مهروماه

به نام پروردگار مهربان

کنکور ۱۴۰۰

ویرایش جدید

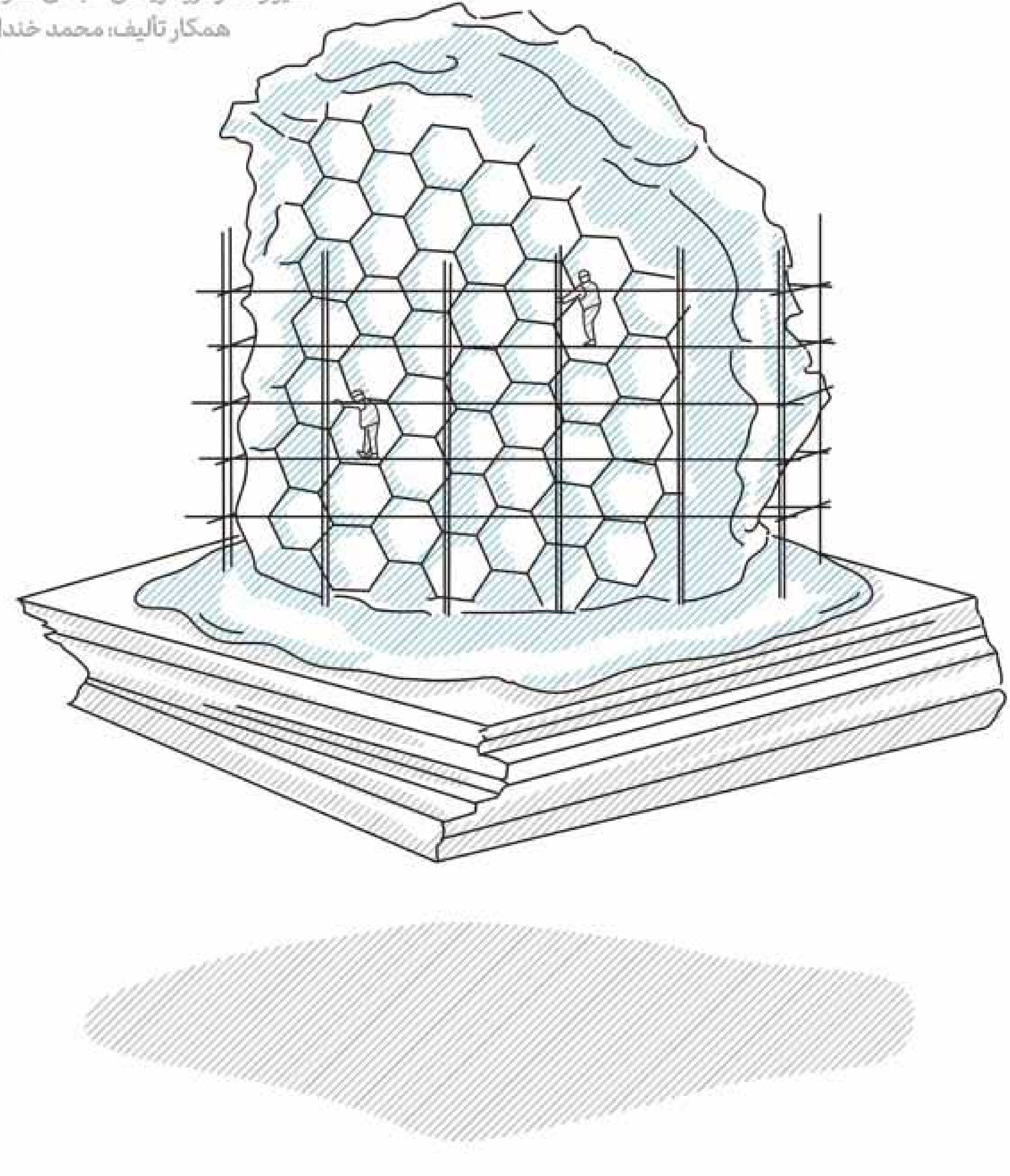
هندسه جامع

پایهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم

• جواد ترکمن • روح‌الله مصطفی‌زاده

+۱۹ آزمون جامع فصلی

مدیر و ناظر گروه ریاضی: عباس اشرفی
همکار تألیف: محمد خندان



فهرست

پایه دوازدهم

فصل ۱: ماتریس و کاربردها ۹

فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی ۵۷

فصل ۳: بردارها ۱۱۹

پایه یازدهم

فصل ۱: دایره ۱۶۹

فصل ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها ۲۰۹

فصل ۳: روابط طولی در مثلث ۲۳۳

پایه دهم

فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۲۵۱

فصل ۲: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن ۲۷۹

فصل ۳: چند ضلعی‌ها ۳۱۱

فصل ۴: تجسم فضایی ۳۴۳

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۵۹

پاسخ‌های کلیدی ۵۱۹

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

ماتریس یک جدول مستطیل شکل از اعداد حقیقی است. (ماتریس را آرایهٔ مستطیل‌شکل نیز می‌نامند.) که اگر دارای m سطر و n ستون باشد، آن را ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) می‌گوییم.

برای نمونه:

$B=\begin{bmatrix}5 & \sqrt{2}\\ -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس 2×2 است. (زیرا دو سطر و دو ستون دارد)

$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس 2×3 است. (زیرا دو سطر و سه ستون دارد)

$D=\begin{bmatrix}1/2 & 5\\ -1 & 4\\ 7 & 100\end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس 3×2 است. (زیرا سه سطر و دو ستون دارد)

$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{4}{3}\end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس 1×3 است. (زیرا یک سطر و سه ستون دارد)

$E=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس 3×1 است. (زیرا سه سطر و یک ستون دارد)

تذکر: معمولاً مرتبهٔ ماتریس را در کنار آن می‌نویسند.

درایه

هر عضو ماتریس را یک درایه می‌نامند. هر درایه در یک سطر و در یک ستون مشخص قرار گرفته است، که این دو عدد (عدد سطر و عدد ستون)، در کنار هم آدرس درایه را مشخص می‌سازند. درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A را به‌صورت a_{ij} نشان می‌دهیم.

درایهٔ واقع در سطر i و ستون j: a_{ij} (سطر، ستون)

برای نمونه: در ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ \sqrt{3} & 7 & 0\end{bmatrix}$، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول برابر با $\sqrt{3}$ است، بنابراین $a_{21}=\sqrt{3}$.

نتیجه: معمولاً اگر بخواهیم یک ماتریس را به‌صورت یک آرایه مستطیل شکل در حالت کلی نشان دهیم، از آدرس درایه‌ها کمک می‌گیریم.

برای نمونه:

درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۳

$C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\end{bmatrix}_{1\times 3}$

$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$

درایهٔ واقع در سطر ۲ و ستون ۱

درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۲

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3}$

نمایش فشردهٔ ماتریس

ماتریس A را به‌طور کلی می‌توان به‌صورت فشردهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش داد، که در آن a_{ij} نمایندهٔ تمام درایه‌های ماتریس A است و مرتبهٔ ماتریس $m\times n$ می‌باشد. بنابراین $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ است. به عبارت دیگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون می‌باشد.

برای نمونه: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ماتریس A دارای سه سطر و دو ستون است.

تذکر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با نماد $\bar{O}$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات ماتریس صفر مرتبهٔ $m\times n$ به‌صورت $\bar{O}_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود، پس: $\bar{O}_{m\times n}=[0]_{m\times n}$

تست: اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، با $a_{ij}=i+j^۲$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰

۳) ۱۶ ۴) ۱۴

پاسخ گزینه۳ واضح است که ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۲ است، یعنی دو سطر و دو ستون دارد، پس $۱\le i\le ۲$ و $۱\le j\le ۲$ می‌باشد، پس:

	ستون اول $\downarrow j=۱$	ستون دوم $\downarrow j=۲$
سطر اول $\xrightarrow{i=۱}$	$a_{۱۱}=۱+۱^۲=۲$	$a_{۱۲}=۱+۲^۲=۵$
سطر دوم $\xrightarrow{i=۲}$	$a_{۲۱}=۲+۱^۲=۳$	$a_{۲۲}=۲+۲^۲=۶$

بنابراین ماتریس A عبارت است از $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}$ و جمع درایه‌های آن ۱۶ است.

تساوی دو ماتریس

۱) دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند. ۲) درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند.

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش فشرده باشند، آن‌گاه:

$$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$$
$$(\forall i,j; ۱\le i\le m \wedge ۱\le j\le n)$$

تست: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۶ & ۵x-y\\ -x^۲+x & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x^۲-۵x & ۲x+y\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ گزینه ۱ درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر مساوی قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases}x^۲-۵x=-۶\Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰\Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲,۳\\ -۲=-x^۲+x\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲,-۱\end{cases}$$

بنابراین اشتراک جواب‌ها، $x=۲$ است. همچنین داریم:

$$۲x+y=۵x-y\xrightarrow{\text{ساده‌سازی}}۳x=۲y\xrightarrow{x=۲}y=۳$$

پس $x+y=۵$ است.

