تذکر نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ و $y=x^{\frac{1}{3}}$ با هم تفاوت دارند. (این تفاوت به دلیل دامنهٔ آن‌هاست) دامنهٔ $y=\sqrt[3]{x}$ برابر $\mathbb{R}$ و دامنهٔ $y=x^{\frac{1}{3}}$ برابر $[0,+\infty)$ است.

دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج

کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم. اگر f و g چندجمله‌ای باشند و یا توابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشند:

الف) $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)} \Rightarrow D_f=\{x \mid g(x)\geq 0\}$

ب) $h(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt[2n]{f(x)}} \Rightarrow D_h=\{x \mid f(x)>0\}$

نکته: رادیکال با فرجهٔ فرد در دامنهٔ تابع تأثیری ندارد. یعنی دامنهٔ $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ با دامنهٔ $f(x)$ برابر است. $(n\in\mathbb{N})$

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3-2|x+1|}$ شامل چند عدد طبیعی می‌باشد؟

۱) سه ۲) صفر ۳) دو ۴) یک

پاسخ گزینهٔ «۲»

$3-2|x+1|\geq 0 \Rightarrow 3\geq 2|x+1| \Rightarrow |x+1|\leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}\leq x+1\leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow -\frac{5}{2}\leq x\leq \frac{1}{2} \xrightarrow{x\in\mathbb{N}}$ دامنهٔ تابع $f(x)$ شامل عدد طبیعی نمی‌باشد.

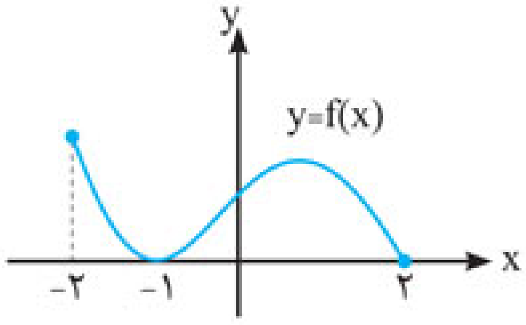
اگر تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{5x-x^2-4}+\sqrt{f(x)}$ کدام است؟

۱) $[0,3]$

۲) $[1,4]$

۳) $[1,2]$

۴) $[0,4]$



پاسخ گزینهٔ «۳»

$5x-x^2-4\geq 0 \Rightarrow x^2-5x+4\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)\leq 0 \Rightarrow 1\leq x\leq 4$ (۱)

$f(x)\geq 0 \Rightarrow x\in[-2,2]$ (۲)

$(1)\bigcap(2) \Rightarrow D_g=[1,2]$

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+b}$ به صورت $[1,a]$ است، $a+b$ کدام است؟

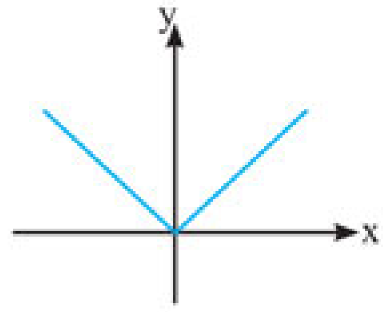
۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۲» برای محاسبهٔ دامنه باید نامعادلهٔ $-x^2+4x+b\geq 0$ را حل کنیم تا جواب $[1,a]$ به‌دست آید. این بدین معنی است که $x=1$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+4x+b=0$ است.

$-1+4+b=0 \Rightarrow b=-3$

جواب دیگر برابر a است پس $a=3$ است و در نهایت $a+b=0$ خواهد شد.

تابع قدرمطلق



تابعی که هر مقدار از دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با نماد $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهیم. اگر دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن به صورت مقابل است:

نکته: توجه کنید که دامنهٔ تابع $|f(x)|$ با دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر است. یعنی علامت قدرمطلق در محاسبهٔ دامنه تأثیری ندارند.

تابع پله‌ای

هر تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases} c_1 & ; \ x\in D_1 \\ c_2 & ; \ x\in D_2 \\ \vdots & ; \ \vdots \\ c_n & ; \ x\in D_n \end{cases}$ که هر ضابطهٔ آن تابعی ثابت است را تابع **پله‌ای** می‌نامیم.

تست در تابع پله‌ای $f(x)=\begin{cases} 1+a & ; \ -1<x<2 \\ a+2 & ; \ 2\le x<3 \end{cases}$ اگر $f(1)=7$ باشد، $f(\frac{8}{3})$ چقدر است؟

۱) ۶　　۲) ۸　　۳) -6　　۴) -8

پاسخ گزینهٔ «۲»

$f(1)=1+a=7 \Rightarrow a=6$

$f(\frac{8}{3})=a+2=6+2=8$

تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای)

اگر تعداد ضابطه‌های یک تابع دو یا بیشتر باشد، آن تابع را تابع قطعه‌ای یا چندضابطه‌ای می‌نامیم. دامنهٔ هر ضابطه جلوی آن نوشته می‌شود و دامنهٔ کل تابع اجتماع دامنهٔ تمام ضابطه‌ها می‌باشد، همچنین اشتراک دامنهٔ ضابطه‌ها باید تهی باشد.

تابع جزء صحیح (براکت)

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود آن عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از آن را نسبت می‌دهد. این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

به بیان دیگر $[x]$ برابر است با بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x و به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$[x]=\text{Max}\{n\in\mathbb{Z} : n\le x\}$

تعاریف دیگر از $[x]$

۱ برای هر عدد حقیقی x رابطهٔ $x=n+p$ برقرار است $(p\in[0,1), n\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R})$ آن‌گاه $[x]=n$ است:

$[x]=[n+p]=n \ , \ n\in\mathbb{Z} \ , \ p\in[0,1)$

۲ هرگاه $x\in\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه $[x]=x$ است. مثلاً $[2]=2$ است و برای $n\le x<n+1$، یعنی x بین دو عدد صحیح متوالی، $[x]=n$ است.

