مقدمه

سپاس یکتای بی‌همتا را که بار دیگر زمان و توان نوشتن را به این کمترین عطا فرمود.

در اثنای پایه‌ریزی نظام جدید آموزشی و تغییر در جهت بهتر شدن شیوهٔ آموزش و یادگیری، دو کتاب «آمار و احتمال» و «ریاضیات گسسته» (در رشتهٔ ریاضی)، نسبت به کتاب‌های پیشین خود، دست‌خوش تغییراتی شدند و به ناچار مؤلفین را بر آن داشت تا پس از اِعمال تغییرات لازم، کتاب‌های جدیدی در این زمینه بازنویسی نمایند.

تعدّد کتاب‌های تألیف شده در زمینهٔ این دو درس، که هر یک از دید و سلیقهٔ خود به آن‌ها پرداخته‌اند، گویای اهمیت این دو درس در آزمون‌های سراسری می‌باشد. لذا بر آن شدیم تا کتابی جامع و در بر گیرندهٔ هر دو درس «آمار و احتمال» و «ریاضیات گسسته» به رشتهٔ تحریر درآوریم.

چون صوفیان به حالت رَقصند مقتدا   ما نیز هم به شعبده دستی برآوریم

البته بی‌هیچ ادعایی و اصلاً فاش می‌گوییم که ما در پیشگاه اساتید این دانش و فن، «از خاک کمتریم».

اما در مورد این کتاب مطالبی چند ارائه می‌گردد:

- در قسمت درسنامه سعی کرده‌ایم تمام مطالب مورد نیاز، جهت یادگیری و تسلط بر متن کتاب درسی، همراه با ارائهٔ نکته‌های مهم، ترفندهای آموزشی و راهبردهایی که مورد نیاز داوطلبان کنکور می‌باشد، مورد بحث و بررسی دقیق و موشکافانه قرار دهیم. در درسنامه، تست‌هایی مطرح نموده‌ایم که جنبهٔ آموزشی آن‌ها بسیار زیاد است، بنابراین در ابتدا مطالعهٔ درسنامه به همراه حل و بررسی تست‌های آن را به شدت توصیه می‌کنیم.
- در مورد مطالب جدیدی که در کتاب‌های آمار و احتمال و ریاضیات گسسته توسط مؤلفین محترم کتاب‌های درسی ارائه شده است، تمام تلاش خود را به کار بسته‌ایم، تا با مراجعه به کتاب‌های مرجع و مقاله‌ها و پایان‌نامه‌های معتبر داخلی و خارجی، این مباحث را مورد بررسی و بسط قرار دهیم، بنابراین بحث‌هایی از قبیل منطق ریاضی، آمار استنباطی، احاطه‌گری و مربع‌های لاتین برگرفته از متن کتاب‌های درسی و منابع مورد اشاره می‌باشند. هم‌چنین تا حد ممکن از ارائهٔ مطالبی که خارج از چارچوب کتاب‌های درسی می‌باشد، اجتناب کرده‌ایم. هرچند در بعضی موارد به جهت درک و فهم بیشتر، مطالبی تحت عنوان «یک گام فراتر» آورده شده است که مطالعهٔ آن‌ها اجباری نیست و فقط برای آن دسته از دانش‌پژوهانی که مایل به یادگیری مطالبی فراتر از چارچوب کتاب درسی می‌باشند، ارائه گردیده است.
- در انتهای هر مبحث «پرسش‌های چهار گزینه‌ای» شامل تست‌های مهم و مرتبط با کتاب‌های نظام آموزشی جدید از کنکور سراسری و نیز تست‌های مطرح شده در آزمون‌های معتبر به همراه سؤالات تألیفی ارائه نموده‌ایم.

ما در این کتاب تمام سعی خود را به کار بسته‌ایم تا این مجموعه از سؤال‌ها، جامع و برآورندهٔ نیازهای یک داوطلب کنکور باشد. پاسخ سؤال‌ها تا حد ممکن و در چارچوب بضاعت علمی نگارندگان، کاملاً تشریحی و مبتنی بر درسنامه‌ها ارائه شده است. تمام تلاش خود را به‌کار بسته‌ایم که هر آن‌چه مورد نیاز یک داوطلب کنکور رشتهٔ ریاضی است، در مجموعهٔ تست‌ها پوشش داده‌ایم. هرچند باز هم تأکید می‌کنیم که قبل از مراجعه به سؤال‌های چهار گزینه‌ای، مطالعه و تسلط بر درسنامهٔ هر قسمت از اولویت بیشتری برخوردار است.

سپاس از

▪ در پدید آمدن این اثر افراد بسیاری سهیم هستند. بر خود لازم می‌دانیم سپاس بی‌انتهای خود را تقدیم افرادی کنیم که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را در به ثمر رساندن این مجموعه یاری نموده‌اند:

◂ جناب **آقای احمد اختیاری**، مدیریت محترم انتشارات مهروماه که همواره پشتیبانی خود را از ما دریغ نکرده‌اند و در تمام مشکلات با روحیه‌ای وصف‌ناپذیر همراه ما بوده‌اند.

◂ جناب **آقای محمدحسین انوشه** مدیر شورای تألیف که زحمات زیادی را متقبل شده‌اند.

◂ جناب **آقای مهندس عباس اشرفی**، مدیر محترم گروه ریاضی که در تمام مراحل یار و یاور ما بوده‌اند و افتخار دوستی و همکاری با ایشان برایمان بسیار مغتنم است.

◂ دوست گرامی جناب **آقای مهندس روح‌الله مصطفی‌زاده**، که زحمت ویراستاری بخشی از کتاب را عهده‌دار بودند.

◂ **سرکار خانم سنور حریری**، مسئول ویراستاری، سرکار **خانم‌ها نارین رحیم‌زاده**، **هستی مخدوم** و جناب **آقای حامد شفیعی**، که زحمت ویراستاری و نمونه‌خوانی متن‌ها را به عهده داشتند.

◂ **سرکار خانم سمیه جباری**، مدیر توانمند واحد تولید، به همراه گروه بسیار حرفه‌ای و مسلط در امر تایپ، رسم شکل‌ها و صفحه‌آرایی تمام همت خود را به کار بسته‌اند. به ویژه **سرکار خانم رویا طبسی** (صفحه‌آرای بسیار چیره‌دست)، **خانم‌ها مینا محمدلو** و **فرحناز قاسمی** و جناب **آقای صمد ذوالفقاری** (تایپیست‌های مسلط و شکیبا) **سرکار خانم هستی فرهادپور** و **جناب آقای مرتضی ضیایی** (رسام‌های هنرمند) و **سرکار خانم زهرا فریدونی** (هماهنگ کنندهٔ امر تولید با پشتکار ستودنی)

◂ **جناب آقای فرهادی** مدیر محترم واحد هنری و همکاران خوبشان که دستی توانمند در تهیهٔ تصاویر داخل کتاب و طراحی جلد دارند و همواره ما را رهین منّت خویش نموده‌اند.

◂ **جناب آقای امیر انوشه** مسئول محترم واحد سایت و همکاران محترمشان به جهت سعی وافر در شناساندن کتاب در فضای مجازی

◂ **سرکار خانم‌ها فرزانه قنبری** مدیر روابط عمومی و **ساره کفاش‌زاده** به‌خاطر برقراری هماهنگی‌های لازمه و زحمات فراوانشان

و اما

هرچه هست از قامت ناساز بی‌اندام ماست.

◂ در انتها از تمام کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند صمیمانه درخواست می‌کنیم که کاستی‌های این کتاب را، چه در صورت و چه در محتوا، به ما گوشزد نمایند و نظرات سازندهٔ خود را آشکار سازند تا بتوانیم در چاپ(های) بعدی آن‌ها را برطرف نماییم. اهل دانش نیک می‌دانند که راه پویش علمی، نیازمند اصلاح و تغییر همیشگی است.

در آخر کتاب را به جوانان عزیز این مرز و بوم تقدیم می‌کنیم و تمام تلاشمان بر آن بوده است که نیازهای علمی این عزیزان برطرف گردد و هر آینه اگر این سعی‌مان هوده باشد، خوشا...

زمانه قرعهٔ نو می‌زند به نام شما　　　**خوشا شما که جهان می‌رود به کام شما**

تابستان ۹۷

مقدمه ویرایش آخر

آفریدگار دانا را سپاسگزاریم که فرصت ارائه ویراستی نو از کتاب حاضر را به مؤلفین عطا فرمود. در این ویراست، تغییرات زیر، اعمال شده است.

- درسنامه‌های کتاب تا حد ممکن مطابق نظام جدید آموزشی گردیده و مطالب حشو حذف شده است.
- مجموعهٔ سؤال‌های چهارگزینه‌ای، با حذف سؤال‌های ضعیف‌تر و قدیمی و افزودن تعدادی سؤال جدید و مفهومی، از غنای بیشتری برخوردار شده است.
- اشتباهات چاپی و علمی کتاب، هر آن‌چه که توسط خوانندگان تیزبین، ویراستاران با دقت و همکاران گرانقدر و دلسوز گوشزد شده و تا جایی که به چشم مؤلفین آمده، برطرف گردیده است.

در به ثمر رسیدن این ویراست بر خود لازم می‌دانیم از افرادی که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را یاری کرده‌اند، قدردانی کنیم، سپاس ویژهٔ خود را تقدیم می‌کنیم به:

- استاد بزرگ و خوش‌نام ریاضیات، جناب آقای **پیروز آل‌بویه** که نظارت علمی کتاب را عهده‌دار شدند.
- سرکار خانم **آزاده غنی‌فرد**، که مسئولیت ویراستاری گروه ریاضی را بر عهده دارند.
- آقایان **وحید جعفری** و **امیرحسین عباسی** که در امر ویراستای کتاب زحمات زیادی کشیدند.
- مدیر محترم واحد تولید سرکار خانم **مریم تاجداری**، همکار محترم‌شان جناب **آقای میلاد صفایی** و صفحه‌آرای توانا خانم **رویا طبسی** و رسام‌های پرتلاش، سرکار خانم **مریم صابری**، **میترا میرمصطفی** که زحمات وصف‌ناپذیری را متحمل شدند.

در انتها از تمامی کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند، تقاضا داریم که ما را از انتقادها و پیشنهادهای سازنده و به‌جای خود برخوردار نمایند و ارائه خدمتی هرچند ناچیز به جوانان این مرز و بوم، چراغ راه مؤلفین باشند.

تابستان ۱۴۰۰

استادان مشاور کتاب که از نظرات ارزندهٔ آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم: (به ترتیب حروف الفبا)

حسین بسطام، کیوان دارابی، محمد صحت‌کار، مهدی عبدالهی، مجید محمدی و رضا مهربانی

مجموعه - زیر مجموعه

مجموعه

مجموعه، دسته‌ای از اشیای دلخواه است که بدون هیچ ابهامی بتوان معلوم کرد که یک شیء معین در آن قرار دارد یا نه.

تست: کدام‌یک از گزاره‌های زیر بیانگر یک مجموعه <u>نیست</u>؟

۱) دستهٔ اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از عدد ۲۰   ۲) دستهٔ اعداد اول یک رقمی

۳) دسته‌ای شامل اعداد بزرگ   ۴) دستهٔ اعداد طبیعی مربع کامل بزرگ‌تر از عدد ۵۰

پاسخ گزینه۳ **بررسی گزینه‌ها:**

در مورد گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» به ترتیب مجموعه‌های $\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$، $\{2,3,5,7\}$ و $\{64,81,100,121,...\}$ قابل قبول هستند، زیرا در مورد هر عددی می‌توان تشخیص داد که متعلق به هریک از این سه مجموعه است یا نه، اما در مورد گزینهٔ «۳»، نمی‌توان در مورد عضوهای این مجموعه تصمیم قابل قبولی گرفت. مثلاً در مورد عدد ۱۰۰۰ دقیق نمی‌توان تعیین کرد که در این دسته قرار دارد یا خیر.