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش فشرده ماتریس دلخواه A باشد و $r\in\mathbb{R}$، آن‌گاه $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$. یعنی عدد حقیقی r در تک‌تک درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود. پس rA ماتریسی هم‌مرتبه با ماتریس A است.

برای نمونه:

$$A=\begin{bmatrix}۵ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۳A=\begin{bmatrix}۳\times۵ & ۳\times(-۱) & ۳\times۴\\ ۳\times۰ & ۳\times۳ & ۳\times۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵ & -۳ & ۱۲\\ ۰ & ۹ & ۶\end{bmatrix}$$

تذکر:

۱) همان‌طور که می‌توان یک عدد حقیقی را در ماتریس دلخواه A ضرب کرد، به همان ترتیب می‌توان یک عدد را از تمام درایه‌های ماتریس A فاکتور گرفت.

برای نمونه:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۶\\ ۸ & ۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۱ & ۲\times(-۳)\\ ۲\times۴ & ۲\times۶\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۴ & ۶\end{bmatrix}$$

۲) اگر یک ماتریس را در عدد (-۱) ضرب کنیم، تمام درایه‌های آن قرینه می‌شوند و ماتریس حاصل، **ماتریس قرینه** نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر قرینهٔ ماتریس A، که با $-A$ نشان داده می‌شود، ماتریسی است هم‌مرتبه با A که تمام درایه‌های آن نظیر به نظیر قرینهٔ درایه‌های ماتریس A هستند.

بنابراین:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Leftrightarrow -A=[-a_{ij}]_{m\times n}$$

برای نمونه:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & -۱\\ ۰ & -۵ & ۳\\ ۱ & ۶ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow -A=\begin{bmatrix}-۲ & -۴ & +۱\\ ۰ & +۵ & -۳\\ -۱ & -۶ & -۷\end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r,s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برقرار است:

۱) $r(sA)=s(rA)=(rs)A$ ۲) $(r\pm s)A=rA\pm sA$ ۳) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۴) $rA=rB \xleftrightarrow{r\neq ۰} A=B$ ۵) $rA=\bar{O} \Leftrightarrow (r=۰ \ \vee \ A=\bar{O})$

جمع (تفریق) دو ماتریس

۱) دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند. ۲) درایه‌ها نظیر به نظیر جمع (تفریق) می‌شوند.

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش فشرده باشند، آن‌گاه:

$$A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$
$$(\forall i,j;\ ۱\le i\le m \ \wedge \ ۱\le j\le n)$$

برای نمونه:

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۷ & ۱ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} \overset{a_{۱۱}}{۳}+\overset{b_{۱۱}}{۵} & \overset{a_{۱۲}}{(-۵)}+\overset{b_{۱۲}}{(-۳)} \\ \underset{a_{۲۱}}{۱}+\underset{b_{۲۱}}{(-۷)} & \underset{a_{۲۲}}{۲}+\underset{b_{۲۲}}{۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & -۸ \\ -۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۰ & -۳ \\ -۲ & ۱ & ۶ & -۲ \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۲ & ۱ \\ ۵ & -۳ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۱-۴ & ۷-۳ & ۰-(-۲) & (-۳)-۱ \\ -۲-۵ & ۱-(-۳) & ۶-۱ & -۲-۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ & ۲ & -۴ \\ -۷ & ۴ & ۵ & -۹ \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های جمع دو ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر در جمع ماتریس‌ها برقرار است:

۱) جابه‌جایی	$A+B=B+A$
۲) وجود عضو بی‌اثر (ماتریس صفر)	$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$
۳) وجود عضو قرینه	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$
۴) شرکت‌پذیری	$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$
۵) حذف‌پذیری	$A+B=A+C \Rightarrow B=C$

چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری

ماتریسی است که یک سطر و تعدادی ستون دارد. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=[a_{۱۱} \quad a_{۱۲} \quad \dots \quad a_{۱n}]_{۱\times n}$$

برای نمونه: $A=[۲ \quad -۱ \quad ۴]$ یک ماتریس سطری (از مرتبهٔ ۳×۱) است.

۲) ماتریس ستونی

ماتریسی است که تعدادی سطر و یک ستون دارد. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}_{m\times ۱}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی (از مرتبهٔ ۱×۲) است.

۳) ماتریس مربعی

ماتریسی است که تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن برابر است. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$، یک ماتریس مربعی (از مرتبهٔ ۲×۲) است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱. ماتریس A از مرتبهٔ n مفروض است. اگر تمام درایه‌های این ماتریس برابر ۱ باشد، نسبت مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، به مجموع درایه‌های قطر اصلی آن کدام است؟

۱) n ۲) $\frac{n}{2}$ ۳) $\frac{n+1}{2}$ ۴) $\frac{n-1}{2}$

۲. ماتریس $A=[a_{ij}]_{5\times5}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}2i-j & ; \ i=j\\ \dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4} & ; \ i\neq j\end{cases}$ مفروض است. اگر این ماتریس، قطری باشد، چند مقدار برای x موجود است؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۳. اگر $\begin{bmatrix}x^2+3 & 4\\ 3x-y & -y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x & -x^2+5x\\ 2x+y & -y\end{bmatrix}$ باشد، $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۴. اگر $A=[j^2+2i]_{2\times3}$ ، $B=[i^3-j]_{2\times3}$ باشد، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $-B+2A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۵. اگر $A=\begin{bmatrix}c & 5\\ 3 & a\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ b & 7\end{bmatrix}$ و $AB=BA$ باشد، آن‌گاه $c-a$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۵- ۳) ۲۰- ۴) ۲۰

۶. اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ a & b\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند. در این‌صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۲-

۷. اگر حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix}-2a & -2\\ 2 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، در این‌صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸. به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix}x & -1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ y & 1\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $x=1\ ,\ y=-7$ ۲) $x=2\ ,\ y=-7$

۳) $x=2\ ,\ y=-5$ ۴) $x=1\ ,\ y=-5$

۹. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس A در رابطهٔ $C=AB$ صدق کند، مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟

۱) ۷- ۲) ۸

۳) هر مقدار حقیقی ۴) ماتریسی مثل A وجود ندارد.

۱۰. بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A از معادلهٔ $A\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۱۱. از رابطهٔ ماتریسی $[x \ \ 2x \ \ -1]\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0$، عدد غیرصفر x، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱۲. در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$، مجموع جواب‌های x کدام است؟ $(x \in \mathbb{R})$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} c & d \\ b & a \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -d & -c \\ -b & -a \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -c & -d \\ -b & -a \end{bmatrix}$

۱۴. ماتریس‌های مربعی A و B مفروض‌اند. اگر $A^2 = A$, $B^2 = B$ باشند و داشته باشیم $AB = BA$، در آن‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $(A+B-AB)^2 = A^2 + B^2 + A^2B^2$ ۲) $(A+B-AB)^2 = -A-B+AB$

۳) $(A+B-AB)^2 = A-B-AB$ ۴) $(A+B-AB)^2 = A+B-AB$

۱۵. ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ A و B مفروض‌اند. اگر $AB = A$ و $BA = B$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $A^2 - B^2 = A + B$ ۲) $A^2 = B^2$ ۳) $A^2 + B^2 = A + B$ ۴) $A^3 = B^3$

۱۶. مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۹۹ ۴) ۱۰۱

۱۷. اگر $A^2 = A$ و $B = 2A - I$، در این‌صورت $A^3 + B^3$ کدام است؟

۱) $2A + B$ ۲) $A + 2B$ ۳) $A + B$ ۴) $A - B$

۱۸. اگر $\begin{bmatrix} a & b & c \\ -1 & 1 & 3 \\ d & e & f \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) -3 ۴) -6

۱۹. اگر $A^2 = 5A - 2I$، آن‌گاه A^3 کدام است؟

۱) $23A - 10I$ ۲) $25A - 10I$ ۳) $27A - 10I$ ۴) $25A - 12I$

۲۰. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB^2 = B^2A$، آن‌گاه به‌ازای کدام مقدار حقیقی k رابطهٔ $AB = kBA$ برقرار است؟

۱) فقط -1 ۲) ± 1 ۳) فقط ۱ ۴) هر مقدار دلخواه مخالف صفر

۲۱. ماتریس‌های مربعی A و B مفروض‌اند. اگر $BA = -AB$ باشد، ماتریس $BA^2 - A^2B$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) AB ۲) BA ۳) $\bar{O}$ ۴) I

۲۲. اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $AB - BA = I$ آن‌گاه حاصل $AB^2 - B^2A$ برابر کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $2I$ ۳) $2A$ ۴) $2B$

۲۳. اگر A و B ماتریس‌های مربع برابر باشند، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $AB = BA \Rightarrow BA^n = A^nB$ ۲) $AB = BA \Rightarrow (BA)^n = B^nA^n$

۳) $A^n = B^n \Rightarrow A = B$ ۴) $A = B \Rightarrow A^n = B^n$

۲۴. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ باشد، حاصل $x+y$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲ ۲) -1

۳) ۳ ۴) چنین ماتریس‌هایی وجود ندارند.