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+2[x]$ مقدار $f(\frac{2}{5}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

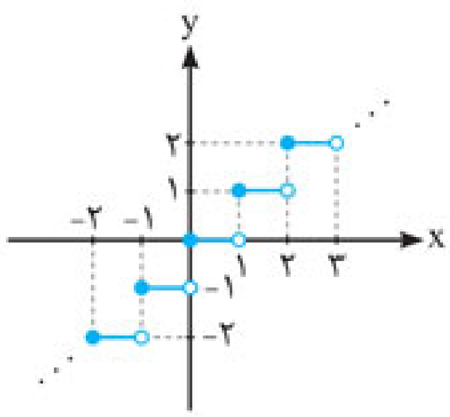
پاسخ گزینهٔ «۳»

$$f(x)=x^2+2[x]$$

$$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2+2[\sqrt{3}]\xrightarrow{\sqrt{3}\sim 1/7}3+2(1)=3+2=5$$

$$f(\frac{2}{5}f(\sqrt{3}))=f(\frac{2}{5}(5))=f(2)=4+2[2]=4+4=8$$

نمودار تابع $y=[x]$



با توجه به تعریف $[x]$ نمودار آن به صورت روبه‌رو است:

دامنه و برد تابع $y=[x]$ به‌صورت $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=\mathbb{Z}$ است.

خواص جزء صحیح

۱ **خاصیت اول:** برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $[x]\in\mathbb{Z}$. یعنی $[x]$ تابعی است که ورودی آن هر چه باشد، خروجی آن عددی صحیح است.

$$x\in\mathbb{R}\longrightarrow\boxed{[x]}\longrightarrow[x]\in\mathbb{Z}$$

۲ **خاصیت دوم:** اگر $x\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]=x$ است.

۳ **خاصیت سوم:** اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه برای هر x حقیقی داریم: $[x+k]=[x]+k$

تست اگر $y=2[x]+3=3[x-2]+5$ باشد، آن‌گاه مقدار $[x+y]$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$2[x]+3=3[x-2]+5 \Rightarrow 2[x]+3=3[x]-6+5 \Rightarrow [x]=4$$

$$y=2[x]+3=2\times4+3=11\Rightarrow [x+y]=[x+11]=[x]+11=4+11=15$$

۴ **خاصیت چهارم:** برای هر x حقیقی همیشه $[x]\le x$ است.

۵ **خاصیت پنجم:** همواره $[x]\le x<[x]+1$ است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که $0\le x-[x]<1$ است.

تست اگر $f(x)=[x]$، مجموعهٔ مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{-1,0,1\}$

پاسخ گزینهٔ «۱» می‌دانیم: $(0\le x-[x]<1)$

$$f(x)=[x]\Rightarrow f(x-f(x))=f(x-[x])=[x-[x]]=0$$

۶ **خاصیت ششم:** حاصل $[x]+[-x]$ به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & ; x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & ; x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

و در حالت کلی‌تر:

$$[-x]=\begin{cases}-x & ; x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & ; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

تست نمودارهای توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=[-x]$ در چند نقطه برخورد می‌کنند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ گزینهٔ «۲»

دقت کنید که برای x های صحیح $[-x]=-x$ است و برای x های ناصحیح $[-x]=-[x]-۱$ می‌باشد.

$$[-x]=[x]\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x=x\Rightarrow x=۰\\ x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow -[x]-۱=[x]\Rightarrow [x]=-\frac{۱}{۲}\ \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

پس فقط در نقطهٔ $x=۰$ دو تابع برخورد می‌کنند.

۷ خاصیت هفتم: $[x]=n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n\le x<n+۱$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. اگر دو زوج مرتب $(x-y,x+۳)$ و $(۴,۷-x)$ با هم برابر باشند، در این صورت مولفهٔ دوم زوج مرتب $(۰,x^۲+y^۲+۱)$ برابر کدام است؟

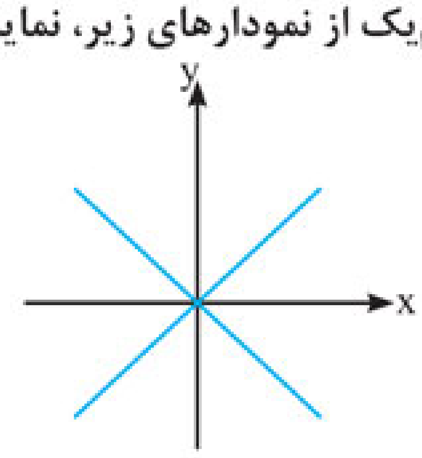
۱) ۹ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

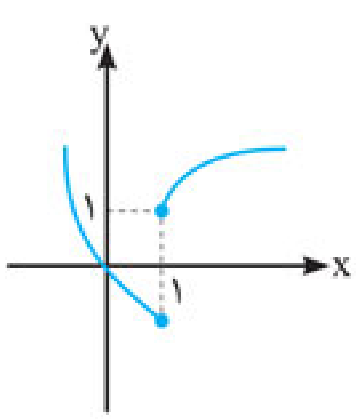
۲. رابطهٔ «به هر عدد طبیعی کمتر از ۴، مقسوم علیه‌های طبیعی آن را نسبت می‌دهد.» چند عضو دارد؟ آیا این رابطه یک تابع است؟

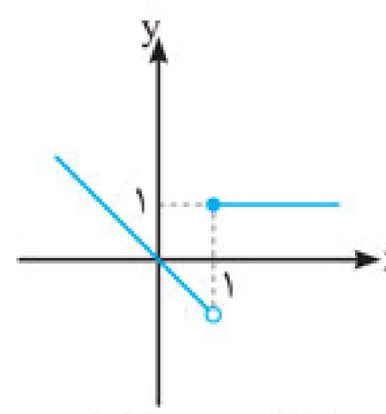
۱) ۵ عضو ـ تابع نیست. ۲) ۵ عضو ـ تابع است.