هشدار: مجموعه همواره **فاقد ترتیب** و **تکرار** است.

برای نمونه: مجموعه‌های $\{a,b,c\}$، $\{c,a,b\}$، $\{a,b,b,c\}$ و $\{a,a,a,b,c\}$ همگی یکسان‌اند.

تذکر: ۱ اشیائی که با هم مجموعه را تشکیل می‌دهند، **عضو** یا **عنصرهای** آن مجموعه نامیده می‌شوند.

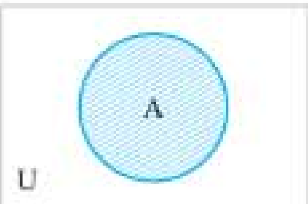
۲ اگر A یک مجموعه باشد، در صورتی که عضوی مانند x در مجموعهٔ A وجود داشته باشد، می‌نویسیم $x \in A$ و در صورتی که x متعلق به مجموعهٔ A نباشد می‌نویسیم $x \notin A$. بنابراین نماد $\in$، به معنای **عضویت** است.

تست: اگر $A=\{a,\{a\},\{\{b\}\}\}$ باشد. آن‌گاه کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟

۱) $\{a\}\in A$ ۲) $a\in A$ ۳) $\{b\}\in A$ ۴) $\{\{b\}\}\in A$

پاسخ گزینه۳ زیرا در مجموعهٔ A عضوی به شکل $\{b\}$ وجود ندارد.

۳ در هر بحث معین، عناصری مورد بررسی قرار می‌گیرند که همهٔ آن‌ها اعضای یک مجموعه به نام مجموعهٔ **مرجع (عام، جهانی)** هستند. مجموعهٔ مرجع را با حرف U نشان می‌دهیم.



۴ مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ **تهی** نام دارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش داده می‌شود. پس $\varnothing=\{\ \}$.

۵ برای مشخص کردن یک مجموعه دو روش وجود دارد:

الف) نام بردن (فهرست کردن) عضوهای مجموعه ب) معرفی خاصیت مشترک عضوهای مجموعه به زبان ریاضی (گزاره‌نما)

(توجه کنید که در روش دوم، باید مجموعه مرجع معین شود.)

۶ برای ایجاد یک درک شهودی از نظریهٔ مجموعه‌ها، از یک نمودار هندسی به نام **نمودار وِن** استفاده می‌کنیم. معمولاً مجموعهٔ مرجع را با مستطیل و سایر مجموعه‌های داخل مجموعهٔ مرجع را با دایره یا بیضی نمایش می‌دهیم.

تست: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، کمتر از ۴ عضو دارند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

الف) $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|\le 2\}$ ب) $B=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^3=m\}$

پ) $C=\{k\in\mathbb{R}\,|\,k^2-1=0\}$ ت) $D=\{a\in S\,|$ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس است $S\}$

ث) $E=\{2^x\times 3^y\,|\,x,y\in\mathbb{N},x+y=5\}$ ج) $F=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x^2-5x+6=0)\wedge(x^2\ge 5)\}$

چ) $G=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,(x^2-12x+35=0)\vee(x^2\le 10)\}$ ح) $H=\{\frac{x^2+4}{2x+2}\in\mathbb{Z}\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge x<5\}$

۱) B ، D ، G ، F ۲) B ، C ، F ، H ۳) A ، G ، H ، F ۴) B ، D ، F ، A

پاسخ گزینه۲ الف) می‌دانیم $|x|\le 2$ نتیجه می‌دهد که $-2\le x\le 2$. پس عضوهای مجموعهٔ A اعداد صحیح متعلق به بازهٔ به‌دست آمده هستند:

$$A=\{-2,-1,0,1,2\}$$

ب)

$$m^3=m\Rightarrow m^3-m=0\Rightarrow m\cdot(m^2-1)\Rightarrow m=0,\pm 1\Rightarrow B=\{-1,0,1\}$$

پ) پس از حل معادلهٔ $k^2-1=0$ داریم:

$$C=\{-1,1\}$$

ت) با توجه به مبحث احتمال داریم: $D=\{1,2,3,4,5,6\}$

ث) ابتدا جفت اعداد طبیعی x و y را می‌یابیم که در $x+y=5$ صدق کنند.

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \quad E=\{2^1\times 3^4, 2^2\times 3^3, 2^3\times 3^2, 2^4\times 3^1\}=\{162,108,72,48\}$$

ج) از حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-5x+6=0$ درمی‌یابیم که $x=2$ یا $x=3$ قابل قبول است که فقط $x=3$ در گزارهٔ $x^2\geq 5$ صدق می‌کند. پس $F=\{3\}$. (با توجه به ترکیب عطفی xای قابل قبول است که در هر دو گزاره صدق کند.)

چ)
$$x^2-12x+35=0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-5)\cdot(x-7)=0 \Rightarrow (x=5)\vee(x=7)$$
$$x^2\leq 10 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\leq\sqrt{10} \Rightarrow -\sqrt{10}\leq x\leq\sqrt{10}$$

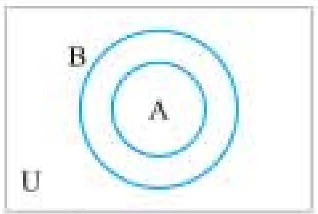
اما $\sqrt{10}\simeq 3/1$ و در نتیجه اعداد صحیح متعلق به بازهٔ به‌دست آمده عبارت‌اند: از ۳، ۲، ۱، ۰، ۱−، ۲− و ۳− بنابراین:
$G=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,5,7\}$

ح) برای یافتن عضوهای مجموعهٔ H، x را برابر اعداد ۴، ۳، ۲ و ۱ قرار می‌دهیم و حاصل عبارت $\frac{x^2+4}{3x+2}$ را می‌یابیم و در صورت صحیح بودن قبول می‌کنیم:

$$x=1\Rightarrow \frac{1^2+4}{3(1)+2}=1\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=3\Rightarrow \frac{3^2+4}{3(3)+2}=\frac{13}{11}\notin\mathbb{Z}$$
$$x=2\Rightarrow \frac{2^2+4}{3(2)+2}=1\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=4\Rightarrow \frac{4^2+4}{3(4)+2}=\frac{20}{14}\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین $H=\{1\}$. پس مجموعه‌های B، C، F و H کمتر از ۴ عضو دارند.

زیرمجموعه



مجموعهٔ A را یک **زیرمجموعه** از مجموعهٔ B می‌نامیم اگر و تنها اگر **هر** عضو A، عضوی از B باشد، در این‌صورت می‌نویسیم $A\subseteq B$. پس:
$$\boxed{A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x\in A\Rightarrow x\in B)}$$

- چنان‌چه عضوی در A وجود داشته باشد، به‌طوری که آن عضو متعلق به مجموعهٔ B نباشد، در این‌صورت A زیرمجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A\not\subseteq B$ پس:
$$\boxed{A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x\in A\wedge x\notin B)}$$

(توجه کنید که از نقیض سور عمومی و نقیض گزارهٔ شرطی استفاده شده است.)

تست: مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

$C=\{x \mid \text{است لوزی یک } x\}$ — $A=\{x \mid \text{است چهارضلعی یک } x\}$

$D=\{x \mid \text{است مربع یک } x\}$ — $B=\{x \mid \text{است مستطیل یک } x\}$

۱) $D\subseteq C$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $D\subseteq B$ ۴) $D\subseteq A$

پاسخ گزینه ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: درست است. از آنجایی که «هر مربع، یک لوزی است»، پس $D\subseteq C$.

گزینهٔ «۲»: نادرست است. چون «هر چهار ضلعی، لزوماً مستطیل نیست»، پس $A\not\subseteq B$.

گزینهٔ «۳»: درست است، می‌دانیم «هر مربع، مستطیل است»، پس $D\subseteq B$.

گزینهٔ «۴»: درست است. واضح است که «هر مربع یک چهار ضلعی است»، پس $D\subseteq A$.

فرض کنید $A=\{1,2,3,\dots,9\}$، $B=\{2,4,6,8\}$، $C=\{1,3,5,7,9\}$، $D=\{3,4,5\}$ و $E=\{3,5\}$ باشند. در کدام حالت مجموعهٔ X وجود ندارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) X و B عضو مشترکی ندارند.
۲) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$.
۳) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$.
۴) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$.

پاسخ گزینه ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: $X=C$ یا $X=E$ قابل قبول است.

گزینهٔ «۲»: $X=B$ یا $X=D$، زیرا $B\subseteq A$ ولی $B\not\subseteq C$ و در مورد $X=D$ نیز $D\subseteq A$ ولی $D\not\subseteq C$.

گزینهٔ «۳»: $X=E$، زیرا $E\subseteq D$ (تمام عضوهای E در D هستند)، ولی $E\not\subseteq B$ (زیرا مثلاً $3\in E$، در صورتی که $3\notin B$).

گزینهٔ «۴»: چنین Xای وجود ندارد، زیرا تمام عضوهای C در A هستند.

نکته: $\subseteq$ یا $\in$ مسئله این است:

خودِ دایره، در مربع دیده می‌شود $\Leftrightarrow \square \in \bigcirc$
تمام عضوهای دایره، در مربع دیده می‌شود $\Leftrightarrow \square \subseteq \bigcirc$

تست: اگر $A=\{a,b\}$ ، $B=\{a,b,\{a,b\}\}$ و $C=\{a,b,\{b\},\{a,b\}\}$ باشند، کدام گزاره نادرست است؟

۱) $A\in B$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $A\in C$ ۴) $B\in C$

پاسخ گزینه۴ واضح است که در مجموعهٔ C، عضوی به‌صورت $\{a,b,\{a,b\}\}$ دیده نمی‌شود. به عبارت دیگر خودِ B در C نیست. پس $B\notin C$. اما چون تمام عضوهای B در C دیده می‌شوند، پس $B\subseteq C$.

در مورد سایر گزینه‌ها، چون خودِ A در B و C دیده می‌شود، پس $A\in B$ و $A\in C$ و چون تمام عضوهای A در B دیده می‌شوند، بنابراین $A\subseteq B$ و به همین ترتیب $A\subseteq C$ نیز درست است.

کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ ۲) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

۳) $\varnothing=\{\varnothing\}$ ۴) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

پاسخ گزینه۳ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: می‌دانیم $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. به عبارت دیگر $\varnothing\subseteq\underset{\text{هر مجموعهٔ دلخواه}}{\square}$، پس گزینهٔ «۱»، یک گزارهٔ درست است.

گزینهٔ «۲»: واضح است که خودِ $\varnothing$ در $\{\varnothing\}$ دیده می‌شود، پس $\varnothing\in\{\varnothing\}$ و گزاره‌ای درست است.

گزینهٔ «۳»: واضح است که $\{\varnothing\}$ یک مجموعهٔ تهی نیست. مجموعه‌ای شامل نماد $\varnothing$ است، پس گزارهٔ $\varnothing=\{\varnothing\}$ نادرست است.

گزینهٔ «۴»: خودِ $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ در مجموعهٔ $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$ دیده می‌شود، پس گزاره‌ای درست است.