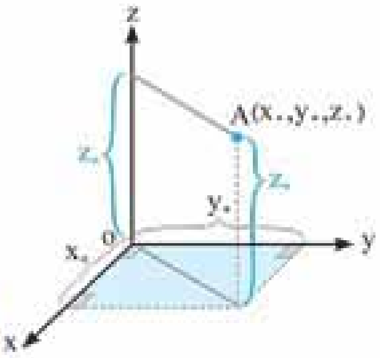
۲۵. ماتریس‌های قطری A و B از مرتبهٔ ۳ مفروض‌اند. اگر $AB = 2I$ و $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A+B)^2(A^2+B^2)$ کدام است؟

۱) I ۲) $6I$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

۲۶. در ماتریس‌های $A = B + C$ حاصل $A^2 + B^2 - AB - BA$ کدام است؟

۱) $-C^2$ ۲) C^2 ۳) $\bar{O}$ ۴) C

نکته:



① فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

الف) از صفحهٔ xoy برابر است با $|z_۰|$.

ب) از صفحهٔ xoz برابر است با $|y_۰|$.

پ) از صفحهٔ yoz برابر است با $|x_۰|$.

فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xoy، زیرا طول عمود رسم شده از نقطهٔ A بر صفحهٔ xoy را نشان می‌دهد.

ترفندمحاسباتی: فاصلهٔ یک نقطه در فضا، از هر صفحهٔ مختصات با قدرمطلق مؤلفهٔ غایبِ آن صفحه برابر است.

برای نمونه: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۵,-۴)$ از صفحهٔ xoy برابر است با $|-۴|=۴$.

تست: چند نقطه در فضا وجود دارد که فاصله‌اش از صفحه‌های yoz ،xoz و xoy به‌ترتیب ۵، ۲ و ۳ باشد؟

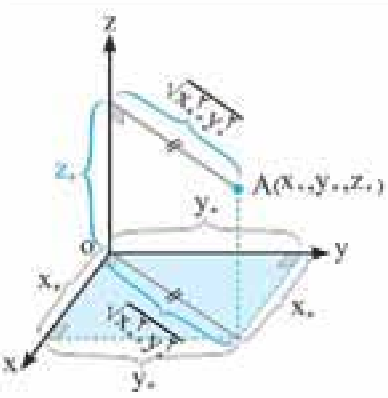
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ گزینه ۴ اگر نقطهٔ موردنظر را $(x_۰,y_۰,z_۰)$ در نظر بگیریم، با توجه به فرض داده‌شده، از آن‌جایی که فاصلهٔ این نقطه از صفحه‌های yoz ،xoz و xoy به‌ترتیب ۵، ۲ و ۳ است، پس:

$$\begin{cases} |x|=۵ \Rightarrow x=\pm ۵ \\ |y|=۲ \Rightarrow y=\pm ۲ \\ |z|=۳ \Rightarrow z=\pm ۳ \end{cases}$$

بنابراین برای هر مؤلفهٔ این نقطه دو مقدار (دو حالت) وجود دارد و لذا طبق اصل ضرب، برای این نقطه، $۲\times۲\times۲=۸$ حالت مختلف می‌توان یافت. این ۸ حالت عبارت‌اند از:

$$(۵,۲,۳)\ ,\ (۵,۲,-۳)\ ,\ (۵,-۲,۳)\ ,\ (۵,-۲,-۳)$$
$$(-۵,۲,۳)\ ,\ (-۵,۲,-۳)\ ,\ (-۵,-۲,۳)\ ,\ (-۵,-۲,-۳)$$



② فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

الف) از محور zها برابر است با $\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}$.

ب) از محور yها برابر است با $\sqrt{x_۰^۲+z_۰^۲}$.

پ) از محور xها برابر است با $\sqrt{y_۰^۲+z_۰^۲}$.

- در شکل، فاصلهٔ A از محور zها، همان طول عمود رسم شده از نقطهٔ A بر محور zهاست، که با قطر مستطیل به ضلع‌های $x_۰$ و $y_۰$، واقع در صفحه xoy (مستطیل رنگی) برابر است.

ترفندمحاسباتی: فاصلهٔ یک نقطه در فضا، از هر محور مختصات با جذر مجموع مربع‌های مؤلفه‌های غایبِ آن محور برابر است.

برای نمونه: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۵,-۴)$ از محور yها برابر است با $\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲}=۲\sqrt{۵}$.

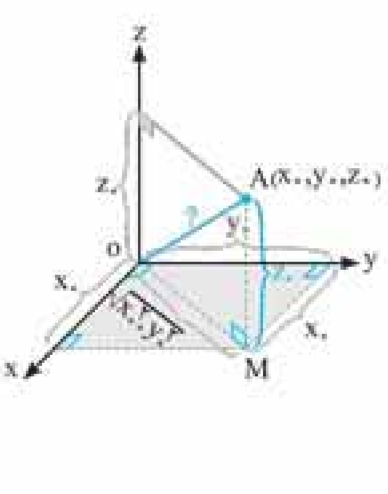
تست: اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳m+۲,-۲\sqrt{۲},۲n+۳)$ از محور xها برابر با $۲\sqrt{۶}$ باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) $-۲/۵,۰/۵$ ۲) $-۲/۵,۱/۵$ ۳) $۳/۵,۰/۵$ ۴) $-۳/۵,۰/۵$

پاسخ گزینه ۴ فاصلهٔ A از محور xها برابر با $\sqrt{(-۲\sqrt{۲})^۲+(۲n+۳)^۲}$ می‌باشد. پس طبق فرض داده‌شده داریم:

$$\sqrt{(-۲\sqrt{۲})^۲+(۲n+۳)^۲}=۲\sqrt{۶}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(-۲\sqrt{۲})^۲+(۲n+۳)^۲=۲۴$$

$$\Rightarrow ۸+۴n^۲+۱۲n+۹=۲۴\Rightarrow ۴n^۲+۱۲n-۷=۰\xrightarrow{\div ۴}n^۲+۳n-\frac{۷}{۴}=۰\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}n=۰/۵,-۳/۵$$



③ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲}$

- برای اثبات، کافی است در مثلث قائم‌الزاویه OAM (شکل مقابل)، قضیهٔ فیثاغورس را به کار ببرید.

واضح است که: $|OA|=\sqrt{(\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲})^۲+z_۰^۲}\Rightarrow |OA|=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲}$

برای نمونه: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,-۲,۴)$ از مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{۵^۲+(-۲)^۲+۴^۲}=۳\sqrt{۵}$ است.

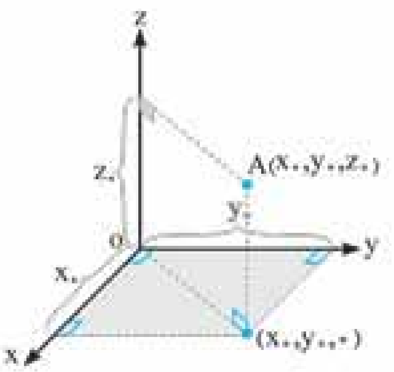
تست: فاصلهٔ یک نقطه در فضا، از محور x ها، y ها و z ها به‌ترتیب $\sqrt{۵}$، ۵ و $۲\sqrt{۵}$ می‌باشد. فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۷

پاسخ (گزینه ۲) اگر نقطهٔ موردنظر را $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ در نظر بگیریم، فاصلهٔ آن را از محور x ها، y ها و z ها به‌ترتیب $\sqrt{y_۰^۲+z_۰^۲}$، $\sqrt{x_۰^۲+z_۰^۲}$ و $\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}$ است. پس طبق فرض داده‌شده داریم:

$$\left.\begin{cases}\sqrt{y_۰^۲+z_۰^۲}=\sqrt{۵} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y_۰^۲+z_۰^۲=۵\\ \sqrt{x_۰^۲+z_۰^۲}=۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x_۰^۲+z_۰^۲=۲۵\\ \sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}=۲\sqrt{۵} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x_۰^۲+y_۰^۲=۲۰\end{cases}\right\} \xrightarrow{+} ۲(x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲)=۵۰ \xrightarrow{\div ۲} x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲=۲۵$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$



۴) مختصات تصویر قائم (پای عمود) نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

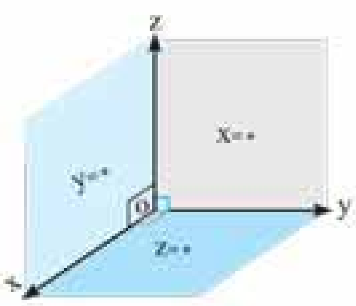
الف) روی صفحهٔ xoy عبارت است از $(x_۰,y_۰,۰)$.