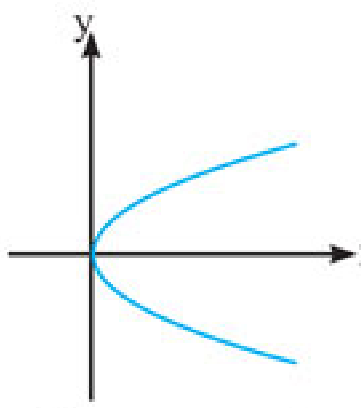
۳) ۳ عضو ـ تابع است. ۴) ۳ عضو ـ تابع نیست.

۳. کدام‌یک از نمودارهای زیر، نمایش یک تابع است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۴. اگر در تابع $f=\{(۱,a+۱),(a,m-۱),(m,-۳)\}$ داشته باشیم $f(f(۱)-۱)=۷-m$ و $f(۴)=a+۴$، در این صورت $f(۱)+f(a)$ چقدر است؟

۱) -۷ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) -۳

۵. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۶− قطع کرده و از نقطهٔ $(-۲,-۶)$ می‌گذرد. $f(-۱)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۹)

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

۶. اگر $f(x)=-۳$ و تابع $g(x)$ همانی باشد، حاصل $\frac{۲f(-۱)+g(۲)}{۳f(۰)-g(۹۱)}$ کدام است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۰۴

۷. تابع $f(x)=(m+۲)x^۲+(k+m)x-۳$ ثابت است، km کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۸. اگر $f(x)=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ باشد، آن‌گاه $g(x)=f(\frac{۱}{x})-f(x)+\frac{x}{۲}f(۱)$ چگونه تابعی است؟

۱) همانی ۲) ثابت ۳) درجهٔ سوم ۴) درجهٔ دوم

۹. کم‌ترین مقدار a به‌طوری که خط $x=a$ نمودار تابع $f(x)=۳+\sqrt{x-۲}$ را قطع کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۳

۱۰. حاصل $[\frac{۵۰}{۶۷۰}]+[\frac{-۶۷}{۵۰۰}]+[\frac{۵۰۰}{۶۷}]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۱. اگر $f(x)=\frac{(a-۲)x^۳+(a-b)x^۲+۶}{۳x^۲+۱۸}$ تابع ثابت باشد، در این صورت تابع $y=(a+b)x+b^۲$ محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۲. اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲+mx-n+۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ باشد، حاصل $m^۲+n^۲$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ممکن نیست

۱۳. اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{-x^۲+ax+b}$ برابر $[۲,۵]$ باشد، حاصل $a-۲b$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) -۱۷ ۳) ۲۷ ۴) -۲۷

۱۴. اگر $f(x)=mx^۲+(x-۱)^۲+(x+۱)^۲-kx-۲$ تابع همانی باشد، $m+k$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۱

۱۵. به ازای کدام مقدار a ، دامنهٔ تابع $f(x)=-۲+\sqrt{۲ax-۳b}$ برابر $[\frac{b}{۲},+\infty)$ است؟

۱) $a=-۳$ ۲) $a=-۲$ ۳) $a=۳$ ۴) $a=۲$

۱۶. اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(۳-x)$، کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۱۷. اگر $f(x-۱)=x^۳-۳x^۲+۳x+۵$ باشد، حاصل $f(\sqrt[۳]{۲})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۶

۱۲۵. به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x)=2x^4+ax^3+2x^2-3x$، بر $2x-1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+2$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) -10 ۲) -8 ۳) 4 ۴) 6

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۱»

از برابری طول‌ها و عرض‌ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x+3=7-x\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2 \\ x-y=4\Rightarrow 2-y=4\Rightarrow y=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2+y^2+1=9$$

۲. گزینهٔ «۱»

$$f=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$$

دقت کنید که f دارای ۵ عضو است و تابع نیست، چون دو زوج مرتب آن مولفهٔ اول تکراری دارند.

۳. گزینهٔ «۳»

برای تشخیص تابع بودن، باید هر خطی که موازی محور y ها رسم می‌کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند پس جواب گزینهٔ «۳» می‌باشد.

۴. گزینهٔ «۴»

$$f(f(1)-1)=f(a+1-1)=f(a)=7-m$$
$$f(a)=m-1\Rightarrow 7-m=m-1\Rightarrow m=4$$
$$f(m)=-3\Rightarrow f(4)=-3\Rightarrow a+4=-3\Rightarrow a=-7$$
$$\begin{cases} f(1)=a+1=-6 \\ f(a)=m-1=3 \end{cases}\Rightarrow f(1)+f(a)=-3$$

۵. گزینهٔ «۱»

نمودار f محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده است پس $f(1)=0$ است و محور عرضها را در -6 قطع کرده است پس $f(0)=-6$ و از نقطهٔ $(-2,-6)$ عبور کرده است پس $f(-2)=-6$، حال داریم:

$$f(0)=-6\Rightarrow 0+0+c=-6\Rightarrow c=-6$$
$$f(1)=0\Rightarrow a+b-6=0\Rightarrow a+b=6 \quad (1)$$
$$f(-2)=-6\Rightarrow 4a-2b+c=-6\xrightarrow{c=-6}4a-2b=0\xrightarrow{\div 2}2a=b$$
$$\xrightarrow{(1)}a+2a=6\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2\Rightarrow b=4\Rightarrow f(x)=2x^2+4x-6\Rightarrow f(-1)=2-4-6=-8$$

۶. گزینهٔ «۴»

تابع $f(x)=-3$ ثابت است یعنی مقدار تابع همواره -3 است پس: $f(0)=-3\,,\,f(-1)=-3$

تابع $g(x)$ همانی است یعنی $g(x)=x$، پس $g(2)=2$ و $g(91)=91$ بنابراین:

$$\frac{2f(-1)+g(2)}{3f(0)-g(91)}=\frac{2(-3)+2}{3(-3)-(91)}=\frac{-4}{-100}=0/04$$

۷. گزینهٔ «۱»

هر تابع ثابت به صورت $y=k\,(k\in\mathbb{R})$ است، یعنی تنها شامل یک عدد است. بنابراین باید ضرایب x^2 و x برابر صفر باشند.