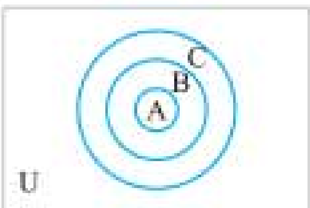
ویژگی‌های زیرمجموعه

ویژگی ۱: هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است. یعنی اگر A یک مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد. آن‌گاه: $\boxed{A\subseteq A}$

ویژگی ۲: مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. یعنی اگر A یک مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد. آن‌گاه: $\boxed{\varnothing\subseteq A}$

ویژگی ۳: برای سه مجموعهٔ دلخواه، A ، B و C با مرجع U داریم:

$$(A\subseteq B\wedge B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C \quad \text{(خاصیت تعدی)}$$



دو مجموعهٔ مساوی

دو مجموعهٔ A و B با مرجع U **مساوی‌اند** اگر و تنها اگر هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر:

$$A=B\Leftrightarrow[\forall x;(x\in A\Leftrightarrow x\in B)]$$
$$A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$$

- بنابراین برای آن‌که نشان دهیم دو مجموعه برابرند، باید ثابت کنیم که هریک، زیرمجموعهٔ دیگری است.

تست: با توجه به مجموعه‌های زیر، کدام تساوی درست است؟

$A=\{m\in\mathbb{Z}\mid |m|<۲\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۳=x\}$

$C=\{y\in\mathbb{Z}\mid y^۲\leq ۲y\}$, $D=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۲\leq ۱\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۳+۲m=۳m^۲\}$

۱) $A=B=C$ و $D=E$ ۲) $A=B=E$ و $D=C$

۳) $B=D=A$ و $E=C$ ۴) $B=C=D$ و $A=E$

پاسخ گزینه۳ کافی است عضوهای هریک از مجموعه‌ها را به‌صورت فهرستی بنویسیم. داریم:

$$A=\{m\in\mathbb{Z}\mid -۲<m<۲\}=\{-۱,۰,۱\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۳-x=۰\}=\{x\in\mathbb{Z}\mid x(x^۲-۱)=۰\}=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x=۰)\vee(x^۲-۱=۰)\}=\{۰,-۱,۱\}$$

$$C=\{y\in\mathbb{Z}\mid y^۲-۲y\leq ۰\}=\{y\in\mathbb{Z}\mid y(y-۲)\leq ۰\}=\{۰,۱,۲\}$$

$$D=\{m\in\mathbb{Z}\mid |m|\leq ۱\}=\{m\in\mathbb{Z}\mid -۱\leq m\leq ۱\}=\{-۱,۰,۱\}$$

$$E=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۳-۳m^۲+۲m=۰\}=\{m\in\mathbb{Z}\mid m(m^۲-۳m+۲)=۰\}=\{m\in\mathbb{Z}\mid m(m-۱)(m-۲)=۰\}=\{۰,۱,۲\}$$

مبانی احتمال

پدیدهٔ تصادفی

هر پدیده‌ای که قبل از رخ دادن، نتیجهٔ آن را نتوان مشخص کرد، **پدیدهٔ تصادفی** نامیده می‌شود. مانند پرتاب یک سکه، ریختن یک تاس و ... .
واضح است که در پرتاب یک سکه، نمی‌توان مشخص کرد که نتیجه «رو» یا «پشت» است و یا در ریختن یک تاس نمی‌توان دقیق اعلام کرد که کدام عدد ظاهر می‌شود.

فضای نمونه (S)

مجموعهٔ **تمام نتایج ممکن** از انجام یک پدیدهٔ تصادفی را **فضای نمونه** می‌گویند.

- فضای نمونه را با حرف S نشان می‌دهند. هر عضو فضای نمونه، یک **«برآمد»** نامیده می‌شود.
- اعضای فضای نمونه، مشخص می‌کنند که نتیجهٔ آزمایش یا پدیده‌ای که در حال بررسی آن هستیم، چه حالت‌هایی دارد.
- از آن‌جایی که فضای نمونه، یک مجموعه است، پس به دو روش زیر می‌توان آن را مشخص کرد:

الف) نام بردن (فهرست کردن) برآمدها ب) معرفی خاصیت مشترک برآمدها به زبان ریاضی (گزاره‌نما)

مثال: در مورد هریک از پدیده‌های زیر فضای نمونه را مشخص کنید.

الف) پرتاب یک سکه ب) خانوادهٔ تک فرزندی پ) ریختن یک تاس

ت) خارج کردن یک لامپ به تصادف از جعبه‌ای شامل پنج لامپ به شماره‌های ۱ تا ۵

الف) اگر «رو» و «پشت» سکه را به‌ترتیب با «ر» و «پ» نشان دهیم، آن‌گاه فضای نمونه عبارت است از: S = {ر , پ}

ب) فرزند یک خانواده «دختر» یا «پسر» است که به‌ترتیب با «د» و «پ» نشان می‌دهیم. پس: S = {د , پ}

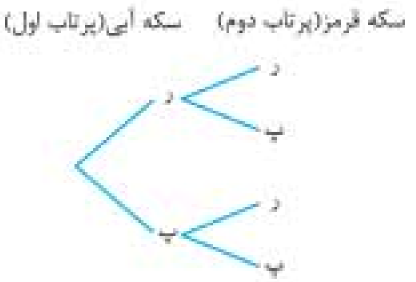
پ) در آزمایش ریختن یک تاس فقط ممکن است اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شود. پس: $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le ۶\}$

ت) واضح است که اگر لامپ‌های داخل جعبه را به‌صورت $L_۱ , L_۲ , ... , L_۵$ نمایش دهیم، آن‌گاه: $S = \{L_۱ , L_۲ , ... , L_۵\}$

مثال: فضای نمونه‌ای هریک از پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

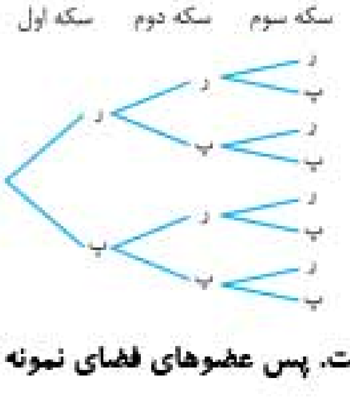
الف) پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه) ب) پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه)

الف) لازم به ذکر است که در آزمایش پرتاب دو سکه با هم، فرض می‌کنیم هر دو سکه متمایزند (به عنوان مثال یک سکه آبی و دیگری قرمز است)، بنابراین فضای نمونه‌ای به کمک نمودار درختی عبارت است از: S = {(ر , ر) , (ر , پ) , (پ , ر) , (پ , پ)}



دقت کنید که حالت (ر , پ) با حالت (پ , ر) فرق دارد. در حالت (پ , ر)، سکهٔ آبی (پرتاب اول) «ر» و سکهٔ قرمز (پرتاب دوم) «پ» آمده و در حالت (ر , پ)، سکهٔ آبی (پرتاب اول) «پ» و سکهٔ قرمز (پرتاب دوم) «ر» آمده است.

ب)



S = {(پ,پ,پ),(ر,پ,پ),(پ,ر,پ),(ر,ر,پ),(پ,پ,ر),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر),(ر,ر,ر)}

نتیجه: ۱ اگر S فضای نمونه‌ای یک بار انجام یک پدیدهٔ تصادفی باشد، فضای نمونه‌ای دوبار تکرار آن $S \times S$ است. پس عضوهای فضای نمونه (برآمدها) به‌صورت زوج مرتب هستند.

۲ اگر S فضای نمونه‌ای یک بار انجام یک پدیدهٔ تصادفی باشد، فضای نمونه‌ای سه‌بار تکرار آن، $S \times S \times S$ است. پس عضوهای فضای نمونه (برآمدها) به‌صورت سه‌تایی مرتب هستند.

۳ در تعمیم نتیجهٔ ۲ می‌توان گفت فضای نمونه‌ای n بار تکرار یک آزمایش تصادفی، $\overbrace{S \times S \times ... \times S}^{n\ \text{بار}}$ است و هر عضو (برآمد) یک n تایی مرتب است.

۴ اگر فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی، در یک بار انجام دارای x برآمد باشد، در n بار تکرار آن، x^n برآمد حاصل می‌شود.

پس همان‌طورکه ملاحظه شد، فضای نمونه‌ای:

- پرتاب یک سکه دارای ۲ برآمد است.
- پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه) دارای $۴ = ۲^۲$ برآمد است.
- پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه) دارای $۸ = ۲^۳$ برآمد است.

بنابراین به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت:

پدیدهٔ تصادفی	تعداد برآمدهای فضای نمونه
پرتاب n سکه با هم (n بار پرتاب یک سکه)	۲^n
یک خانوادهٔ n فرزندی	۲^n
پرتاب n تاس با هم (n بار پرتاب یک تاس)	۶^n

- در تمامی پدیده‌های بالا، سکه‌ها و تاس‌ها **متمایز** فرض می‌شوند. (آبی، قرمز، ...)

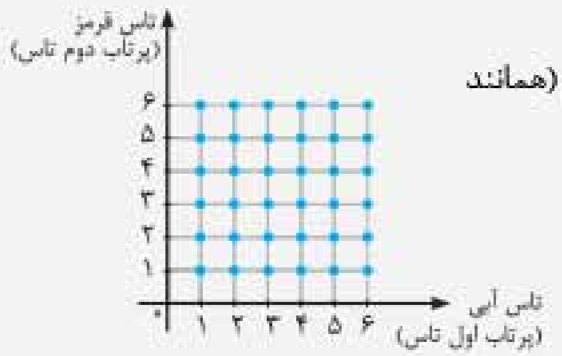
تست: فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس با هم (دو بار پرتاب یک تاس) چند برآمد دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶

پاسخ گزینه ۳ می‌دانیم فضای نمونه در یک بار پرتاب یک تاس $\{۱,۲,...,۶\}$ است، پس فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس با هم (دوبار پرتاب یک تاس) عبارت است از: $S=\{۱,۲,...,۶\}\times\{۱,۲,...,۶\}=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۶,۶)\}$

که دارای $۳۶ = ۶^۲$ برآمد است.

- لازم به ذکر است که دو تاس را متمایز فرض می‌کنیم (مثلاً تاس قرمز و تاس آبی). بنابراین برآمد (۱,۲) با برآمد (۲,۱) متفاوت است. در اولی، تاس قرمز (پرتاب اول تاس) عدد ۱ و تاس آبی (پرتاب دوم تاس) عدد ۲ آمده است و در دومی نتایج عوض شده است. یعنی تاس قرمز (پرتاب اول تاس) عدد ۲ و تاس آبی (پرتاب دوم تاس) عدد ۱ آمده است.
- فضای نمونه را در آزمایش بالا می‌توان به زبان ریاضی (جبر مجموعه‌ها) به‌صورت مقابل نمایش داد: $S=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N} \wedge x,y\leq ۶\}$
- فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی (و آزمایش‌های مشابه آن) را می‌توان با دو محور عمود بر هم (همانند نمایش ضرب دکارتی مجموعه‌ها) به‌صورت مقابل (به کمک نقطه‌یابی) نشان داد:



در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج معیار زیر مشخص می‌شود. این فضای نمونه چند برآمد دارد؟(برگرفته از کتاب درسی)

- **دمای هوا: سرد یا گرم**
- **رطوبت هوا: خشک یا مرطوب**
- **سرعت باد: باد می‌وزد یا باد نمی‌وزد**
- **وضعیت هوا: صاف، نیمه ابری یا ابری**
- **مقدار بارش: بارندگی یا عدم بارندگی**

۱) ۲۵ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۶

پاسخ گزینه ۳ اگر پنج موضوع گفته شده را با پنج مجموعهٔ زیر نشان دهیم:

$S_1=\{\text{گرم , سرد}\}$ $S_2=\{\text{مرطوب , خشک}\}$

$S_3=\{\text{باد می‌وزد , باد نمی‌وزد}\}$ $S_4=\{\text{ابری , نیمه‌ابری , صاف}\}$

$S_5=\{\text{عدم‌بارندگی , بارندگی}\}$

فضای نمونه عبارت است از: $S=S_1\times S_2\times S_3\times S_4\times S_5$، که هر برآمد آن یک پنج‌تایی مرتب به‌صورت زیر است:

$(\underset{\text{از } S_1}{a},\underset{\text{از } S_2}{b},\underset{\text{از } S_3}{c},\underset{\text{از } S_4}{d},\underset{\text{از } S_5}{e})$

مثلاً یک برآمد به‌صورت (عدم بارندگی، صاف، باد نمی‌وزد، خشک، گرم) است.