ب) روی صفحهٔ xoz عبارت است از $(x_۰,۰,z_۰)$.

پ) روی صفحهٔ yoz عبارت است از $(۰,y_۰,z_۰)$.

ترفند محاسباتی: در مختصات تصویر قائم (پای عمود) هر نقطه در فضا، روی هر صفحهٔ مختصات، مؤلفهٔ غایب همان صفحه، برابر با صفر می‌شود و مؤلفه‌های هم‌نام با آن صفحه تغییر نمی‌کنند.

برای نمونه: مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(۵,-۱,۴)$ روی صفحهٔ yoz عبارت است از $(۰,-۱,۴)$.



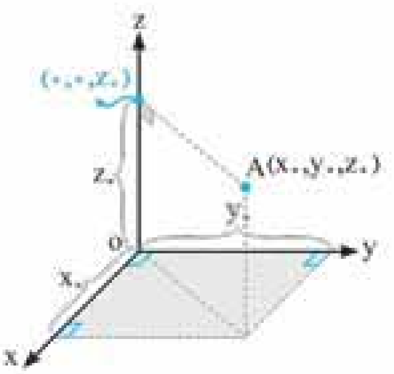
نتیجه: الف) معادلهٔ صفحهٔ xoy عبارت است از $z=۰$.

ب) معادلهٔ صفحهٔ xoz عبارت است از $y=۰$.

پ) معادلهٔ صفحهٔ yoz عبارت است از $x=۰$.

- برای اثبات درستی نتیجهٔ بالا، کافی است به این نکته توجه کنید.

برای نمونه: مختصات تمام نقطه‌های واقع در صفحهٔ xoy، دارای $z=۰$ هستند و هر نقطه‌ای که در مختصات آن، $z=۰$ باشد، واقع در صفحهٔ xoy است.



۵) مختصات تصویر قائم (پای عمود) نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

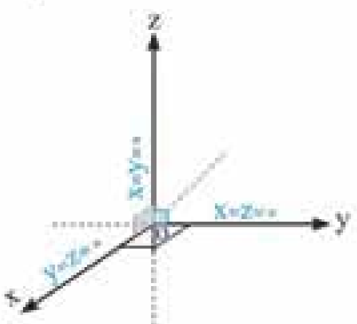
الف) روی محور z ها عبارت است از $(۰,۰,z_۰)$.

ب) روی محور y ها عبارت است از $(۰,y_۰,۰)$.

پ) روی محور x ها عبارت است از $(x_۰,۰,۰)$.

ترفند محاسباتی: در مختصات تصویر قائم (پای عمود) هر نقطه در فضا، روی هر محور مختصات، مؤلفه‌های غایبِ همان محور، برابر با صفر می‌شود و مؤلفهٔ هم‌نام با آن محور تغییر نمی‌کند.

برای نمونه: مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(۲,۳,-۱)$ روی محور x ها عبارت است از $(۲,۰,۰)$.

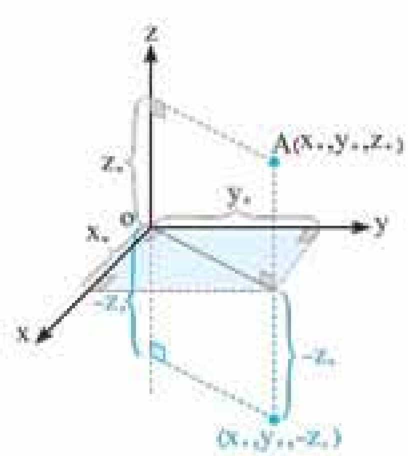


نتیجه: الف) معادلهٔ محور z ها عبارت است از $x=y=۰$.

ب) معادلهٔ محور y ها عبارت است از $x=z=۰$.

پ) معادلهٔ محور x ها عبارت است از $y=z=۰$.

- برای اثبات درستی نتیجهٔ بالا، کافی است به این نکته توجه کنید که به عنوان مثال، مختصات تمام نقطه‌های واقع بر محور z ها، دارای $x=۰$ و $y=۰$ هستند و هر نقطه‌ای که در مختصات آن $x=y=۰$ باشد، روی محور z ها واقع است.



۶) مختصات قرینهٔ (بازتاب) نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$:

الف) نسبت به صفحهٔ xoy عبارت است از $(x_۰,y_۰,-z_۰)$.

ب) نسبت به صفحهٔ xoz عبارت است از $(x_۰,-y_۰,z_۰)$.

پ) نسبت به صفحهٔ yoz عبارت است از $(-x_۰,y_۰,z_۰)$.

ترفند محاسباتی: در مختصات قرینهٔ (بازتاب) هر نقطه در فضا، نسبت به هر صفحهٔ مختصات، مؤلفه غایبِ همان صفحه، قرینه می‌شود و مؤلفه‌های هم‌نام با آن صفحه تغییر نمی‌کنند.

برای نمونه: مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(۵,-۲,-۴)$ نسبت به صفحهٔ yoz، عبارت است از $(-۵,-۲,-۴)$.

تست: وجه‌های مکعب‌مستطیل توسط شش صفحه به معادلات $x=1$، $x=3$، $y=1$، $y=4$، $z=-2$ و $z=2$ مشخص شده‌اند. حجم این مکعب‌مستطیل کدام است؟

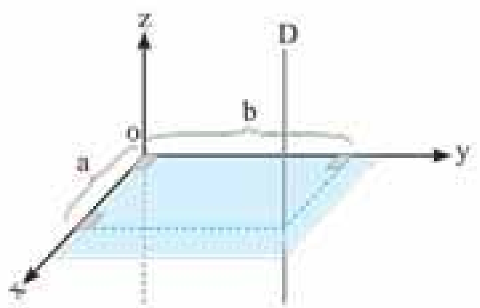
۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

پاسخ گزینه ۱ از آن‌جایی که فاصلهٔ دو صفحهٔ $x=1$، $x=3$ برابر با $3-1=2$، فاصلهٔ دو صفحهٔ $y=1$ و $y=4$ برابر با $4-1=3$ و فاصلهٔ دو صفحهٔ $z=-2$ و $z=2$ برابر با $2-(-2)=4$ است، پس طول، عرض و ارتفاع این مکعب‌مستطیل به‌ترتیب ۲، ۳ و ۴ می‌باشد. در نتیجه حجم آن $2\times3\times4=24$ است.

خط‌های موازی با محورهای مختصات (عمود بر صفحات مختصات)

- اگر خطی موازی با یکی از محورهای مختصات باشد، آن‌گاه عمود بر صفحهٔ مختصاتی است که بر آن محور عمود می‌باشد.
- اگر خطی عمود بر یک صفحهٔ مختصات باشد، در معادلهٔ آن خط مؤلفه‌های هم‌نام با آن صفحه برابر با مقدار ثابت هستند.

به‌طور کلی سه حالت وجود دارد:



۱) خط D موازی با محور zها است.

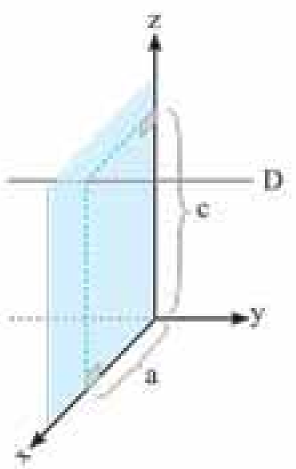
محور zها عمود بر صفحهٔ xoy است

خط D عمود بر صفحهٔ xoy است.

در معادلهٔ خط D، مؤلفهٔ x و y برابر با مقدار ثابت اند.

$$D:\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$$

- توجه کنید در خط D، مؤلفهٔ z هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد، اما مؤلفه‌های x و y همواره ثابت‌اند.



۲) خط D موازی با محور yها است.

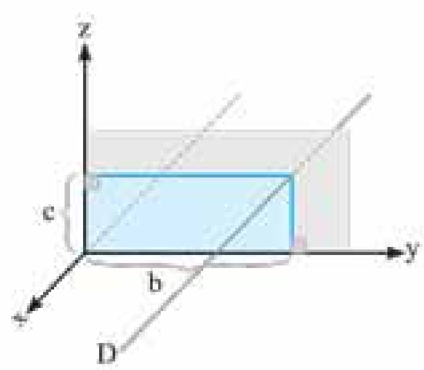
محور yها عمود بر صفحهٔ xoz است.

خط D عمود بر صفحهٔ xoz است.

در معادلهٔ خط D، مؤلفه‌های x و z برابر با مقدار ثابت اند.

$$D:\begin{cases}x=a\\z=c\end{cases}$$

- توجه کنید در خط D، مؤلفهٔ y هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد، اما مؤلفه‌های x و z همواره ثابت‌اند.



۳) خط D موازی با محور xها است.

محور xها عمود بر صفحهٔ yoz است.