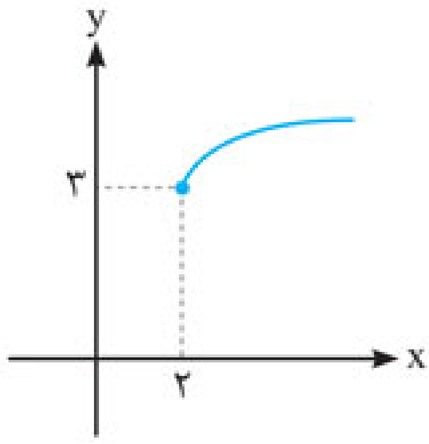
$$f(x)=(m+2)x^2+(k+m)x-3\ \Rightarrow\begin{cases} m+2=0\Rightarrow m=-2 \\ k+m=0\Rightarrow k=-m=2 \end{cases}\Rightarrow km=-4$$

۸. گزینهٔ «۱»

$$g(x)=f(\frac{1}{x})-f(x)+\frac{x}{2}f(1)=((\frac{1}{x})^3+\frac{1}{(\frac{1}{x})^3})-(x^3+\frac{1}{x^3})+\frac{x}{2}(1+1)=x$$

پس تابع g همانی است.

۹. گزینهٔ «۱»



با توجه به نمودار و دامنهٔ تابع $f(x)$، اگر خط عمودیِ $x=a$ تابع f را قطع کند a باید حداقل برابر ۲ باشد.

$$f(x)=3+\sqrt{x-2}$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

چون $8>\frac{500}{67}>7$ و $0>-\frac{67}{500}>-1$ و $1>\frac{50}{670}>0$ می‌باشد، پس:

$$[\frac{500}{67}]+[-\frac{67}{500}]+[\frac{50}{670}]=7+(-1)+0=6$$

۱۱. گزینهٔ «۱»

چون تابع ثابت است پس باید $a-2$ برابر صفر شود که درجه‌های صورت و مخرج با هم برابر باشند.

$$a-2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow f(x)=\frac{(2-b)x^2+6}{3x^2+18}$$

چون f تابع ثابت است پس:

$$\frac{2-b}{3}=\frac{6}{18}\Rightarrow 2-b=1\Rightarrow b=1\Rightarrow f(x)=(a+b)x+b^2\Rightarrow f(x)=3x+1\xrightarrow{x=0}f(0)=1$$

۱۲. گزینهٔ «۳»

دامنهٔ تابع به صورت $\mathbb{R}-\{2\}$ است یعنی در این تابع گویا تنها ریشهٔ مخرج $x=2$ است. به عبارتی ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^2+mx-n+2=0$، عدد ۲ است بنابراین:

$$(x-2)^2=x^2+mx-n+2=0\Rightarrow x^2-4x+4\equiv x^2+mx-n+2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=-4\\-n+2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-4\\n=-2\end{cases}\Rightarrow m^2+n^2=20$$

۱۳. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم در سهمی $ax^2+bx+c=0$، اگر $\Delta>0$ و $a<0$ باشد، علامت سهمی بین ۲ ریشه مثبت است. بنابراین $x=2$ و $x=5$ ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+ax+b=0$ هستند، پس:

$$\begin{cases}-4+2a+b=0\\-25+5a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=7,b=-10\Rightarrow a-2b=27$$

۱۴. گزینهٔ «۳»

تابع f را ساده می‌کنیم و با $y=x$ متحد قرار می‌دهیم.

$$f(x)=mx^2+x^2-2x+1+x^2+2x+1-kx-2=(m+2)x^2-kx$$

برای آن‌که $f(x)$ تابع همانی باشد باید:

$$m+2=0\Rightarrow m=-2,-k=1\Rightarrow k=-1$$

پس:

$$k+m=-3$$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x+\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x^2}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow y'(1)=-\frac{1}{3}$$

مشتق مرتبهٔ دوم و سوم

برای تابع $y=f(x)$ مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم و سوم را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

مشتق مرتبهٔ اول: $y'=f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$

مشتق مرتبهٔ دوم: $y''=f''(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$

مشتق مرتبهٔ سوم: $y'''=f'''(x)=\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$

تست اگر $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{\sin 2x}{x+2}}$ و $g(x)=\dfrac{x+2}{\sin x}$ باشد، حاصل $3f^2f'g+g'f^3$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-2\sin x$ ۴) $-2\cos x$

پاسخ گزینهٔ «۳» مشتق تابع $f^3(x)$ برابر است با $3f^2(x)f'(x)$ است. پس:

$$3f^2f'g+g'f^3=(f^3)'g+g'f^3=(f^3g)'$$

$$f^3(x)g(x)=\frac{\sin 2x}{x+2}\times\frac{x+2}{\sin x}=2\cos x\Rightarrow (f^3(x)g(x))'=-2\sin x$$

ضمناً تعریف ریاضی مشتق مرتبه دوم در صورت وجود:

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{2h}+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2f(-1+t)-2f(-1)}{3t}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}f'(-1)$ ۲) $\frac{6}{7}f'(-1)$ ۳) $\frac{2}{3}f'(-1)$ ۴) $\frac{1}{2}f'(-1)$

۲. اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-7}{x^2-1}=4$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}$ کدام است؟($f(x)$ در $x=1$ تابعی پیوسته است.)