فضای نمونه دارای $۴۸=۲\times۲\times۲\times۳\times۲$ برآمد است.

یک راننده تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند (اما خالی حرکت نمی‌کند). در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه در توصیف این پدیدهٔ تصادفی، برای یک بار رفت و برگشت چند برآمد دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۸

پاسخ گزینه ۱ با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر در رفت و برگشت عددی بین ۱ تا ۴ است، پس:

$S=\{۱,۲,۳,۴\}\times\{۱,۲,۳,۴\}\Rightarrow n(S)=۴\times۴=۱۶$

توجه کنید که برآمدهای موجود در S به‌صورت زوج مرتب هستند و مثلاً زوج مرتب $(۱,۲)$ بیان‌گر آن است که تاکسی در مسیر رفت با ۱ مسافر و در مسیر برگشت با ۲ مسافر حرکت کرده است.

توجه: کیسه‌ای شامل n مهرهٔ متمایز است. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. می‌خواهیم بررسی کنیم که در هریک از حالت‌های زیر فضای نمونه دارای چند برآمد است:

الف) دو مهره را با هم (هم‌زمان) بیرون می‌آوریم. **ب)** دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

پ) دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

الف) اگر دو مهره را به‌صورت «با هم» یا «هم‌زمان» از کیسه خارج کنیم، **ترتیب ندارند** و عمل انتخاب دو مهره از n مهرهٔ متمایز صورت می‌پذیرد و درنتیجه $n(S)=\binom{n}{2}$ است.

ب) خارج کردن مهره‌ها به‌صورت پی‌درپی (متوالی، یکی یکی)، یعنی **ترتیب دارند**. از طرفی چون این عمل بدون جای‌گذاری صورت می‌پذیرد، پس در بار اول یک مهره از n مهره و در بار دوم یک مهره از $n-1$ مهرهٔ باقی مانده انتخاب می‌شود. پس:

$$n(S)=\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{مهرهٔ اول}}\times\underbrace{\binom{n-1}{1}}_{\text{مهرهٔ دوم}}$$

پ) همانند قسمت «ب»، با این تفاوت که مهرهٔ اول پس از مشاهده به کیسه برگردانده می‌شود و مهرهٔ دوم باز از n مهرهٔ داخل کیسه انتخاب می‌گردد و امکان تکرار هست. پس:

$$n(S)=\binom{n}{1}\times\binom{n}{1}$$

پیشامد

پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است.

- پیشامد بخشی از فضای نمونه است که مطلوب مسئله است.
- اگر تنها یک عضو از پیشامدی رخ بدهد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.
- اگر فضای نمونهٔ حاصل از انجام یک پدیدهٔ تصادفی دارای n برآمد باشد، آن‌گاه 2^n پیشامد می‌توان برای آن پدیدهٔ تصادفی مشخص کرد.
- هر پیشامد تک عضوی را یک پیشامد ساده می‌نامند.

مثال: در آزمایش پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد زوج ظاهر شود. **ب) عدد اول ظاهر شود.**

می‌دانیم در آزمایش پرتاب یک تاس فضای نمونه دارای ۶ برآمد است. امّا پیشامدهای موردنظر بخشی از این فضای نمونه هستند.

الف) $A=\{۲,۴,۶\}$ **ب)** $B=\{۲,۳,۵\}$

تست: جعبه‌ای شامل ۱۵ عدد لامپ به شماره‌های ۱ تا ۱۵ است. لامپی به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. پیشامد A، که در آن «عدد روی لامپ یک عدد اول باشد» چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ گزینه۳ اعداد اول بین ۱ تا ۱۵ عبارت‌اند از: $A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳\}$

در آزمایش پرتاب دو تاس با هم، کدام‌یک از پیشامدهای زیر بیشترین برآمد را دارد؟

پیشامد A: «مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ است»

پیشامد B: «هر دو عدد ظاهر شده یکسان هستند»

پیشامد C: «مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است»

۱) A ۲) B ۳) C ۴) هر سه مساوی‌اند.

پاسخ گزینه۳

$A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$

$B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$

(توجه کنید برآمد $(۲,۶)$ با برآمد $(۶,۲)$ فرق دارد، زیرا دو تاس متمایزند.)

می‌دانیم مجموع دو عدد ظاهر شده از دو تاس، عددی بین ۲ تا ۱۲ است. امّا پیشامد موردنظر، تمام برآمدهایی است که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ هستند. پس:

$$C=\{\underbrace{(۱,۱)}_{\text{مجموع ۲}},\underbrace{(۱,۲),(۲,۱)}_{\text{مجموع ۳}},\underbrace{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)}_{\text{مجموع ۵}},\underbrace{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)}_{\text{مجموع ۷}},\underbrace{(۵,۶),(۶,۵)}_{\text{مجموع ۱۱}}\}$$

قوانین احتمال (اصول احتمال - قضیه‌های احتمال)

۳۳۰. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار، $P(A)=\frac{۱}{۵}$ و $P(A\cup B)=\frac{۲}{۵}$ باشند، $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۳۱. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای باشند، کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است؟

۱) $P(A).P(B)=۱-P(A'\cup B')$ ۲) $P(A).P(B)=۱-P(A').P(B')$
۳) $P(A)+P(B)+P(A'\cup B')=۱$ ۴) $P(A)+P(B)+P(A'\cap B')=۱$

۳۳۲. اگر $P(A\cap B)=\frac{P(B')}{۳}=\frac{P(A')}{۲}=\frac{P(A\cup B)}{۴}$ باشد، $P(A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۳۳۳. اگر $P(A-B)=\frac{۲}{۱۷}$ ، $P(B-A)=\frac{۱۰}{۱۷}$ و $P(B)=۲P(A)$ باشند، آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۱۷}$ ۲) $\frac{۱۶}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۷}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۷}$

۳۳۴. اگر $P(A-B)=P(A)-P(B)$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $P(B-A)=P(B)-P(A)$ ۲) $P(B-A)=P(A-B)$
۳) $P(B-A)=P(B)$ ۴) $P(B-A)=۰$

۳۳۵. اگر $P(A)+P(B)=۱/۸$ باشد، حداکثر $P(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۸ ۴) ۱

۳۳۶. اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B-A)=\frac{۲}{۴}$ باشند، $P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۳۷. اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۲}$ و $P(A')=\frac{۱}{۲}$ باشند، $P(B-A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۳۸. اگر احتمال آمدن باران به نیامدنش $\frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه احتمال آمدن باران چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۳۹. کیسه‌ای شامل ۳ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ سبز است. سه مهره به تصادف و با هم از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه هر سه هم‌رنگ نباشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۴۱}{۴۴}$ ۲) $\frac{۵۱}{۵۸}$ ۳) $\frac{۵۳}{۵۸}$ ۴) $\frac{۴۳}{۴۴}$

۳۴۰. در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر سه مهره از کیسه خارج کنیم، با کدام احتمال، حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج شده هم‌رنگ هستند؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۱۷}{۲۲}$ ۲) $\frac{۱۹}{۲۲}$ ۳) $\frac{۲۹}{۴۴}$ ۴) $\frac{۴۱}{۴۴}$

۳۴۱. برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده اند. اگر به‌طور تصادف ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این گروه، متفاوت‌اند؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۳۴۲. در یک ظرف ۵ گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۵ و چهار گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارند. به‌طور تصادف یک گوی از هر رنگ خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، لااقل شمارهٔ یکی از آن‌ها عدد ۲ می‌باشد؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴

۳۴۳. شش مهره با شماره‌های ۱،۲،۲،۴،۵،۶ در ظرفی قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و بدون جای‌گذاری دو مهرهٔ دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ با شمارهٔ ۲ خارج شده است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

نتیجه: اگر $a \neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم: $\boxed{a|b \xrightarrow{m\le n} a^m|b^n}$

(به عبارت دیگر دو طرف نماد بخش‌پذیری را به توان‌های مختلف طبیعی می‌توان رساند، به شرط آن‌که توان موردنظر برای سمت راست بزرگ‌تر از توان مورد نظر برای سمت چپ باشد.)

زیرا: $a|b \xrightarrow[\text{(ویژگی ۹)}]{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow[\forall m\in\mathbb{Z}]{\text{ویژگی ۸}} a^m|kb^m \xrightarrow[(n\ge m)]{k=b^{n-m}} a^m|b^{n-m}\times b^m \Rightarrow a^m|b^n$

برای نمونه: (نادرست) $3|6 \Rightarrow 3^3|\underbrace{6^2}_{36}$ ، (درست) $3|6 \Rightarrow 3^3|6^4$

حالت خاص برای هر عدد صحیح a داریم: $\boxed{\forall m,n\in\mathbb{N}\ ;\ m\le n \Rightarrow a^m|a^n}$

برای نمونه: $3^4|3^9$

مثال: الف) اگر $a|b$، آیا $a^3|b^2$؟ ب) اگر $a^3|b^2$، آیا $a|b$؟

الف) خیر، به مثال نقض روبه‌رو توجه کنید: $3|6 \Rightarrow \underbrace{3^3}_{27} \nmid \underbrace{6^2}_{36}$

ب) بله، زیرا: $a^3|b^2 \xrightarrow[\forall m\in\mathbb{Z}]{\text{ویژگی ۸}} a^3|mb^2 \xrightarrow{m=b} a^3|b^3 \xrightarrow{\text{ویژگی ۹}} a|b$

نتیجه: اگر $a \neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم: $\boxed{a^m|b^n \xrightarrow{m\ge n} a|b}$

به عبارت دیگر از دو طرف نماد بخش‌پذیری، توان‌های مختلف طبیعی را می‌توان برداشت به شرط آن‌که توان سمت چپ، بزرگ‌تر از توان سمت راست باشد. **برای نمونه:** (نادرست) $4^3|2^6 \Rightarrow 4|2$ ، (درست) $2^7|8^3 \Rightarrow 2|8$

تست: اگر $a\neq 0$، $b\neq 0$ و c سه عدد صحیح باشند و $a^3|b$ و $2b|c^2$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $a|c$ ۲) $a^2|c$ ۳) $b|c$ ۴) $c|a$

پاسخ گزینهٔ ۱ با توجه به فرض داده شده، داریم: $a^3|b \xrightarrow[\text{(ویژگی ۸)}]{\forall m\in\mathbb{Z}} a^3|mb \xrightarrow{m=2} a^3|2b$

از طرفی طبق فرض مسئله، $2b|c^2$. پس به کمک ویژگی ۷ (خاصیت تعدی بخش‌پذیری) داریم: $(a^3|2b \wedge 2b|c^2) \Rightarrow a^3|c^2 \Rightarrow a|c$

اگر $a\neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه کدام گزارهٔ شرطی همواره درست است؟

۱) $a^3|b^2 \Rightarrow a^4|b^3$ ۲) $a^2|b^3 \Rightarrow a|b$

۳) $a^4|b^3 \Rightarrow a^3|b^2$ ۴) $a|b \Rightarrow a^3|b^2$

پاسخ گزینهٔ ۱ در گزینهٔ «۱» طبق تعریف بخش‌پذیری داریم: $a^3|b^2 \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b^2=a^3.q \xrightarrow{\text{توان ۳}} (b^2)^3=(a^3.q)^3$

$\Rightarrow b^6=a^9.q^3 \Rightarrow b^6=a^8.\underbrace{(a.q^3)}_{q'\in\mathbb{Z}} \Rightarrow a^8|b^6 \Rightarrow (a^4)^2|(b^3)^2 \xrightarrow{\text{ویژگی ۹ (ب)}} a^4|b^3$

بنابراین گزینهٔ «۱»، یک گزارهٔ شرطی همیشه درست است و در مورد سایر گزینه‌ها، مثال نقض وجود دارد.