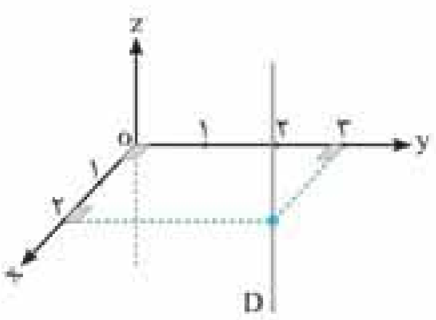
خط D عمود بر صفحهٔ yoz است.

در معادلهٔ خط D، مؤلفه‌های y و z برابر با مقدار ثابت اند.

$$D:\begin{cases}y=b\\z=c\end{cases}$$

- توجه کنید در خط D، مؤلفهٔ x هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد، اما مؤلفه‌های y و z همواره ثابت‌اند.

برای نمونه:



◄ رسم خط $D:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

- خط D در نقطه‌ای به طول ۲ و عرض ۳ بر صفحهٔ xoy ها عمود است (موازی با محور zها می‌باشد.)
- تمام نقطه‌های واقع بر خط D دارای $x=2$ و $y=3$ هستند، یعنی مؤلفه‌های x و y تمام نقاط آن ثابت‌اند.
- تمام نقطه‌های واقع بر خط D دارای z متغیرند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

معرفی فضای $\mathbb{R}^۲$

۳۵۷. اگر قرینهٔ نقطهٔ $A(۲-m,-۳n+۱)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم برابر با $A'(۵,۲)$ باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) ۲

۳۵۸. نقطهٔ $B(۳,۵)$ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به $M(۱,۴)$ است. اگر نقطهٔ M قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به $N(۱,-۲)$ باشد، مجموع مؤلفه‌های قرینهٔ A نسبت به C کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

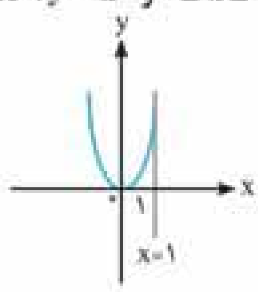
۳۵۹. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳n+۱,n-۱)$ از محور xها دو برابر فاصلهٔ آن از محور yها است. مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ A کدام است؟

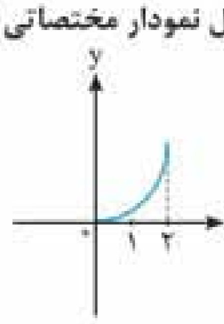
۱) $\frac{۱۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۷}$ ۴) $-\frac{۱۲}{۱۰}$

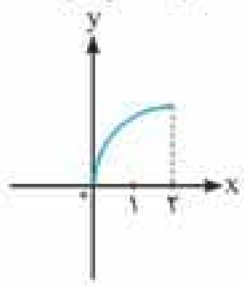
۳۶۰. نقاطی که مختصات آن‌ها در نامعادلات $y>۲x$ و $y>۴-x$ صدق می‌کنند در کدام نواحی مختصاتی قرار دارند؟

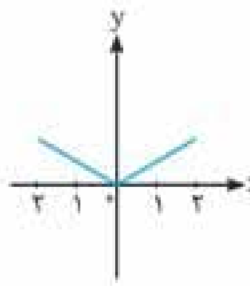
۱) اول و دوم ۲) دوم و سوم ۳) اول و سوم ۴) سوم و چهارم

۳۶۱. اگر $۰\le x\le ۲$ و $y=x^۲$، کدام شکل نمودار مختصاتی این معادله است؟ $(x,y\in\mathbb{R})$

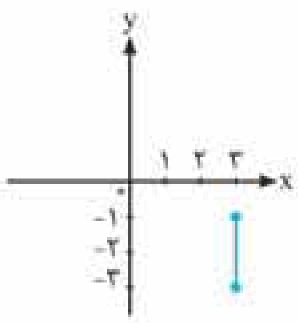
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۶۲. معادلهٔ نمودار مقابل به کدام صورت است؟ $(x,y\in\mathbb{R})$



۱) $\begin{cases}x=۳\\ y\le -۳\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=۳\\ -۳\le y\le -۱\end{cases}$

۳) $\begin{cases}x=۳\\ y\ge -۳\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=۳\\ -۳\le x\le -۱\end{cases}$

معرفی فضای $\mathbb{R}^۳$

۳۶۳. مکان هندسی نقطهٔ $A(x,۲,z)$، اگر $x,z\in\mathbb{R}$ باشد، کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) یک خط ۳) یک صفحه ۴) بی‌شمار صفحات موازی هم

۳۶۴. مکان هندسی $A=\left\{(x,y,z)\middle|x,y,z\in\mathbb{R},z+zy^۴=۰\right\}$ در فضای سه‌بعدی، کدام است؟

۱) محور yها ۲) صفحهٔ xy ۳) صفحهٔ xz ۴) محور zها

۳۶۵. مکعب ABCDEF در فضا مفروض است. اگر یال AB از این مکعب از تلاقی صفحات $x=۵$ و $x=-۱$ به‌وجود آید و دو صفحه دیگر موازی با صفحات مختصات باشند، حجم این مکعب کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۱۶ ۳) ۱۲۵ ۴) ۳۴۳

۳۶۶. اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,m+۱,-۲)$ از محور xها برابر $\sqrt{۵}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) صفر و ۱ ۲) ۲ و -۱ ۳) ۱ و ۲ ۴) صفر و -۲

۳۶۷. اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(m+۱,۱,-۲)$ از محور zها برابر $\sqrt{۲}$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xy کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۶۸. نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ $A(-۱,۱,۳)$ نسبت به مبدأ مختصات و نقطهٔ H تصویر قائم نقطهٔ A روی محور xها است. اندازهٔ $A'H$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۱۷}$

۱. گزینه ۴ تعداد درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A برابر با n است. پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس n است.
برای پیدا کردن تعداد درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، باید تعداد درایه‌های روی قطر اصلی آن را از کل درایه‌ها کم کنیم و در نهایت عدد حاصل را نصف کنیم: $\frac{n^2-n}{2}$

پس مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی برابر $\frac{n^2-n}{2}$ است.
در نهایت برای خواستهٔ مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی}}{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}}=\frac{\frac{n^2-n}{2}}{n}=\frac{n-1}{2}$$

۲. گزینه ۱ در ماتریس قطری، همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی باید صفر باشند. در این سؤال یعنی درایه‌های به شکل $\frac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4}$ باید برابر صفر شوند. بنابراین:

$$2x^2-9x+4=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(2x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2},x=4$$

با امتحان ریشه‌های این معادله در عبارت مخرج کسر، مشاهده می‌شود که $x=4$، مخرج را صفر می‌کند. پس فقط $x=\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

۳. گزینه ۳ طبق خاصیت تساوی در ماتریس‌ها، درایه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند. پس می‌توانیم چهار معادله داشته باشیم.

$$\begin{cases}x^2+3=4x\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1,3\\ 4=-x^2+5x\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow x=1,4\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌ها، $x=1$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$3x-y=2x+y\Rightarrow x=2y\Rightarrow 1=2y\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

پس: $x+y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

۴. گزینه ۴ از آن‌جایی که ماتریس‌های A و B دارای تعداد سطر و ستون برابر هستند، می‌توان عملیات خواسته شده را انجام داد. در این‌جا نیازی به پیدا کردن همهٔ درایه‌های ماتریس‌های A و B نداریم. در عملیات خواسته‌شده، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم خواسته شده است، پس محاسبهٔ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس‌های A و B کافی می‌باشد:

$$a_{23}=(3)^2+2\times(2)=13\ ,\ b_{23}=(2)^3-3=5$$

حالا با توجه به خواص ضرب عدد در ماتریس درایهٔ $2a_{23}$ برابر با $2\times 13=26$ و درایهٔ $-b_{23}$ برابر -5 می‌باشد و در نهایت درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس خواسته‌شده برابر با $-5+26=21$ است.

۵. گزینه ۳ حاصل‌ضرب‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}c&5\\3&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\b&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3c+5b&c+35\\9+ab&3+7a\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}3&1\\b&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&5\\3&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3c+3&15+a\\bc+21&5b+7a\end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن یک درایهٔ متناظر در هر دو ماتریس حاصل داریم:

$$(AB)_{12}=(BA)_{12}\Rightarrow c+35=15+a\Rightarrow c-a=-20$$

۶. گزینه ۲ اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، تساوی $AB=BA$ برقرار می‌شود.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&-3\\2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-3\\3&-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2-3a&4-3b\\3-2a&-6-2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&1\\-2a+3b&-3a-2b\end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های مساوی، درایه‌های متناظر با هم برابرند. از تساوی درایه‌های 1×1 یعنی $-2-3a=-8$، مقدار a مساوی ۲ می‌شود. از تساوی درایه‌های 2×1 داریم:

$$3-2a=-2a+3b\Rightarrow b=1\xrightarrow{a=2}a+b=2+1=3$$

۷. گزینه ۱ از آن‌جایی که حاصل‌ضرب ماتریسی، یک ماتریس قطری است، پس درایه‌هایی که روی قطر اصلی قرار نگرفته‌اند، باید صفر باشند.
یعنی درایه‌های x_{12} و x_{21} از ماتریس حاصل باید صفر باشند.

$$\begin{bmatrix}-2a&-2\\2&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots&2a+4\\6-2b&\dots\end{bmatrix}$$

از معادلات $2a+4=0$ و $6-2b=0$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر -2 و ۳ به‌دست می‌آیند. در نتیجه حاصل $a+b$ برابر با ۱ است.