۱) ۱۱۲ ۲) ۶۴- ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۳. مشتق عبارت $(\dfrac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2$ به ازای $x=-8$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) ۲ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

۴. در صورتی که $f'(1)=f(1)=4$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)-f^3(1)}{x^2-1}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۲ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶

۵. اگرنمودار تابع $f(x)=ax^2+1$ همواره بالای نمودار تابع مشتق خود قرار بگیرد، حدود a کدام است؟

۱) $a>0$ ۲) $0<a<2$ ۳) $0<a\le 1$ ۴) $0<a<1$

۶. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-3}})^3$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) -21 ۲) -18 ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۷. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x+5}{x+3}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\dfrac{7}{48}$ ۲) $\dfrac{5}{24}$ ۳) $\dfrac{7}{24}$ ۴) $\dfrac{7}{16}$

۸. اگر $f(x)=\sqrt[9]{x^2}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{3}$ ۲) $\dfrac{1}{9}$ ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) $\dfrac{2}{9}$

۹. تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-9}{h}=\dfrac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در $x=2$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۱۰. مشتق $y=\sin^3\sqrt{2x}$، به ازای $x=\dfrac{\pi^2}{18}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $\dfrac{9}{8\pi}$ ۲) $\dfrac{9}{4\pi}$ ۳) $\dfrac{27}{8\pi}$ ۴) $\dfrac{27}{4\pi}$

۱۱. اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی۹۲)

۱) -6 ۲) -3 ۳) $-\dfrac{3}{2}$ ۴) $-\dfrac{3}{4}$

۱۲. مقدار مشتق تابع $y=\cos^2\dfrac{\pi}{3x}$ به ازای $x=4$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{96}$ ۲) $\dfrac{\pi}{72}$ ۳) $\dfrac{\pi}{48}$ ۴) $\dfrac{\pi}{32}$

۱۳. مقدار مشتق تابع $y=\tan^3 x-\cot 2x$ در نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\dfrac{8}{3}$ ۴) ۴

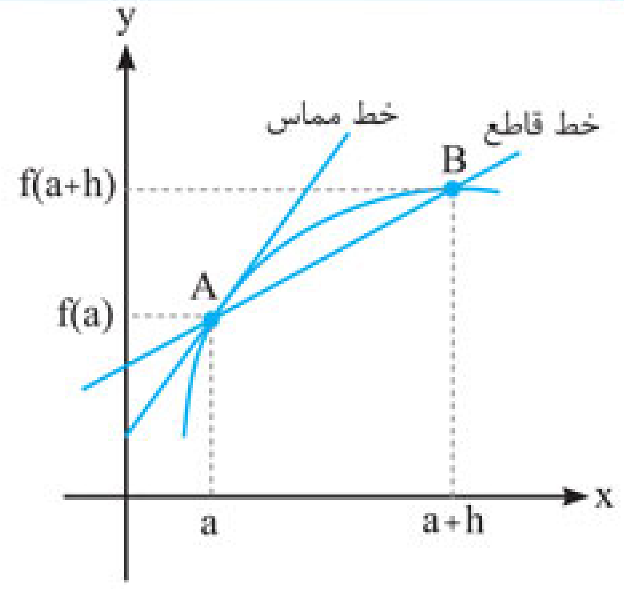
۱۴. اگر $f(x)=\sqrt{x^2-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$، کدام است؟ (ریاضی۹۷)

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $\dfrac{5}{4}$ ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) $\dfrac{5}{2}$

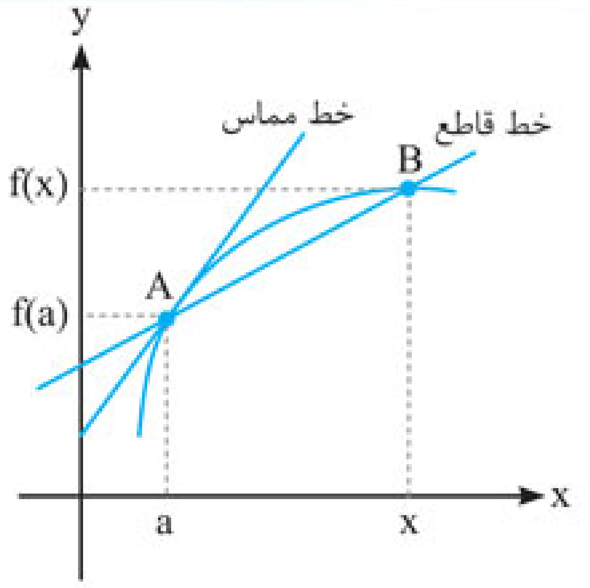
فصل هشتم

مشتق

۱ نمودارهای مماس و قاطع



شکل ۲



شکل ۱

به نمودارهای ۱ و ۲ توجه کنید. خطی که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کند خط قاطع نام دارد. شیب خط قاطع از رابطهٔ $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ به‌دست می‌آید. بنابراین در شکل‌های ۱ و ۲ شیب خط قاطع با فرض $x = a + h$ برابر است با: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$ شیب خط قاطع

هرچه نقطهٔ B را به نقطهٔ A نزدیک کنیم شیب خط قاطع به شیب خط مماس در نقطهٔ A نزدیک‌تر می‌شود. اگر Δx یعنی $x_B - x_A$ به عدد صفر میل کند شیب خط قاطع به شیب خط مماس میل می‌کند، بنابراین می‌توان گفت:

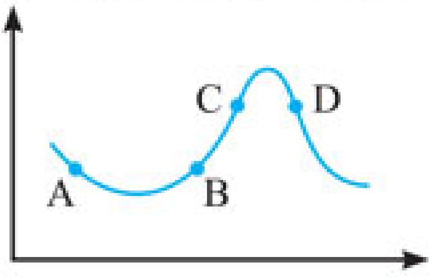
حد شیب خط قاطع برابر شیب خط مماس است وقتی تغییرات طول (Δx) به عدد صفر میل می‌کند، بنابراین داریم: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$ شیب خط مماس در نقطهٔ $x = a$

تذکر

۱ دو حد فوق هیچ تفاوتی با هم ندارند و تفاوت در ظاهر آن‌ها فقط به علت تفاوت در نام‌گذاری طول و عرض نقاط است.

۲ اگر حد فوق موجود باشد، یعنی خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $x = a$ وجود دارد که جواب این حد شیب این خط مماس را مشخص می‌کند. اگر جواب حد مثبت باشد یعنی شیب خط مماس مثبت است و خط مماس به صورت ／ و اگر شیب خط مماس منفی باشد خط مماس به صورت ＼ خواهد بود.