راهبرد: برای دو عدد صحیح $a\neq 0$ و b و اعداد طبیعی m، n، i و j، گزارهٔ شرطی زیر با شرط $mj-ni\ge 0$ همیشه درست است.

دور در دور
نزدیک در نزدیک
$a^m|b^n \Rightarrow a^i|b^j$

(دور در دور) − (نزدیک در نزدیک) ≥ 0

بنابراین گزینهٔ «۱» همیشه درست است، زیرا $(3)(3)-(2)(4)\ge 0$، اما مثلاً گزینهٔ «۳» همواره درست نیست، زیرا $(4)(2)-(3)(3)\not\ge 0$.

اگر $a\neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، $a^7|b^4$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست <u>نیست</u>؟

۱) $a^2|b^3$ ۲) $a^5|b^3$ ۳) $a^8|b^5$ ۴) $a^4|b^2$

پاسخ گزینهٔ ۴ **بررسی گزینه‌ها:** طبق راهبرد گفته‌شده، در سؤال قبل داریم:

گزینهٔ «۱»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^2|b^3$ این گزارهٔ شرطی همیشه درست است. زیرا: $(7)(3)-(4)(2)\ge 0$

گزینهٔ «۲»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^5|b^3$ این گزارهٔ شرطی نیز همیشه درست است، زیرا: $(7)(3)-(4)(5)\ge 0$

گزینهٔ «۳»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^8|b^5$ این گزارهٔ شرطی همواره درست است، زیرا: $(7)(5)-(4)(8)\ge 0$

گزینهٔ «۴»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^4|b^2$ این گزارهٔ شرطی همیشه درست نیست، زیرا: $(7)(2)-(4)(4)\not\ge 0$

ویژگی ۱۰: اگر عددی بر حاصل‌ضرب چند عدد صحیح غیرصفر بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر هر کدام از آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a_1 \neq 0$، $a_2 \neq 0$، $a_3 \neq 0$، ... و b داریم:

$$\boxed{(a_1.a_2.a_3...)\,|\,b \Rightarrow (a_1\,|\,b \ \wedge\ a_2\,|\,b \ \wedge\ a_3\,|\,b \ \wedge \cdots)}$$

زیرا:

$$(a_1.a_2.a_3...)\,|\,b \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b=(a_1.a_2.a_3...).q = a_1.\underbrace{(a_2.a_3\cdots q)}_{q'\in\mathbb{Z}} \Rightarrow b=a_1.q' \Rightarrow a_1\,|\,b$$

(به همین ترتیب $a_2\,|\,b$، $a_3\,|\,b$ و ...)

نتیجه: طبق ویژگی ۱۰ درمی‌یابیم که **لاغر، لاغرتر می‌شود.**

برای نمونه: $(۲\times۳\times۴)\,|\,۴۸ \Rightarrow (۲\,|\,۴۸ \ \wedge\ ۳\,|\,۴۸ \ \wedge\ ۴\,|\,۴۸)$

حالت خاص برای دو عدد صحیح $a\neq 0$ و b داریم:

$$\boxed{a^n\,|\,b \xrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a\,|\,b}$$

(کافی است در ویژگی ۱۰، قرار دهیم $a_1=a_2=a_3=\cdots=a$)

هشدار: عکس ویژگی ۱۰ همواره درست نیست. به عبارت دیگر اگر عددی بر چند عدد صحیح بخش‌پذیر باشد، ممکن است بر ضرب آن‌ها بخش‌پذیر نباشد.

پس در حالت کلی اگر $a\neq 0$، $b\neq 0$، $c\neq 0$، ... و n اعدادی صحیح باشند،

$$(a\,|\,n \ \wedge\ b\,|\,n \ \wedge\ c\,|\,n \ \wedge\ ...) \not\Rightarrow (a.b.c...)\,|\,n$$

به عبارت دیگر، **لاغر، چاق نمی‌شود.** به‌عنوان مثال می‌دانیم $۴\,|\,۱۲$ و $۶\,|\,۱۲$، اما $۴\times۶ \nmid ۱۲$

حالت خاص اگر عددی بر چند عدد صحیح که دو به دو نسبت به هم اول‌اند (یعنی با هم عامل مشترکی به جز عدد ۱ ندارند)، بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر حاصل‌ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

برای نمونه: می‌دانیم $۳\,|\,۲۴$ و $۴\,|\,۲۴$ و چون ۳ و ۴ نسبت به هم اول‌اند (هیچ عامل مشترکی غیر از عدد ۱ ندارند)، پس $۳\times۴\,|\,۲۴$ و این نتیجه‌گیری همواره درست است، اما $۶\,|\,۲۴$ و $۸\,|\,۲۴$ و چون دو عدد ۶ و ۸ نسبت به هم اول نیستند (زیرا عامل مشترک غیر از عدد ۱ دارند، که آن عامل مشترک عدد ۲ است)، پس $۶\times۸ \nmid ۲۴$.

تست: اگر $۱۵۰\,|\,a^n$ باشد، آن‌گاه عدد صحیح a برکدام عدد همواره بخش‌پذیر است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

پاسخ گزینه ۱ می‌دانیم $۱۵۰=۲\times۳\times۵^۲$، پس طبق فرض داده‌شده، $۲\times۳\times۵^۲\,|\,a^n$. به کمک ویژگی ۱۰ (لاغر، لاغرتر می‌شود)، درمی‌یابیم که:

$$۲\,|\,a^n \quad , \quad ۳\,|\,a^n \quad , \quad ۵^۲\,|\,a^n \Rightarrow ۵\,|\,a^n$$

از طرفی طبق حالت خاص ۲ در ویژگی ۸، چون ۲، ۳ و ۵ اعدادی اول می‌باشند، پس:

$$۲\,|\,a^n \Rightarrow ۲\,|\,a \quad , \quad ۳\,|\,a^n \Rightarrow ۳\,|\,a \quad , \quad ۵\,|\,a^n \Rightarrow ۵\,|\,a$$

اما چون ۲، ۳ و ۵ دو به دو نسبت به هم اول‌اند (چرا؟)، پس طبق حالت خاص عکس ویژگی ۱۰، می‌توان نتیجه گرفت $۲\times۳\times۵\,|\,a$ لذا $۳۰\,|\,a$

ویژگی ۱۱: دو طرف دو یا چند بخش‌پذیری را می‌توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

به عبارت دیگر اگر $a\neq 0$، b، $c\neq 0$ و d چهار عدد صحیح باشند، داریم:

$$\boxed{\begin{cases} a\,|\,b \\ c\,|\,d \end{cases} \Rightarrow ac\,|\,bd}$$

زیرا:

$$\begin{cases} a\,|\,b \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b=a.q \\ c\,|\,d \xrightarrow{\exists q'\in\mathbb{Z}} d=c.q' \end{cases} \xrightarrow{\times} bd=aq\,cq' \Rightarrow bd=(ac)(\underbrace{qq'}_{q''\in\mathbb{Z}}) \Rightarrow bd=(ac).q'' \Rightarrow ac\,|\,bd$$

برای نمونه:

$$\begin{cases} ۳\,|\,۶ \\ ۴\,|\,۸ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{۳\times۴}_{۱۲}\,|\,\underbrace{۶\times۸}_{۴۸}$$

هشدار: عکس گزارهٔ شرطی ویژگی ۱۱، همواره درست نیست. به عبارت دیگر:

$$ac\,|\,bd \not\Rightarrow \begin{cases} a\,|\,b \\ c\,|\,d \end{cases}$$

به مثال نقض زیر توجه کنید:

می‌دانیم که $\underbrace{۴\times۹}_{۳۶}\,|\,\underbrace{۶\times۳۰}_{۱۸۰}$، ولی همان‌طور که ملاحظه می‌شود $۴\nmid ۶$ و $۹\nmid ۳۰$ یا $۴\nmid ۳۰$ و $۹\nmid ۶$.

تست: اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ ، $۴\,|\,b$ و $۶\,|\,a$ باشند، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $۱۰\,|\,a+b$ ۲) $۸\,|\,۲ab$ ۳) $۴۰\,|\,a^۲+b^۲$ ۴) $۳۶\,|\,۳ab$

پاسخ گزینه ۴ مطابق با ویژگی ۱۱، دو طرف دو رابطهٔ بخش‌پذیری داده شده را می‌توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد. پس:

$$(۶\,|\,a \wedge ۴\,|\,b) \Rightarrow ۶\times۴\,|\,ab \Rightarrow ۲۴\,|\,ab$$

حال به کمک ویژگی ۱۰، داریم:

$$۲۴\,|\,ab \Rightarrow ۲\times۱۲\,|\,ab \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر می‌شود}} (۲\,|\,ab \wedge ۱۲\,|\,ab)$$

و در آخر با ضرب دو طرف رابطهٔ بخش‌پذیری به دست آمده در عدد ۳، داریم:

$$۱۲\,|\,ab \xrightarrow{\times۳} ۳۶\,|\,۳ab$$

تست: شخصی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم مرکز تیراندازی می‌کند. اگر به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر همهٔ تیرها داخل صفحهٔ هدف اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد، چند حالت برای این شخص در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه۳ اگر x تعداد تیرهای اصابت شده به دایره با شعاع کوچک و y تعداد تیرهای اصابت شده به دایره با شعاع بزرگ باشد، آن‌گاه طبق فرض مسئله، معادلهٔ سیّالهٔ خطی $۵x+۳y=۴۲$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$۵x+۳y=۴۲ \xrightarrow{\text{تبدیل به معادلهٔ هم‌نهشتی}} ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۰ \xrightarrow[(۳,۵)=۱]{\div ۵} x \overset{۳}{\equiv} ۰ \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{\text{تعریف}} x=۳k$$

$$\xrightarrow{\text{در معادلهٔ سیّاله}} ۵(۳k)+۳y=۴۲ \Rightarrow ۱۵k+۳y=۴۲ \xrightarrow{\div ۳} ۵k+y=۱۴ \Rightarrow y=-۵k+۱۴$$

اما x و y تعداد تیرهای اصابت‌شده را نشان می‌دهند، پس اعدادی حسابی‌اند. داریم:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow ۳k\geq ۰ \Rightarrow k\geq ۰ \\ y\geq ۰ \Rightarrow -۵k+۱۴\geq ۰ \Rightarrow k\leq \frac{۱۴}{۵} \end{cases} \xrightarrow{\cap} k=۰,۱,۲$$

یعنی این شخص به ۳ طریق می‌توانسته تیراندازی کند، که این ۳ طریق، عبارت‌اند از:

$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=۱۴ \end{cases}$ (صفر تیر به دایرهٔ کوچک و ۱۴ تیر به دایره بزرگ)

$k=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ y=۹ \end{cases}$ (۳ تیر به دایرهٔ کوچک و ۹ تیر به دایرهٔ بزرگ)

$k=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}$ (۶ تیر به دایرهٔ کوچک و ۴ تیر به دایرهٔ بزرگ)

