\Rightarrow y_0=\frac{-9}{4}=-2/25\end{cases}$$

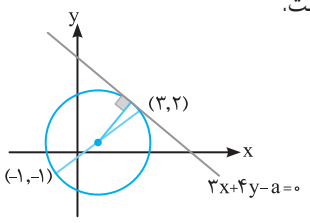
39. ۱ ۲ ۳

از آن‌جایی که دو سر قطر دایره نقاط $(-1,-1)$ و $(3,2)$ است، بنابراین وسط این دو نقطه مرکز دایره و فاصلهٔ آن‌ها قطر دایره می‌باشد.

مرکز دایره: $(\frac{-1+3}{2},\frac{-1+2}{2})=(1,\frac{1}{2})$

قطر دایره: $\sqrt{(-1-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5\rightarrow$ شعاع $=\frac{5}{2}$

با توجه به شکل متوجه می‌شویم فاصلهٔ نقطهٔ $(1,\frac{1}{2})$ از خط $3x+4y-a=0$ برابر شعاع دایره یعنی $\frac{5}{2}$ است.



$$\frac{|3x_0+4y_0-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{|3(1)+4(\frac{1}{2})-a|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{|5-a|}{5}=\frac{5}{2}\Rightarrow 5-a=\pm\frac{25}{2}\Rightarrow\begin{cases}5-a=\frac{25}{2}\Rightarrow a=\frac{-15}{2}\\ 5-a=\frac{-25}{2}\Rightarrow a=\frac{35}{2}\end{cases}$$

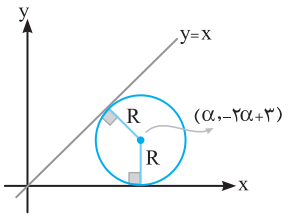
با توجه به شکل عرض از مبدأ مثبت است، پس $a=\frac{35}{2}$ مورد قبول خواهد بود.

40. ۱ ۲ ۴

با توجه به شکل، می‌توان نتیجه گرفت مرکز دایره که به مختصات $(\alpha,-2\alpha+3)$ است از دو خط $y=x$ و $y=0$ فاصله‌ای برابر دارد.

فاصلهٔ نقطهٔ $(\alpha,-2\alpha+3)$ از خط $y=0$ برابر $|-2\alpha+3-0|$ است. $R=$

به یاد داشته باشید که فاصلهٔ نقطهٔ (x,y) از خط افقی $y=K$ برابر $|y_0-K|$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $(\alpha,-2\alpha+3)$ از خط $y-x=0$ را محاسبه می‌کنیم:



$$R=\frac{|(-2\alpha+3)-\alpha|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{|-3\alpha+3|}{\sqrt{2}}$$

هر دو فاصله با هم برابرند، پس:

$$\frac{|-3\alpha+3|}{\sqrt{2}}=|-2\alpha+3|\xrightarrow{\text{۲ طرفین}}\frac{9\alpha^2-18\alpha+9}{2}=4\alpha^2-12\alpha+9\Rightarrow 9\alpha^2-18\alpha+9=8\alpha^2-24\alpha+18$$

$$\Rightarrow\alpha^2+6\alpha-9=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{-6-\sqrt{72}}{2}=-3-3\sqrt{2}\\ \alpha=\dfrac{-6+\sqrt{72}}{2}=-3+3\sqrt{2}\end{cases}$$

با توجه به این‌که مرکز دایره در ربع اول است پس باید α مثبت باشد، پس $\alpha=-3+3\sqrt{2}$ می‌باشد.

41. ۱ ۳ ۴

چون دو خط $ax+y=5$ و $x+y=7a$ موازی هستند و شیب‌های آن‌ها با هم برابرند، پس $a=1$ است.

$$a=1\Rightarrow\begin{cases}x+y-7=0\\ x+y-5=0\end{cases}$$

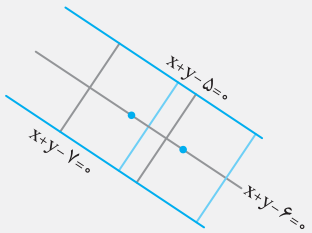
پس خط وسط دو خط $x+y-7=0$ و $x+y-5=0$ برابر است با:

$$x+y+\frac{-5-7}{2}=0\Rightarrow x+y-6=0$$

نکته: مرکز مربع نقطه‌ای در وسط این دو خط است.

خط وسط دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با:

$$ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$



42. ۱ ۲ ۳ ۴

راهبرد ۲

هر نقطه بر روی نیمساز، از دو خط تشکیل‌دهندهٔ زاویه، فاصله‌ای برابر دارد.

برای یافتن معادلهٔ نیمساز دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

دو معادلهٔ حاصل از این رابطه، دو نیمساز مطلوب هستند.

مطابق آن‌چه گفته شد برای یافتن نیمساز دو خط $3x+4y-1=0$ و $4x+3y-3=0$ رابطهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4x+3y-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}\Rightarrow|3x+4y-1|=|4x+3y-3|\Rightarrow\begin{cases}3x+4y-1=4x+3y-3\Rightarrow y=x-2\\ 3x+4y-1=-4x-3y+3\Rightarrow 7y=-7x+4\end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها خط $y=x-2$ جواب است.

43. ۱ ۲ ۳

برای حل این معادله به‌جای x^2 از مجهول معاون A استفاده می‌کنیم:

$$x^4-4x^2+3=0\Rightarrow(x^2)^2-4(x^2)+3=0\xrightarrow{x^2=A}A^2-4A+3=0$$

$$\Rightarrow(A-1)(A-3)=0\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ A=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\ x^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

معادله دارای 4 ریشهٔ متمایز است.