۸. گزینه ۲ می‌دانیم ماتریس حاصل، یک ماتریس 2×2 است. (چرا؟) پس برای آنکه یک ماتریس قطری 2×2 داشته باشیم، باید درایه‌های a_{12} و a_{21} برابر صفر باشند. پس:

$$a_{12}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}x&-1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow -2x+4=0\Rightarrow x=2$$

$$a_{21}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}2&3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\y\end{bmatrix}=0\Rightarrow 4+3+y=0\Rightarrow y=-7$$

۹. گزینه ۴ ماتریس‌های B و C از مرتبهٔ 2×3 هستند. می‌دانیم در ضرب ماتریسی AB تعداد سطرها، با تعداد سطرهای ماتریس A برابر است. پس ماتریس A حتماً دارای ۲ سطر است. از طرفی ضرب ماتریسی AB وقتی ممکن است که تعداد ستون ماتریس A با تعداد سطر ماتریس B برابر باشد، پس ماتریس A دارای ۲ ستون می‌باشد. $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

$$C=AB\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3a+b&a-b&2a+b\\-3c+d&c-d&2c+d\end{bmatrix}$$

از تساوی درایه‌های متناظر سطر اول از هر دو ماتریس مساوی داریم:

$$-3a+b=-1\ ,\ a-b=2\ ,\ 2a+b=1$$

از حل معادلات $-3a+b=-1\ ,\ a-b=2$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{5}{2}$ به‌دست می‌آیند. که این مقادیر در رابطهٔ $2a+b=1$ صادق نیستند، زیرا $2(\frac{-1}{2})-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}\neq 1$، پس ماتریسی مانند A وجود ندارد.

۱۰. گزینه ۲ ماتریس سمت راست دارای سه سطر است. بنابراین ماتریس A سه سطر دارد. از طرفی برای اینکه ماتریس A را در ماتریس $B=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$ ضرب کرد، باید تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. پس ماتریس A از مرتبهٔ 2×3 می‌باشد.

$$A\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&d\\c&d\\e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3a+4b&-a+2b\\3c+4d&-c+2d\\3e+4f&-e+2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن درایه‌های متناظر، پس از حل دستگاه‌های دو معادله دومجهولی، به‌ترتیب مقادیر دوتایی‌های (a,b)، (c,d) و (e,f) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}3a+4b=1\\-a+2b=2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{-3}{5}\ ,\ b=\frac{7}{10}$$

$$\begin{cases}3c+4d=-1\\-c+2d=0\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{1}{5},\ d=-\frac{1}{10}$$

$$\begin{cases}3e+4f=3\\-e+2f=5\end{cases}\Rightarrow e=-\frac{7}{5},\ f=\frac{9}{5}$$

بنابراین بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر $f=\frac{9}{5}$ است.

۱۱. گزینه ۱

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x & 2x & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\4 & 0 & -2\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}11x-1 & -x-2 & -3x\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}11x-1 & -x-2 & -3x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow(11x-1)\cdot x+(-x-2)\cdot(2x)+)-(-3x)(-1)=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-2x=0\Rightarrow x\cdot(9x-2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ \frac{2}{9}$$

۱۲. گزینه ۱

$$\begin{bmatrix}x & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & -1 & 1\\2 & x & 3\\-1 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{0}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x^2+3 & x+1 & 2x+6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{0}$$

$$\Rightarrow 2(x^2+3)+x(x+1)-(2x+6)=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+6+x^2+x-2x-6=0\Rightarrow 3x^2-x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\x=0\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{1}{3}$$

۱۳. گزینه ۱ ماتریس A را جای‌گذاری کرده و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c & -d\\-a & -b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-c & -d\\-a & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & c\\b & a\end{bmatrix}$$

۱۴. گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها، ابتدا توان دوم ماتریس $A+B-AB$ را به‌دست می‌آوریم: $(A+B-AB)^2=(A+B-AB)(A+B-AB)$

$$=A^2+AB-A^2B+BA+B^2-BAB-ABA-AB^2+ABAB$$

طبق فرض می‌دانیم $AB=BA$ ، $B^2=B$ و $A^2=A$ ، پس:

$$=A+\cancel{AB}-\cancel{AB}+\cancel{AB}+B-ABB-BAA-\cancel{AB}+BAAB$$
$$-ABB-BAA-\cancel{AB}+BAAB$$
$$=A+B-A\underbrace{B^2}_{B}-B\underbrace{A^2}_{A}+B\underbrace{A^2}_{A}B$$
$$=A+B-AB-\underbrace{BA}_{AB}+\underbrace{BA}_{AB}B=A+B-AB-AB+A\underbrace{B^2}_{B}$$
$$=A+B-2AB+AB=A+B-AB$$

۱۵. گزینه ۳ ماتریس‌های A^2 و B^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=(AB)^2=A\underbrace{BA}_{B}B=\underbrace{AB}_{A}B=AB=A$$

$$B^2=(BA)^2=B\underbrace{AB}_{A}A=\underbrace{BA}_{B}A=BA=B$$

بنابراین: $A^2+B^2=A+B$

۱۶. گزینه ۴ در این‌جا، حاصل‌ضرب چند ماتریس اولیه را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم نتیجه‌گیری استقرایی کنیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots$$

پس می‌توان گفت که وقتی حاصل‌ضرب‌های قبلی در ماتریسی مثل $\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}$ ضرب می‌شوند، ماتریس حاصل، همان $\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}$ می‌باشد. بنابراین ماتریس حاصل‌ضرب‌های فوق برابر ماتریس آخر یعنی $\begin{bmatrix}1 & 100\\0 & 0\end{bmatrix}$ می‌باشد که مجموع درایه‌هایش برابر ۱۰۱ است.

۱۷. گزینه ۳ از تساوی $A^2=A$ در می‌یابیم که ماتریس A خود توان است. پس: $A^3=A$.

حال برای یافتن B^3، توجه داریم که ماتریس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است، پس به کمک اتحادها داریم:

$$B^3=(2A-I)^3$$
$$\Rightarrow B^3=(2A)^3+3(2A)^2(-I)+3(2A)(-I)^2+(-I)^3$$
$$=8A^3-12A^2+6A-I=2A-I=B\Rightarrow A^3+B^3=A+B$$

۱۸. گزینه ۲ واضح است که ماتریس A از مرتبهٔ 1×3 می‌باشد. (چرا؟) پس فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}$ است. داریم:

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}_{3\times 1}\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}_{1\times 3}=\begin{bmatrix}a & b & c\\3 & 1 & -1\\d & e & f\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2x & 2y & 2z\\x & y & z\\3x & 3y & 3z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\3 & 1 & -1\\d & e & f\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{از سطر دوم}} x=3,\ y=1,\ z=-1$$
$$\xrightarrow{\text{از سطر اول}} a=2x=6,\ b=2y=2,\ c=2z=-2$$
$$\Rightarrow a+b+c=6$$

۱۹. گزینه ۱

$$A^2=5A-2I\xrightarrow{A\times}A^3=5A^2-2AI$$

ماتریس AI برابر ماتریس A می‌شود. داریم:

$$A^3=5A^2-2A\xrightarrow{A^2=5A-2I}A^3=5(5A-2I)-2A$$
$$\Rightarrow A^3=25A-10I-2A=23A-10I$$

۲۰. گزینه ۲

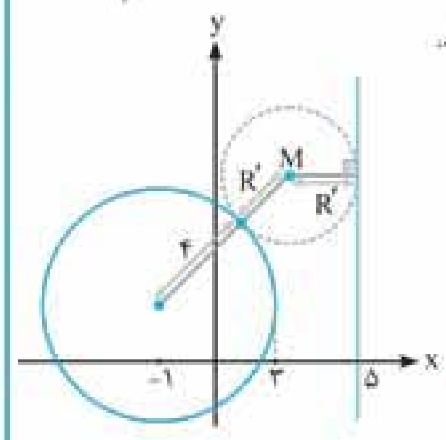
$$AB^2=B^2A\Rightarrow\underbrace{AB}_{kBA}B=BBA\Rightarrow kB\underbrace{AB}_{kBA}=BBA$$

$\downarrow$ از فرض $AB=kBA$ $\qquad$ $\downarrow$ از فرض $AB=kBA$

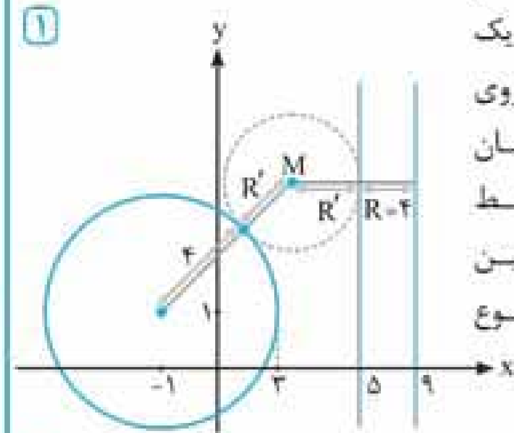
$$\Rightarrow kB(kBA)=BBA\Rightarrow k^2BBA=BBA$$
$$\Rightarrow k^2=1\Rightarrow k=\pm 1$$

۳۵۰. (گزینه ۳) از معادلهٔ دایره $R=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-2)^2-4(-14)}=4$ و مختصات مرکز $(-1,1)$ به‌دست می‌آید.