یک گام فراتر:

حل معادلهٔ سیّالهٔ خطی با داشتن یک جواب آن

اگر اعداد صحیح $x_۰$ و $y_۰$ یک جواب معادلهٔ سیّالهٔ خطی $ax+by=c$ باشند، به‌طوری که $(a,b)=d$ و $d\,|\,c$، آن‌گاه سایر جواب‌های معادلهٔ سیّاله (جواب‌های عمومی معادله) عبارت‌اند از:

$$x=x_۰+\frac{b}{d}k \quad , \quad y=y_۰-\frac{a}{d}k \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

واضح است که اگر $(a,b)=۱$، آن‌گاه:

$$x=x_۰+bk \quad , \quad y=y_۰-ak \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

برای نمونه: در معادلهٔ سیّالهٔ خطی $۵x+۴y=۳$، یک جواب معادله $\begin{cases} x_۰=۳ \\ y_۰=-۳ \end{cases}$ است. بنابراین چون $d=(۵,۴)=۱$، جواب‌های عمومی معادله عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x=۳+۴k \\ y=-۳-۵k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

تست: معادلهٔ سیّالهٔ خطی $۱۵x+۱۹y=۱۰۵۰$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه۳ از آن‌جایی که $۱۰۵۰=۱۵\times ۷۰$، پس یک جواب این معادلهٔ سیّاله، $\begin{cases} x_۰=۷۰ \\ y_۰=۰ \end{cases}$ است و چون $d=(۱۹ \text{ و } ۱۵)=۱$، پس جواب‌های عمومی آن $\begin{cases} x=۷۰+۱۹k \\ y=۰-۱۵k \end{cases}$ است $(k\in\mathbb{Z})$. از طرفی در این سؤال جواب‌های طبیعی موردنظر است، داریم:

$$\begin{cases} x>۰ \Rightarrow ۷۰+۱۹k>۰ \Rightarrow k>-\frac{۷۰}{۱۹} \Rightarrow k>-۳/۰۰۰ \\ y>۰ \Rightarrow -۱۵k>۰ \Rightarrow k<۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} k=-۱,-۲,-۳$$

یعنی این معادلهٔ سیّاله، دارای ۳ جواب طبیعی است، که عبارت‌اند از:

$$k=-۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۷۰+۱۹(-۱)=۵۱ \\ y=-۱۵(-۱)=۱۵ \end{cases} \quad , \quad k=-۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۷۰+۱۹(-۲)=۳۲ \\ y=-۱۵(-۲)=۳۰ \end{cases} \quad , \quad k=-۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۷۰+۱۹(-۳)=۱۳ \\ y=-۱۵(-۳)=۴۵ \end{cases}$$

۹۶. گزینه ۴ زیرا به‌ازای مثلاً $x=2$، عددی حقیقی مانند $y=\sqrt{3}$ وجود دارد. (توجه کنید که گزینه‌های «۱» و «۳» نادرست‌اند. زیرا مثلاً به‌ازای $x=0$ تعریف نشده‌اند.)

۹۷. گزینه ۲ زیرا در این حالت، به ازای هر x حقیقی، یک مقدار حقیقی برای y به دست می‌آید.

۹۸. گزینه ۴ زیرا برای $x=1$ از مجموعهٔ B، نمی‌توان $y\in A$ یافت که $x>y$ برقرار باشد. بنابراین برای سور عمومی $\forall x\in B$، مثال نقض وجود دارد.

۹۹. گزینه ۱ $\sim(\exists A\ \ \forall B;B\subseteq A)\equiv\forall A\ \ \exists B;\sim(B\subseteq A)$

۱۰۰. گزینه ۲

$$\underbrace{\forall x\ \ \forall y}_{\text{برای هر عدد گویای x و y}}\ \ \overbrace{\exists z;((x,y\in\mathbb{Q})\wedge z\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}^{\text{عددگنگی وجود دارد}}\wedge x<y)\Rightarrow\underbrace{x<z<y}_{\text{بین هر دو عدد گویای x و y عددی گنگ مانند z وجود دارد.}}$$

۱۰۱. گزینه ۲

۱۰۲. گزینه ۳

۱۰۳. گزینه ۳

۱۰۴. گزینه ۲
از دمورگان استفاده کنید.

$$\sim(\forall x\in\mathbb{R};((x^3>x)\wedge(\exists x;x^2>0))$$
$$\equiv\exists x\in\mathbb{R};\sim[(x^3>x)\wedge(\exists x;x^2>0)]$$
$$\equiv\exists x\in\mathbb{R};[\sim(x^3>x)\vee\sim(\exists x;x^2>0)]$$
$$\equiv\exists x\in\mathbb{R};x^3\le x\vee(\forall x;x^2\le 0)$$

۱۰۵. گزینه ۲ گزارهٔ «بعضی از انسان‌ها باهوش‌اند»، به‌صورت $\exists x\in H;I(x)$ در می‌آید،که نقیض آن عبارت است از:
$\forall x\in H;\sim I(x)$

۱۰۶. گزینه ۳ نقیض گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ عبارت است از $p\wedge\sim q$، پس نقیض گزارهٔ شرطی داده شده عبارت است از:

$$(\forall x\in\mathbb{R};x^2>0)\wedge\sim(\exists x\in\mathbb{R};x^2<0)$$
$$\equiv(\forall x\in\mathbb{R};x^2>0)\wedge(\forall x\in\mathbb{R};x^2\ge 0)$$

۱۰۷. گزینه ۴ گزاره‌های «شرایط اقتصادی جامعه بد باشد»، «مردم فقیر می‌شوند» و «همهٔ کارها ناتمام می‌مانند» را به‌ترتیب p، q و r می‌نامیم. در این‌صورت نقیض گزارهٔ $p\Rightarrow(q\vee r)$ موردنظر است، که عبارت است از $p\wedge\sim(q\vee r)\equiv p\wedge\sim q\wedge\sim r$، پس گزینه «۴» قابل قبول است. (توجه کنید که نقیض گزارهٔ «همهٔ کارها ناتمام می‌مانند»، عبارت است از «برخی کارها ناتمام نمی‌مانند»)

۱۰۸. گزینه ۴

$$\sim(\forall n\in\mathbb{N}\ \ \exists a\in\mathbb{R};4<(1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};\sim(4<(1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};\sim((1+a)^n>4\wedge(1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};\sim((1+a)^n>4)\vee\sim((1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};((1+a)^n\le 4\vee(1+a)^n>25)$$

۱۰۹. گزینه ۱ زیرا ارزش گزارهٔ $\exists x\in\mathbb{Z};x^2=16$، درست و ارزش گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{N};x^2>1$ نادرست است (زیرا مثال نقض $x=1$ دارد)، پس این گزارهٔ شرطی نادرست است (توجه کنید گزاره‌های موجود در گزینه‌های «۳» و «۴»، به انتفای مقدم درست‌اند).

۱۱۰. گزینه ۲

$$\sim[(\forall a,b\in\mathbb{Z};a<b)\Rightarrow(\exists a,b\in\mathbb{Z};a^2>b^2)]$$
$$\equiv(\forall a,b\in\mathbb{Z};a<b)\wedge\sim(\exists a,b\in\mathbb{Z};a^2>b^2)$$
$$\equiv(\forall a,b\in\mathbb{Z};a<b)\wedge(\forall a,b\in\mathbb{Z};a^2\le b^2)$$

۱۱۱. گزینه ۴
ترکیب دو شرطی $p\Leftrightarrow q$، زمانی درست است که گزاره‌های p و q هم‌ارز باشند. به بیان دیگر گزاره‌های p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. معادلهٔ $2^x+1=0$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی فاقد جواب بوده و نادرست است. بنابراین زمانی این گزاره‌نما درست خواهد بود که معادلهٔ $4^x-6(2^x)+8=0$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب نداشته باشد. به بیان دیگر این تساوی نادرست باشد، بنابراین ابتدا باید ریشه‌های این معادله را به‌دست آوریم. داریم:

$$2^x=a\Rightarrow 2^{2x}-6(2^x)+8=0\Rightarrow a^2-6a+8=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ \text{یا}\\ a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x=4\\ \text{یا}\\ 2^x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ \text{یا}\\ x=1\end{cases}$$

برای اینکه معادلهٔ موردنظر قاقد جواب باشد، باید $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$ باشد تا گزاره‌نمای دو شرطی، تبدیل به گزاره‌ای درست شود.

۱۱۲. گزینه ۱ در گزینهٔ «۱» داریم:

$y=x+6\Rightarrow$ **به ازای هر x طبیعی، یک مقدار طبیعی برای y به‌دست می‌آید.**

در سایر گزینه‌ها مثال نقض وجود دارد.

۱۱۳. گزینه ۱ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: $x^2+2>2x\Rightarrow\underbrace{x^2-2x+1}_{\text{اتحاد}}+1>0\Rightarrow(x-1)^2+1>0$

چون عبارت به‌دست آمده، همواره درست است، پس ارزش این گزارهٔ سوری درست است.

گزینهٔ «۲»: $\frac{x-1}{x}=x\Rightarrow x-1=x^2\Rightarrow x^2-x+1=0\Rightarrow\Delta<0$

این معادلهٔ درجهٔ دوم جواب حقیقی ندارد. پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای این سور وجودی همواره تهی است.

گزینهٔ «۳»: از آن‌جایی که می‌دانیم $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}:|x+\frac{1}{x}|>2$، پس سور وجودی داده‌شده نادرست است.

گزینهٔ «۴»: به ازای $x=2$ مثال نقض وجود دارد، پس نادرست است.

۱۱۴. گزینه ۳
در مجموعهٔ A چون $x\le 2$ و $x\in\mathbb{N}$ پس $x=1,2$ خواهد بود.

$$x=1\Rightarrow\frac{2^x\times x^2}{x}=\frac{2\times 1}{1}=2$$
$$x=2\Rightarrow\frac{2^x\times x^2}{x}=\frac{2^2\times 2^2}{2}=\frac{16}{2}=8$$

پس $A=\{2,8\}$.

۱۱۵. گزینه ۱ از اینکه $\{1\}\subset A$، نتیجه می‌گیریم $1\in A$، که غلط است، زیرا مجموعهٔ A دارای عضو ۱ نیست.

۱۱۶. گزینه ۳ با توجه به گزینه‌ها، به راحتی دیده می‌شود که یکی از دو گزینهٔ «۳» و «۴» جواب خواهند بود. از طرفی چون $\{a\}\notin C$ پس $A\notin C$.

۱۱۷. گزینه ۲

۱۱۸. گزینه ۳ ابتدا هریک از مجموعه‌های A، B، C و D را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم:

$$A=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, |m|<2\} \Rightarrow A=\{m \mid m\in\mathbb{Z} \mid -2<m<2\}$$
$$=\{-1,0,1\}$$
$$B=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, m^3=m\} \Rightarrow B=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, m^3-m=0\}$$
$$\Rightarrow B=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, m(m^2-1)=0\}=\{-1,0,1\}$$
$$C=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, m^2\le 2m\}$$
$$\Rightarrow C=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, m^2-2m\le 0\}=\{0,1,2\}$$
$$D=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, m^2\le 1\}$$
$$\Rightarrow D=\{m \mid m\in\mathbb{Z}, -1\le m\le 1\}=\{-1,0,1\}$$

بنابراین می‌توان نوشت: $C=E \ , \ A=B=D$

۱۱۹. گزینه ۲

$$\frac{2^{n+5}}{2^n}=2^5=32$$

۱۲۰. گزینه ۲ عضو a حضور دارد، پس ۳ عضو باقی مانده، دارای $2^3=8$ زیرمجموعه‌اند.