تست کم‌ترین شیب خط مماس در کدام‌یک از نقاط مشخص شده در نمودار زیر رخ می‌دهد؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

پاسخ گزینهٔ «۴» در نقاط A و D شیب منفی است و در نقطهٔ D شیب کم‌ترین مقدار از بین نقاط مشخص شده را دارد.

تابع $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$ داده شده است، اگر $۰ \le x \le ۱۰$ و نقاط $A(۲,f(۲))$ ، $B(۶,f(۶))$، $C(۵,f(۵))$ و $D(۴,f(۴))$ روی منحنی باشند، شیب خطی که از دو نقطهٔ B و A عبور می‌کند چند برابر شیب خطی است که از C و D عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲} = \frac{۲۴-۱۶}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{f(۴)-f(۵)}{۴-۵} = \frac{۲۴-۲۵}{-۱} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{m_{AB}}{m_{CD}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

۲ مفهوم مشتق

فرض کنید تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد، در این‌صورت اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ یا $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، مقدار این حد را مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ a می‌گوییم و آن را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته: برای تابع مشتق پذیر f رابطهٔ $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+bh)-f(a+ch)}{eh} = \frac{b-c}{e}f'(a)$ برقرار است.

تست در تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{۲h}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{۲h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{۱+h}-\frac{۱}{۱}}{۲h} = \lim_{h\to ۰}\frac{۱-۱-h}{۲h(۱+h)}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{-h}{۲h(۱+h)} = \lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{۲(۱+h)} = \frac{-۱}{۲}$$

اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x^۲-۴} = ۴$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) -۱۶ ۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{(x-۲)(x+۲)}=۴\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times \lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x+۲}=۴\Rightarrow f'(۲)\times\frac{۱}{۴}=۴\Rightarrow f'(۲)=۱۶$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-f'(۲)=-۱۶$$

قوانین اصلی مشتق

۱) $f(x)=c\Rightarrow f'(x)=۰$

۲) $f(x)=ax+b\Rightarrow f'(x)=a$

۳) $f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=nx^{n-۱}$

۴) $f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$

۵) $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

۶) $f(x)=\tan x\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x$

۷) $f(x)=\cot x\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{\sin^۲ x}=-(۱+\cot^۲ x)$

۸) $f(x)=\sqrt{ax+b}\Rightarrow f'(x)=\frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$

۹) $f(x)=\sqrt[n]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}$

قضیه

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، داریم:

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$

پ) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}\quad (g(a)\neq ۰)$

ت) $(kf)'(a)=kf'(a)\quad$ (k مقدار ثابت)

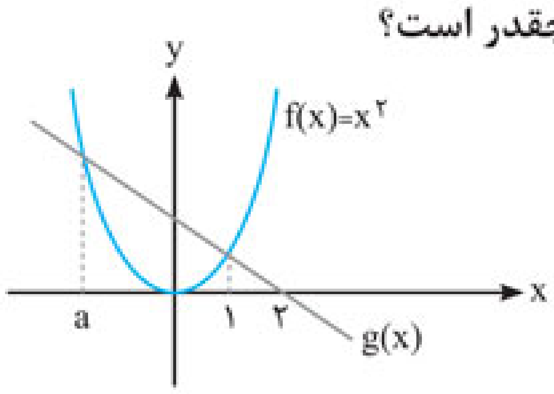
تست اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ باشد، حاصل $\frac{(f+g)'(۱)}{(۳f+۲g)'(۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۱۹}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۱۷}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\frac{(f+g)'(۱)}{(۳f+۲g)'(۱)}=\frac{f'(۱)+g'(۱)}{۳f'(۱)+۲g'(۱)}=\frac{۳+۵}{۳\times ۳+۲\times ۵}=\frac{۸}{۹+۱۰}=\frac{۸}{۱۹}$$

با توجه به نمودار زیر، مشتق تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطهٔ $x=a$ چقدر است؟



۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۱»

با توجه به تعریف مشتق می‌دانیم که:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

پس:

$$\lim_{t\to 0}\frac{2f(-1+t)-2f(-1)}{3t}+\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{2h}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\frac{f(-1+t)-f(-1)}{t}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{2}{3}f'(-1)+\frac{1}{2}f'(-1)=\frac{7}{6}f'(-1)$$

۲. گزینهٔ «۱»

با توجه به تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ که به صورت $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است، از رابطهٔ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-7}{x^2-1}=4$ درمی‌یابیم که $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)-7)=0$ پس $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=7$ و چون $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است پس $f(1)=7$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}(f(x)+f(1))$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-7}{x^2-1}\times 14=2\times 4\times 14=112$$

۳. گزینهٔ «۴»

$$y=\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)^2\Rightarrow y'=2\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\frac{-16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$\Rightarrow y'(-8)=2\left(\frac{16}{-8}-\sqrt[3]{(-8)^2}\right)\left(\frac{-16}{64}-\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}}\right)=2(-2-4)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=-1$$

۴. گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^3(x)-f^3(1)}{x^2-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{3f^2(x)f'(x)}{2x}\xrightarrow{x=1}\frac{3f^2(1)f'(1)}{2}=\frac{3\times 4^3}{2}=96$$

۵. گزینهٔ «۴»

ضابطهٔ مشتق تابع $f(x)=ax^2+1$ برابر $f'(x)=2ax$ است. اگر همواره $f(x)$ بالاتر از $f'(x)$ قرار گیرد آن‌گاه:

$$2ax<ax^2+1\Rightarrow ax^2-2ax+1>0$$

$$\Delta=4a^2-4a<0\Rightarrow 4a(a-1)<0\Rightarrow 0<a<1$$

۶. گزینهٔ «۱»

حد خواسته شده همان $f'(2)$ است:

$$f(x)=\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)'\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{-3-4}{(2x-3)^2}\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\xrightarrow{x=2}f'(2)=\frac{3}{2}(-7)(2)=-21$$