مطابق شکل (۱) نقطهٔ M روی سهمی به کانون F قرار دارد، زیرا از یک نقطهٔ ثابت و خط ثابت به یک فاصله است. اگر خط $x=5$ را به اندازهٔ شعاع دایرهٔ حاصل به طرف راست انتقال دهیم، به شکل (۲) می‌رسیم. در این حالت نقطهٔ M از مرکز دایرهٔ فوق و خط $x=9$ به یک فاصله می‌باشد. پس نقطهٔ M روی سهمی به کانون $F(-1,1)$ (همان مرکز دایرهٔ داده شده) و خط هادی $x=9$ قرار دارد. رأس این سهمی نقطهٔ $S(4,1)$ با مجموع مختصات ۵ می‌باشد.



(۱)



(۲)

۳۵۱. (گزینه ۱) اگر مختصات نقطهٔ M را به‌صورت $M(x_0,y_0)$ در نظر بگیریم و معادله‌های ضمنی دو دایرهٔ C و C' را به‌ترتیب به‌صورت:

$$f(x,y)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$$

و

$$f'(x,y)=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2=0$$

در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases}p=f(x_0,y_0)=(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2-R^2\\ p'=f'(x_0,y_0)=(x_0-\alpha')^2+(y_0-\beta')^2-R'^2\end{cases}$$

از جمع این دو رابطه طبق فرض داریم: $p+p'=k$

$$\Rightarrow (x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2-R^2+(x_0-\alpha')^2+(y_0-\beta')^2-R'^2=k$$

$$\Rightarrow x_0^2-2\alpha x_0+\alpha^2+y_0^2-2\beta y_0+\beta^2-R^2$$

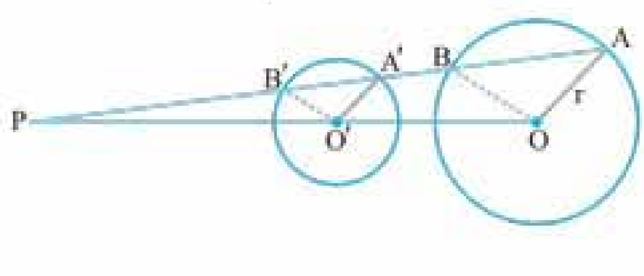
$$+x_0^2-2\alpha' x_0+\alpha'^2+y_0^2-2\beta' y_0+\beta'^2-R'^2-k=0$$

$$\Rightarrow 2x_0^2+2y_0^2+(-2\alpha-2\alpha')x_0+(-2\beta-2\beta')y_0$$

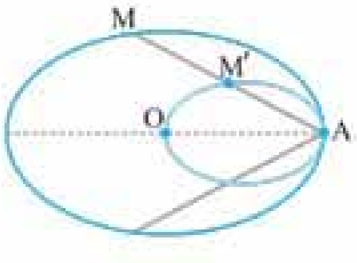
$$+(\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2-R^2-R'^2-k)=0$$

که معادلهٔ یک دایره است.

۳۵۲. (گزینه ۴) نقطهٔ A را روی دایرهٔ به مرکز O و شعاع r در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ P به A و به O وصل می‌کنیم. اگر نقطهٔ A' وسط پاره‌خط PA و O' وسط پاره‌خط PO فرض شود، آنگاه در مثلث POA، طبق حالت خاص قضیهٔ تالس، $O'A'=\frac{1}{2}OA=\frac{r}{2}$ به‌دست می‌آید. پس مکان‌هندسی نقطهٔ A'، وسط پاره‌خط واصل P به نقاط روی دایره، یک دایره به مرکز O' (وسط پاره‌خط PO) و شعاع $\frac{r}{2}$ است.

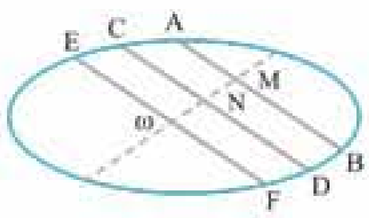


۳۵۳. (گزینه ۲) در شکل مقابل، وترهایی از بیضی، مانند وتر MA، در رأس A، روی بیضی همرس‌اند. اگر نقطهٔ M' وسط وتر MA فرض شود، آن‌گاه: $\frac{AM'}{AM}=\frac{1}{2}$

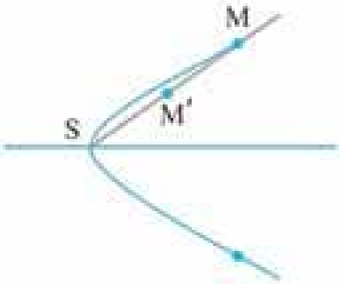


پس مکان‌هندسی نقطهٔ M'، یک بیضی متجانس با بیضی داده شده، به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است.

۳۵۴. (گزینه ۳) فرض می‌کنیم که وترهای AB و CD در بیضی شکل زیر با هم موازی هستند. قطر EF از بیضی، با وترهای AB و CD موازی است. واضح است که نقاط M و N (اوساط AB و CD) و نقطهٔ ω (مرکز بیضی) روی یک خط قرار دارند که قطر بیضی است. پس وسط‌های وترهای موازی با هم در یک بیضی، قطری از بیضی می‌باشد.

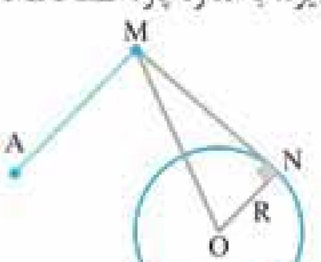


۳۵۵. (گزینه ۱) پاره‌خط SM در شکل روبه‌رو، یکی از وترهای سهمی است که از رأس S سهمی می‌گذرد. اگر نقطهٔ M' وسط SM باشد، داریم: $\frac{SM'}{SM}=\frac{1}{2}$



بنابراین می‌توان گفت که نقاطی مثل M' روی یک سهمی که مجانس سهمی مفروض است واقع شده و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۳۵۶. (گزینه ۳) در شکل زیر مماس MN بر دایره، با اندازهٔ پاره‌خط MA برابر است.



از مماس MN داریم:

$$MO=\sqrt{MN^2+R^2}$$

$$\xrightarrow{MN=MA} MO=\sqrt{MA^2+R^2}$$

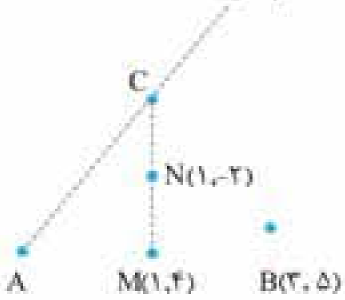
$$\Rightarrow MO^2-MA^2=R^2$$

سپس تفاضل مربعات فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت A و O برابر مقدار ثابت R^2 می‌باشد. که این مکان هندسی در حالت کلی خط است. (چرا؟)

۳۵۷. (گزینه ۱) در مختصات قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم، ابتدا جای طول و عرض نقطه عوض شده، سپس هر دو قرینه می‌گردند، پس داریم:

$$2-m=-2\Rightarrow m=4\ ,\ -3n+1=-5\Rightarrow n=2\Rightarrow m+n=6$$

۳۵۸. (گزینه ۱) فرض‌های مسئله مطابق شکل زیر است:



نقطهٔ N وسط MC قرار دارد پس:

$$\frac{x_C+1}{2}=1\Rightarrow x_C=1$$

$$\frac{y_C+4}{2}=-2\Rightarrow y_C=-8$$

از طرفی نقطهٔ M وسط AB است. بنابراین برای مختصات نقطهٔ A داریم:

$$\frac{x_A+3}{2}=1\Rightarrow x_A=-1\ ,\ \frac{y_A+5}{2}=4\Rightarrow y_A=3$$

نقطهٔ C وسط A و D قرار گرفته:

$$\frac{x_D+x_A}{2}=x_C\Rightarrow x_D=3\ ,\ \frac{y_D+y_A}{2}=y_C\Rightarrow y_D=-19$$

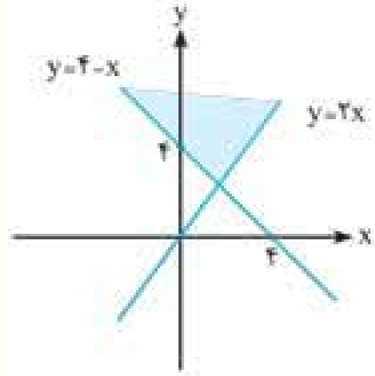
مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ C برابر ۱۶- = ۳ + ۱۹- است.