۱۲۱. گزینه ۴ چون $A-\{B\}=\{a,b,\{a\}\}$، پس یک مجموعهٔ ۳ عضوی دارای $8=2^3$ زیرمجموعه است، که غیر از مجموعهٔ تهی، ۷ زیرمجموعهٔ غیر تهی دارد.

۱۲۲. گزینه ۲ عضو b کنار می‌رود و چون عضو a همواره حضور دارد، لذا تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $\{c,d,e\}$ را می‌یابیم که برابر با $2^3=8$ است.

۱۲۳. گزینه ۲

$$2^{n+2}=2^n+96 \Rightarrow 2^2\times 2^n-2^n=96 \Rightarrow 2^n(2^2-1)=96$$
$$\Rightarrow 2^n\times 3=96 \Rightarrow 2^n=32 \Rightarrow n=5$$

۱۲۴. گزینه ۱ فرض می‌کنیم A دارای n عضو باشد، بنابراین دارای 2^n زیر مجموعه است. از طرفی با حذف ۲ عضو از این n عضو، مجموعهٔ A دارای 2^{n-2} زیرمجموعه خواهد بود، پس:

$$2^{n-2}=2^n-384 \xrightarrow{\text{تست گزینه ها}} n=9$$

۱۲۵. گزینه ۱

$$2^n=62+\frac{1}{4}\times 2^{n-3} \xrightarrow{\text{تست گزینه ها}} n=6$$

۱۲۶. گزینه ۱ توجه کنید که مجموعهٔ داده‌شده یک مجموعهٔ ۳ عضوی است، زیرا $\{a,b\}=\{b,a\}$ و مجموعه، عضو تکراری ندارد.

$$\{a,b,\{a,b\},\{b,a\}\}=\{a,b,\{a,b\}\}$$

پس با حذف عضو $\{a,b\}$، ۲ عضو دیگر می‌ماند:

$$\{a,b,\cancel{\{a,b\}}\} \xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}} 2^2=4$$

۱۲۷. گزینه ۳

$$x^2-3x+2=0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1\,,\,2$$

پس $B=\{1,2\}$. بنابراین $A-B$ دارای ۳ عضو است.

$$A-B=\{\{1\}\,,\,\{1,2\}\,,\,\{2\}\}$$

در نتیجه $8=2^3$ زیرمجموعه دارد که به جز تهی، تعداد ۷ زیرمجموعهٔ ناتهی باقی می‌ماند.

۱۲۸. گزینه ۴ باتوجه به مجموعه‌های داده شده داریم:

$$A-B=\{1,2,\{1,2,3\}\}-\{1,2,3,\{1,2\}\}=\{\{1,2,3\}\}=\{C\}$$
$$B-C=\{1,2,3,\{1,2\}\}-\{1,2,3\}=\{\{1,2\}\}\neq\varnothing$$

۱۲۹. گزینه ۲ زیرا خودِ A در C دیده نمی‌شود.

۱۳۰. گزینه ۱ زیرا $2\in B$ و $2\notin C$، پس $B\not\subset C$.

۱۳۱. گزینه ۴

۱۳۲. گزینه ۲

$$\begin{cases} A\subset B\Rightarrow A\cup B=B \\ A\subset C\Rightarrow A\cup C=C \end{cases} \Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cup C)=B\cap C=B$$

(زیرا $B\subset C$)

۱۳۳. گزینه ۳

$$\begin{cases} B\cap C=C\Rightarrow C\subset B \\ A\cap B=B\Rightarrow B\subset A \end{cases} \Rightarrow C\subset B\subset A$$

۱۳۴. گزینه ۲

چون $A\cup B\subset\varnothing$ و $\varnothing\subset(A\cup B)$، پس $A\cup B=\varnothing$ لذا $A=B=\varnothing$.

۱۳۵. گزینه ۳ چون با اضافه کردن یک عضو از A به B، تعداد اعضای B تغییری نکرده است پس این عضو در داخل B هم بوده است. یعنی:

$$A\cap B\neq\varnothing$$

۱۳۶. گزینه ۲ چون با اضافه شدن ۱۰ عضو به مجموعهٔ A، به اشتراک آن‌ها، ۹ عضو اضافه شده است، پس فقط یک عضو از این ۱۰ عضو در B نبوده است. در نتیجه به $A\cup B$، فقط یک عضو اضافه خواهد شد و در نتیجه دارای ۲۶عضو خواهد بود.

۱۳۷. گزینه ۳ چون $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}, A\cap B=\{2,3,4\}$ پس:

$$\{2,3,4\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$$

یعنی X حتماً شامل عضوهای ۴ و ۳ و ۲ است. لذا X می‌تواند یکی از مجموعه‌های زیر باشد: $\{2,3,4\},\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$

۱۳۸. گزینه ۱ با توجه به خاصیت جذب داریم:

$$A'\cap[\underbrace{(B\cap A)\cup B}_{B}]=A'\cap B$$

۱۳۹. گزینه ۴ چون $k>n$ پس $\{1,2,\dots,n\}\subset\{1,2,\dots,k\}$ و در نتیجه به ازای هیچ مجموعهٔ دلخواه X، تساوی $\{1,2,\dots,k\}\cup X=\{1,2,\dots,n\}$ برقرار نخواهد بود.

۱۴۰. گزینه ۲ چون $\{1,2,\dots,n\}\cup X=\{1,2,\dots,n\}$ پس باید X یکی از زیر مجموعه‌های $\{1,2,\dots,n\}$ باشد. بنابراین 2^n حالت وجود دارد.

۱۴۱. گزینه ۲ چون $k<n$ پس برای اینکه تساوی موردنظر برابر باشد، باید مجموعهٔ X شامل $\{k+1,\dots,n\}$ باشند. از طرفی این مجموعه می‌تواند هریک از اعداد $\{1,\dots,k\}$ را نیز در بر بگیرد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,\dots,k\}$، جواب مسئله خواهد بود، زیرا در هریک از این زیر مجموعه‌ها می‌توان $\{k+1,\dots,n\}$ را قرار داد و در نتیجه مجموعهٔ حاصل، $\{k+1,\dots,n\}$ را در برداشته و می‌توانیم از آن به جای X در تساوی استفاده کنیم. از طرفی تعداد زیر مجموعه‌های $\{1,\dots,k\}$ برابر با 2^k است.

۱۴۲. گزینه ۳ واضح است که $A_8=\{8,9,\dots,17\}$ و در نتیجه داریم:

$$A_3\cap A_4\cap\dots\cap A_8$$
$$=\{3,4,\dots,12\}\cap\{4,5,\dots,13\}\cap\dots\{8,9,\dots,17\}=\{8,9,10,11,12\}$$

۱۴۳. گزینه ۳ با قرار دادن $n=1,2,3,4$ داریم:

$$A_1=(-1,2)\ ,\ A_2=(2,4)\ ,\ A_3=(-3,6)\ ,\ A_4=(4,8)$$

در نتیجه $\bigcup_{n=1}^{4}A_n=(-3,8)$، که اعداد صحیح متعلق به آن عبارت‌اند از:

$$\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

۲۴۰. گزینه ۳

یادآوری: $n((A\times B)\cap(B\times A))=(n(A\cap B))^{۲}$

$$A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$$
$$B=\{k\in\mathbb{Z}\,,\,|k-۳|\le ۲\}\Rightarrow |k-۳|\le ۲$$
$$\Rightarrow -۲\le k-۳\le ۲\Rightarrow ۱\le k\le ۵\Rightarrow B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$
$$\Rightarrow A\cap B=\{۱,۳,۵\}\Rightarrow n(A\cap B)=۳$$
$$\Rightarrow n((A\times B)\cap(B\times A))=(n(A\cap B))^{۲}=۹$$

۲۴۱. گزینه ۳

$$\begin{array}{l}A=\{۳,۴,۵,۶,۷\}\\ B=\{۱,۴,۷,۱۰\}\end{array}\Rightarrow A\cap B=\{۴,۷\}$$
$$\Rightarrow n((A\times B)\cap(B\times A))=n((A\cap B)^{۲})=۲^{۲}=۴$$

چون یک مجموعهٔ ۴ عضوی است، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^{۴}=۱۶$ خواهد بود.

۲۴۲. گزینه ۱

گزینهٔ «۱» نادرست است، زیرا $۲\in B$ ولی $۲\notin C$. بنابراین $B\not\subset C$.

۲۴۳. گزینه ۲

$$۲^{n}=۴۸+۲^{n-۲}\Rightarrow ۲^{n}-۲^{n-۲}=۴۸\xrightarrow{\text{تست گزینه‌ها}}n=۶$$

۲۴۴. گزینه ۴ مجموعه‌های $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۱,۴\}$ و $C=\{۱\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $A\cap B=A\cap C=\{۱\}$. بنابراین از تساوی $A\cap C=A\cap B$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A=B$. یعنی عکس گزینهٔ «۴» درست نیست. (درستی سایر گزینه‌ها واضح است)

۲۴۵. گزینه ۲ با قرار دادن $n=۱,۲,۳$ داریم:

$$A_{۱}=(-۱,۱)\;,\;A_{۲}=(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})\;,\;A_{۳}=(-\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۳})$$

بنابراین $\bigcap_{i=۱}^{۳}A_i=(-\frac{۱}{۳},۱)$، که طول این بازه برابر $۱-(-\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۳}$ است.

۲۴۶. گزینه ۲

$$\begin{cases}A_{۱}=(۰,۳)\xRightarrow{\text{اعداد طبیعی}}\{۱,۲\}\\ A_{۴}=(۳,۶)\xRightarrow{\text{اعداد طبیعی}}\{۴,۵\}\end{cases}\Rightarrow A_{۱}\cup A_{۴}=\{۱,۲,۴,۵\}$$

$$\begin{cases}A_{۲}=(۱,۴)\xRightarrow{\text{اعداد طبیعی}}\{۲,۳\}\\ A_{۳}=(۲,۵)\xRightarrow{\text{اعداد طبیعی}}\{۳,۴\}\end{cases}\Rightarrow A_{۲}\cap A_{۳}=\{۳\}$$

پس: $(A_{۱}\cup A_{۴})-(A_{۲}\cap A_{۳})=\{۱,۲,۴,۵\}-\{۳\}=\{۱,۲,۴,۵\}$

۲۴۷. گزینه ۳

۲۴۸. گزینه ۱ به کمک خاصیت جذب داریم:

$$\underbrace{[A\cap(A\cup B)]}_{A}\cap\underbrace{[B'\cup(B'\cap A)]}_{B'}=A\cap B'=A-B$$

۲۴۹. گزینه ۲

چون $(A\cap B)\subseteq A$، آن‌گاه $(A\cap B)-A=\varnothing$، داریم:

$$[\underbrace{(A\cap B)-A}_{\varnothing}]\cup[\underbrace{(A\cup B)-B}_{A-B}]=A-B$$

۲۵۰. گزینه ۱ با توجه به سوال قبل، داریم:

$$(A-B)\cup(A-C)\cup(A-D)$$
$$=(A\cap B')\cup(A\cap C')\cup(A\cap D')=A\cap(B'\cup C'\cup D')$$
$$=A\cap(B\cap C\cap D)'$$
$$=A-(\underbrace{B\cap C}_{\varnothing}\cap D)=A-(\varnothing\cap D)=A-\varnothing=A$$

۲۵۱. گزینه ۱

$$(A-B)-C=A-(B-C)\Rightarrow(A\cap B')\cap C'=A\cap(B\cap C')'$$
$$\Rightarrow(A\cap B')\cap C'=A\cap(B'\cup C)$$
$$\Rightarrow C'\cap(A\cap B')=(A\cap B')\cup(A\cap C)$$

اکنون دو طرف را با $(A\cap C)$ اشتراک می‌گیریم:

$$(A\cap C)\cap[C'\cap(A\cap B')]=(A\cap C)\cap[(A\cap B')\cup(A\cap C)]$$
$$\xrightarrow{\text{جذب}}\underbrace{\underbrace{[(A\cap C)\cap C']}_{\varnothing}\cap(A\cap B')}_{\varnothing}=A\cap C$$

۲۵۲. گزینه ۴

$$A\times B=B\times A\Rightarrow A=B\Rightarrow\begin{cases}۲^{۳x-۲y}=۵۱۲=۲^{۹}\\ ۳^{۲x+y}=۸۱=۳^{۴}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}۳x-۲y=۹\\ ۲x+y=۴\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}(x=\frac{۱۷}{۷})\wedge(y=\frac{-۶}{۷})$$
$$\Rightarrow ۵x+۴y=۵(\frac{۱۷}{۷})+۴(\frac{-۶}{۷})=\frac{۶۱}{۷}$$

۲۵۳. گزینه ۲

واضح است که $A\cap B=\varnothing$، پس $(A\cap B)\times A=\varnothing\times A=\varnothing$ لذا صفر عضو دارد.