۷. گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)\ ,\ f'(x)=\frac{\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)'}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۴(x+۳)-(۴x+۵)}{(x+۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{\frac{۱۶-۹}{۱۶}}{۲\sqrt{\frac{۹}{۴}}}=\frac{\frac{۷}{۱۶}}{۲\times\frac{۳}{۲}}=\frac{۷}{۴۸}$$

۸. گزینهٔ «۳»

چون $f(x)=\sqrt[۹]{x^۲}$ است، پس $f^۳(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ است. فرض می‌کنیم که $g(x)=f^۳(x)$ پس طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-f^۳(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{g(۱+h)-g(۱)}{h}=g'(۱)$$

$$g(x)=\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow g'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\Rightarrow g'(۱)=\frac{۲}{۳}$$

۹. گزینهٔ «۳»

با توجه به اطلاعات مسئله $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$ و $f(۲)=۹$ است. حال از $g(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{xf'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+\frac{۲f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}=\sqrt{۹}+\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}=۳+\frac{۱}{۲}=۳/۵$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

$$y=\sin^۳\sqrt{۲x}\Rightarrow y'=۳\times\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}\sin^۲\sqrt{۲x}\cos\sqrt{۲x}$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi^۲}{۱۸})=\frac{۳}{\sqrt{۲\times\frac{\pi^۲}{۱۸}}}\sin^۲\sqrt{۲\times\frac{\pi^۲}{۱۸}}\cos\sqrt{۲\times\frac{\pi^۲}{۱۸}}=\frac{۳}{\frac{\pi}{۳}}\sin^۲\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۹}{\pi}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲۷}{۸\pi}$$

۱۱. گزینهٔ «۱»

می‌دانیم که $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ است، پس $\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=f'(-۱)$ می‌باشد.

$$f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}=\underbrace{(x+۱)}_{g(x)}\underbrace{(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}}_{h(x)}$$

$$\Rightarrow f'(-۱)=g'(-۱)h(-۱)\xlongequal{g'(-۱)=۱}(-۱-۲)\sqrt[۳]{۱+۷}=-۶$$

۱۲. گزینهٔ «۱»

$$y=\cos^۲\frac{\pi}{۳x}\Rightarrow y'=-۲(\frac{\pi}{۳x})'\cos\frac{\pi}{۳x}\sin\frac{\pi}{۳x}=-۲(\frac{-\pi}{۳x^۲})\cos\frac{\pi}{۳x}\sin\frac{\pi}{۳x}$$

با استفاده از فرمول $\sin ۲\alpha=۲\sin\cos\alpha$ داریم:

$$y'=\frac{\pi}{۳x^۲}\sin\frac{۲\pi}{۳x}\Rightarrow y'(۴)=\frac{\pi}{۳\times ۱۶}\sin\frac{۲\pi}{۳\times ۴}=\frac{\pi}{۳\times ۱۶\times ۲}=\frac{\pi}{۹۶}$$

۱۳. گزینهٔ «۴»

$$y=\tan^۳ x-\cot ۲x\Rightarrow y'=۳\tan^۲ x(۱+\tan^۲ x)+۲(۱+\cot^۲ ۲x)$$

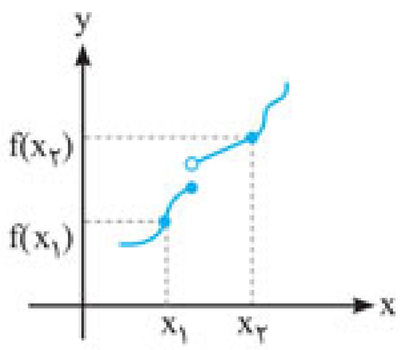
$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۶})=۳(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲(۱+(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲)+۲(۱+(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲)=۳\times\frac{۱}{۳}(۱+\frac{۱}{۳})+۲(۱+\frac{۱}{۳})=۳(۱+\frac{۱}{۳})=۳+۱=۴$$

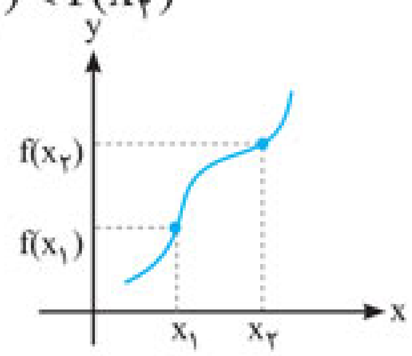
فصل نهم

کاربرد مشتق

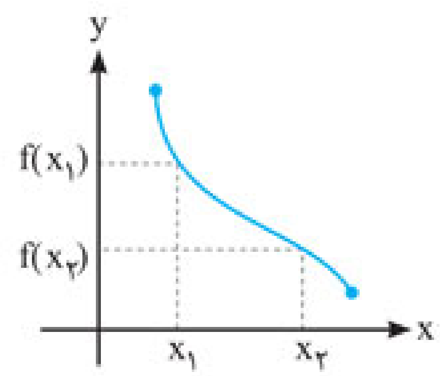
۱ یکنوایی اکید

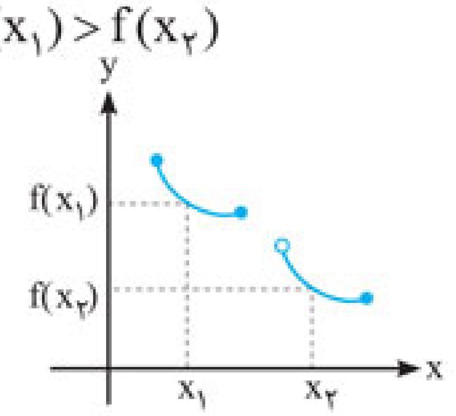
» **تعریف ۱:** تابع f روی بازهٔ I $(I \subseteq D_f)$ **صعودی اکید** است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I، داشته باشیم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$





» **تعریف۲:** تابع f روی بازهٔ I $(I \subseteq D_f)$ **نزولی اکید** است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I، داشته باشیم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$





» **تعریف۳:** تابع f را روی بازهٔ I $(I \subseteq D_f)$ **ثابت** می‌نامیم، اگر برای هر x_1 و x_2 از I، داشته باشیم: $f(x_2) = f(x_1)$

قضیهٔ یکنوایی اکید

فرض کنید f بر بازهٔ $[a,b] \subseteq D_f$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x) > 0$ باشد، آن‌گاه f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x) < 0$ باشد، آن‌گاه f بر $[a,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x) = 0$ باشد، آن‌گاه f بر $[a,b]$ ثابت است.