۳۵۹. (گزینه ۳) از آن‌جایی که فاصلهٔ نقطهٔ A از محور xها (قدرمطلق عرض نقطهٔ A) دو برابر فاصلهٔ آن از محور yها (قدرمطلق طول نقطهٔ A) می‌باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$|n-۱|=۲|۳n+۱| \Rightarrow \begin{cases} n-۱=۶n+۲ \Rightarrow n=-\frac{۳}{۵} \\ n-۱=-۶n-۲ \Rightarrow n=-\frac{۱}{۷} \end{cases}$$

مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ A برابر $۴n$ یعنی $-\frac{۱۲}{۵}$ یا $-\frac{۴}{۷}$ است.

۳۶۰. (گزینه ۱) نامعادله‌های $y>۲x$ و $y>۴-x$ را روی شکل مقابل نمایش می‌دهیم.



با توجه به شکل مقابل ناحیهٔ هاشورخورده در ناحیه‌های اول و دوم قرار دارند.

۳۶۱. (گزینه ۲) قسمتی از نمودار سهمی $y=x^۲$، که x بین ۰ تا ۲ می‌باشد، مورد نظر است.

۳۶۲. (گزینه ۲) واضح است که بخشی از خط $x=۳$ می‌باشد، که در آن $-۳\le y\le ۱-$ است.

۳۶۳. (گزینه ۳) نقاطی به مختصات $A(x,۲,z)$، که مؤلفهٔ y آن‌ها برابر ۲ می‌باشد، روی صفحهٔ $y=۲$ هستند.

۳۶۴. (گزینه ۲) با ساده کردن رابطهٔ مفروض در مسئله داریم:

$$z(۱+y^۴)=۰ \Rightarrow z=۰,\ (۱+y^۴=۰ \quad \text{(غیرقابل‌قبول)}$$

پس مؤلفهٔ z، برای تمام نقاط مجموعهٔ A برابر صفر می‌باشد. این بدان معناست که تمام نقاط مجموعهٔ A روی صفحهٔ xy قرار می‌گیرند.

۳۶۵. (گزینه ۲) از آن‌جایی که دو صفحهٔ مفروض با هم موازی هستند، پس اندازهٔ یال AB از مکعب ABCDEF برابر فاصلهٔ این دو صفحه یعنی ۶ می‌باشد، پس حجم مکعب برابر $۶^۳=۲۱۶$ است.

۳۶۶. (گزینه ۴) از آن‌جایی که فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,m+۱,-۲)$ از محور xها برابر $\sqrt{۵}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\sqrt{(m+۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۵} \Rightarrow (m+۱)^۲+۴=۵ \Rightarrow m=-۲,۰$$

۳۶۷. (گزینه ۲) فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xy همواره برابر قدرمطلق مؤلفهٔ z می‌باشد. پس جواب $|-۲|=۲$ است.

۳۶۸. (گزینه ۱) از آن‌جایی که نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ $A(-۱,۱,۳)$ نسبت به مبدأ مختصات است، مختصات آن به‌صورت $A'(۱,-۱,-۳)$ می‌باشد.

تصویر قائم نقطهٔ A روی محور xها، نقطهٔ $H(-۱,۰,۰)$ است.

پس اندازهٔ $A'H$ برابر با $\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۰+۱)^۲+(۰+۳)^۲}=\sqrt{۱۴}$ است.

۳۶۹. (گزینه ۲) اگر نقطهٔ موردنظر را $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ فرض کنیم، آن‌گاه طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} |z_۰|=۰ \Rightarrow z_۰=۰ \\ |y_۰|=۲ \Rightarrow y_۰=\pm۲ \\ |x_۰|=۱ \Rightarrow x_۰=\pm۱ \end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ A به صورت $(\pm۱,\pm۲,۰)$ می‌باشد که $۲\times۲\times۱=۴$ حالت دارد.

۳۷۰. (گزینه ۲) نقطهٔ $A'(m,n,p)$ قرینهٔ نقطهٔ $A(-۱,-۳,۲)$ نسبت به صفحهٔ $x=۳$ مفروض است. بنابراین مؤلفه‌های y و z نقاط A و A' با هم برابرند: $p=۲$ و $n=-۳$

میانگین مؤلفه‌های x در هر دو نقطهٔ A و A' برابر ۳ است:

$$\frac{m-۱}{۲}=۳ \Rightarrow m=۷$$

پس نقطهٔ A' به مختصات $(۷,-۳,۲)$ و مجموع مختصات آن $۷-۳+۲=۶$ است.

۳۷۱. (گزینه ۱) از آن‌جایی که قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به صفحهٔ xz، نقطهٔ $A'(۱,a,۳)$ می‌باشد، پس $A(۱,-a,۳)$ است.

تصویر نقطهٔ A روی صفحهٔ $x=۰$ یا yoz نقطهٔ $A''(c,-۱,b)$ است. پس $c=۰$، $b=۳$ و $-a=-۱$ یا $a=۱$ و در نتیجه مجموع $a+b+c$ برابر $۱+۳+۰=۴$ است.

۳۷۲. (گزینه ۳) قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b,c)$ نسبت به صفحهٔ $z=۰$ یا xoy، نقطهٔ $A'(a,b,-c)$ می‌باشد. قرینهٔ نقطهٔ $A'(a,b,-c)$ نسبت به محور zها، نقطهٔ $A''(-a,-b,-c)$ است. پس نقاط $A(a,b,c)$ و $A''(-a,-b,-c)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینهٔ یکدیگرند.

۳۷۳. (گزینه ۱) فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,۲,m-۱)$ از محور zها و صفحهٔ $z=۰$ (همان صفحهٔ xoy) به ترتیب $\sqrt{(-۱)^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$ و $|m-۱|$ می‌باشد. پس $|m-۱|=\sqrt{۵}$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,۲,m-۱)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{(-۱)^۲+۲^۲+(m-۱)^۲}=\sqrt{۱+۴+۵}=\sqrt{۱۰}$ است.

۳۷۴. (گزینه ۴) تصویر قائم نقطه‌های $A(a,-۱,۱)$ و $B(-۲,۲,-۱)$ روی صفحهٔ $x=۰$ به ترتیب $A'(۰,-۱,۱)$ و $B'(۰,۲,-۱)$ می‌باشد که اندازهٔ $A'B'$ عبارتست از: $|A'B'|=\sqrt{(۰)^۲+(۲+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۳}$

۳۷۵. (گزینه ۴) از آن‌جایی که در مکعب مستطیل مفروض، یک رأس آن مبدأ مختصات و سه رأس دیگر آن واقع بر محورهای مختصات ox، oy و oz به ترتیب با طول و عرض و ارتفاع ۴ و ۲- و ۶ می‌باشد. مختصات مرکز مکعب مستطیل $(\frac{۴}{۲},\frac{-۲}{۲},\frac{۶}{۲})$ یا $(۲,-۱,۳)$ است که فاصلهٔ آن از محور zها برابر $\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۵}$ می‌باشد.

۳۷۶. (گزینه ۲) مختصات نقطهٔ M، وسط BC به صورت زیر است:

$$M(\frac{۳+(-۵)}{۲},\frac{۲+۰}{۲},\frac{(-۶)+۲}{۲}) \Rightarrow M(-۱,۱,-۲)$$

میانهٔ نظیر ضلع BC، پاره‌خط AM است که اندازهٔ آن به ترتیب زیر بدست می‌آید:

$$|AM|=\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۱-۱)^۲+(۴+۲)^۲}=۷$$

۳۷۷. (گزینه ۱) اندازهٔ پاره‌خط AB برابر ۵ است. نقطهٔ C طوری در فضا قرار گرفته که فاصله‌اش از نقاط A و B به ترتیب ۲ و ۳ می‌باشد:

$$|AB|=۵,\ |CA|=۲,\ |CB|=۳$$

> **یادآوری:** اگر A، B و C سه نقطه باشند، درصورتی که نامساوی $|AC|<|AB|+|BC|$ برقرار گردد، نقاط A، B و C رئوس مثلث هستند. اگر $|AC|=|AB|+|BC|$ باشد، سه نقطهٔ A و B و C روی یک امتداداند.

از آن‌جایی که $|AB|=|CA|+|CB|$ است، نقاط A، B و C روی یک امتداد و فقط یک جواب برای C وجود دارد.