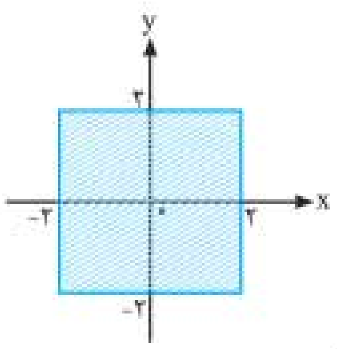
۲۵۴. گزینه ۴

نکته: $n[(A\times B)\cup(B\times A)]=۲n(A)n(B)-[n(A\cap B)]^{۲}$

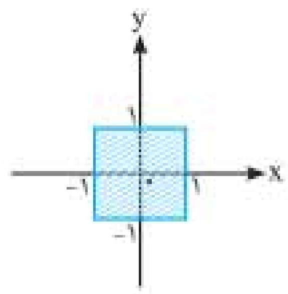
می‌دانیم: $A\cap B=\{۳,۴\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$

پس: $n[(A\times B)\cup(B\times A)]=۲\times۴\times۳-۲^{۲}=۲۴-۴=۲۰$

۲۵۵. گزینه ۴ نمودار مختصاتی $A^{۲}$ به‌صورت مقابل است:



نمودار مختصاتی $B^{۲}$ به‌صورت زیر خواهد بود:



۷۴۰. گزینه ۱ ابتدا بازهٔ اطمینان ۹۵درصدی برای میانگین درآمدهای افراد جامعه را به‌دست می‌آوریم. با توجه به درآمد ۴ نفر که به عنوان نمونه هستند داریم:

$$\bar{x} = \frac{۴+۳+۱/۵+۳/۵}{۴} = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

بازهٔ اطمینان ۹۵درصدی برای میانگین درآمد افراد جامعه برابر است با:

$$[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}] = [۳-\frac{۲\times ۱/۶}{\sqrt{۴}}, ۳+\frac{۲\times ۱/۶}{\sqrt{۴}}]$$

$$= [۳-\frac{۳/۲}{۲}, ۳+\frac{۳/۲}{۲}] = [۱/۴ , ۴/۶] \Rightarrow ۱/۴ \le \mu \le ۴/۶$$

می‌دانیم خط فقر نصف درآمد متوسط جامعه است. با تقسیم بازهٔ اطمینان میانگین درآمدها بر ۲ بازهٔ اطمینان ۹۵درصدی برای خط فقر به‌دست می‌آید. این بازه به‌صورت زیر است:

$$۰/۷ \le \underbrace{\boxed{\frac{\mu}{۲}}}_{\text{خط فقر}} \le ۲/۳$$

۷۴۱. گزینه ۴ با توجه به فرض مسئله، بازهٔ اطمینان ۹۵درصدی میانگین نمرات برابر [۴۰ , ۶۰] است. با توجه به حجم نمونه که ۴۰۰ است داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{۴۰۰}}=۴۰ \Rightarrow \bar{x}-\frac{\sigma}{۱۰}=۴۰ \\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{۴۰۰}}=۶۰ \Rightarrow \bar{x}+\frac{\sigma}{۱۰}=۶۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$$

$$\bar{x}=۵۰ \ , \ \sigma=۱۰۰ \Rightarrow \sigma-\bar{x}=۱۰۰-۵۰=۵۰$$

۷۴۲. گزینه ۴ برآورد بازه‌ای میانگین جامعه با اطمینان بیشتر از ۹۵٪ به‌صورت $[\bar{x}-۲\sigma_{\bar{x}} , \bar{x}+۲\sigma_{\bar{x}}]$ است، که در آن $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. ابتدا انحراف معیار جامعه را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲}{n}=\frac{۶۴}{n} \Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{۶۴}{n}}$$

اکنون انحراف معیار نمونه را می‌یابیم:

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sqrt{\frac{۶۴}{n}}}{\sqrt{\frac{۱۰^۴}{n}}}=\sqrt{\frac{۶۴}{۱۰^۴}}=\frac{۸}{۱۰۰}=۰/۰۸$$

پس برای میانگین جامعه داریم:

$$۴-۲\times(۰/۰۸)\le\mu\le ۴+۲\times(۰/۰۸) \Rightarrow ۳/۸۴\le\mu\le ۴/۱۶$$

۷۴۳. گزینه ۴ زمانی میانگین همهٔ نمونه‌های ۱۸تایی با هم برابر است، که حجم نمونه و جامعه یکی باشد، پس در واقع جامعهٔ ما ۱۸ عضوی بوده و فقط یک نمونهٔ ۱۸ عضوی وجود دارد. در نتیجه میانگین جامعه برابر میانگین نمونهٔ ۱۸تایی و دقیقاً ۵/۲ است.

۷۴۴. گزینه ۴ با توجه به سؤال، میانگین دندان‌های کشیده، پوسیده و پرشده برابر $\bar{x}=۳$ است. اندازهٔ نمونه $n=۴۰۰$ است. مقادیر انحراف معیار را نیز داریم. کران بالای بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی برابر است با:

دندان‌های کشیده $\Rightarrow$ کران بالا $=\bar{x}+\frac{۲\sigma_۱}{\sqrt{n}}=۳+\frac{۲\times ۱}{\sqrt{۴۰۰}}=۳/۱$

دندان‌های پوسیده $\Rightarrow$ کران بالا $=\bar{x}+\frac{۲\sigma_۲}{\sqrt{n}}=۳+\frac{۲\times ۲}{\sqrt{۴۰۰}}=۳/۲$

دندان‌های پرشده $\Rightarrow$ کران بالا $=\bar{x}+\frac{۲\sigma_۳}{\sqrt{n}}=۳+\frac{۲\times ۱/۶}{\sqrt{۴۰۰}}=۳/۱۶$

۷۴۵. گزینه ۲ می‌دانیم بازهٔ اطمینان بیشتر از ۹۵درصد را می‌توانیم به‌صورت $|\bar{x}-\mu|\le\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$ نشان دهیم، که به $|\bar{x}-\mu|$ خطای برآورد میانگین می‌گوئیم. با توجه به‌صورت سؤال $\sigma^۲=۹$, $|\bar{x}-\mu|\le ۰/۲۵$ است، داریم:

$$\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۰/۲۵ \xrightarrow{\sigma=۳} \frac{۲\times ۳}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \sqrt{n}=۲۴ \Rightarrow n=۵۷۶$$

۷۴۶. گزینه ۴ طول بازهٔ اطمینان میانگین با اطمینان بیش از ۹۵٪ برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. می‌دانیم $\sigma^۲=\frac{۳۶}{۲۵}$ در نتیجه $\sigma=\frac{۶}{۵}$. داریم:

$$\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}\le ۰/۰۵ \Rightarrow \frac{۴\times\frac{۶}{۵}}{\sqrt{n}}\le\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲۰\times ۲۴}{۵}\le\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow ۹۶\le\sqrt{n} \Rightarrow ۹۱۲۶\le n$$

۷۴۷. گزینه ۴ با توجه به فرض $\mu=۹۰$, $\sigma=۱/۲$ و $n=۶۴$. می‌دانیم $\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$، بنابراین:

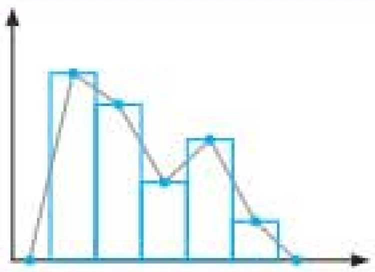
$$\bar{x}-\frac{۲\times ۱/۲}{\sqrt{۶۴}}\le ۹۰\le\bar{x}+\frac{۲\times ۱/۲}{\sqrt{۶۴}} \Rightarrow \bar{x}-۰/۳\le ۹۰\le\bar{x}+۰/۳$$

$$\Rightarrow ۸۹/۷\le\bar{x}\le ۹۰/۳$$

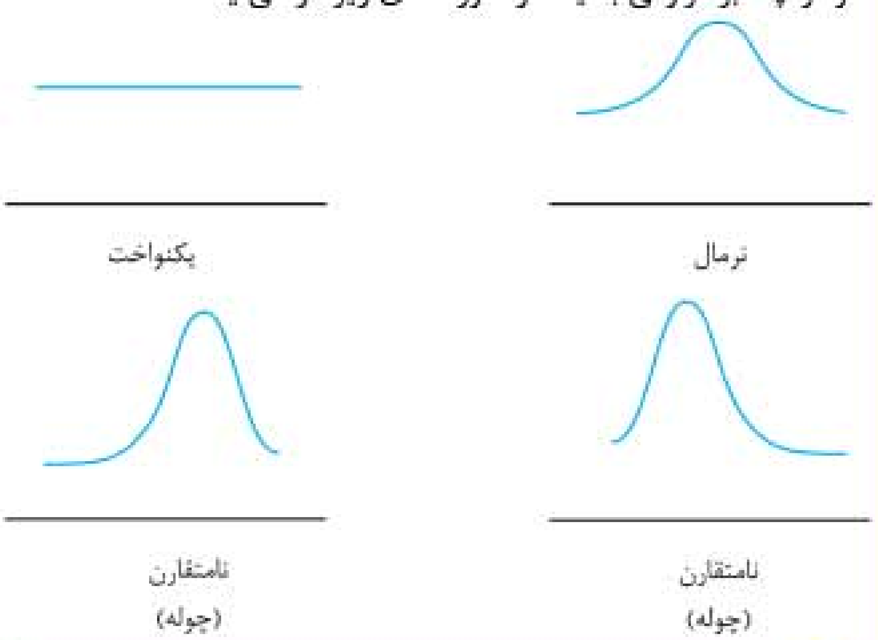
بنابراین احتمال اینکه $\bar{x}<۸۲$ شود، تقریباً برابر صفر است.

۷۴۸. گزینه ۳

راهبرد: برای رسم نمودار چندبر فراوانی از روی نمودار بافت نگاشت، وسط ضلع بالایی مستطیل‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف نمودار را به محور xها وصل می‌کنیم.



اگر حجم نمونه را زیاد کنیم، معمولاً طول دسته‌ها را کوچک‌تر می‌کنیم. نمودار چندبر فراوانی به یک از صورت‌های زیر در می‌آید:



راهبرد: اگر حجم نمونه زیاد باشد $(n\ge ۳۰)$ بدون توجه به نمودار چندبر فراوانی جامعه، نمودار چندبر فراوانی بافت نگاشت برآوردهای میانگین به‌صورت نرمال است.