تست **تابع $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$ در فاصلهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -1

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

$$y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		−	0	−	0	+	

y در فاصلهٔ $(1,+\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل مقدار a برابر ۱ است.

رابطهٔ نمودارهای f و f'

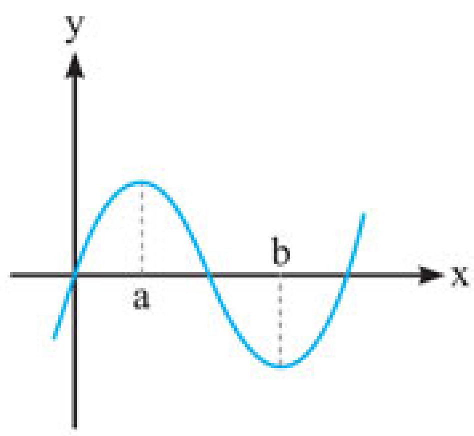
۱. در هر بازه از دامنه که $f' > 0$ است، f صعودی اکید است و نمودار f' بالای محور x ها خواهد بود.

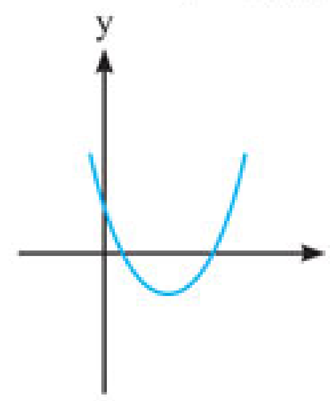
۲. در هر بازه از دامنه که $f' < 0$ است، f نزولی اکید است و نمودار f' پایین محور x ها خواهد بود.

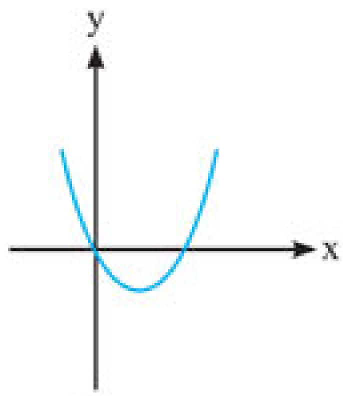
۳. اگر $f'(a) = 0$ باشد، آن‌گاه مماس بر f در $x = a$ افقی است. این موضوع بدین معنی است که نمودار $y = f'(x)$ از نقطهٔ $(a, 0)$ عبور می‌کند.

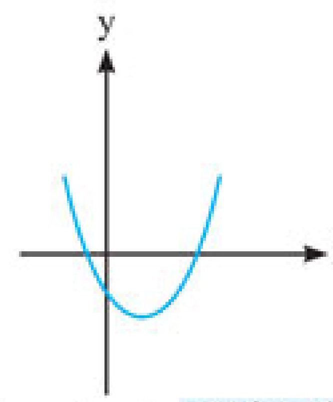
۴. اگر به ازای همهٔ x های بازهٔ $I\,(I \subseteq D_f)$، $f'(x) = 0$ باشد، آن‌گاه f در بازهٔ I ثابت است، یعنی نمودار f' روی I منطبق بر محور x ها است.

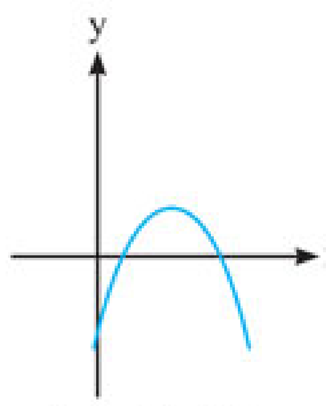
تست اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار f' چگونه می‌تواند باشد؟



۱) 

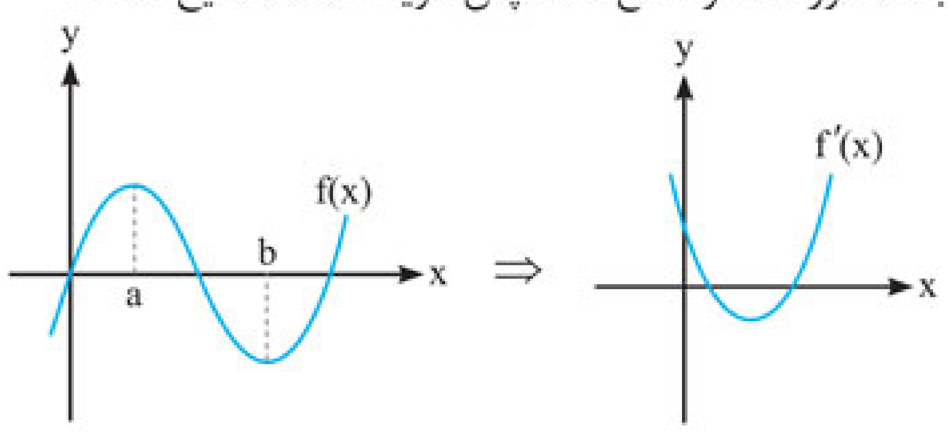
۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ **گزینهٔ «۱»** تابع f در فاصلهٔ $(-\infty, a)$ صعودی اکید $(a > 0)$، در فاصلهٔ (a, b) نزولی اکید، در فاصلهٔ $(b, +\infty)$ صعودی اکید است و هم‌چنین در دو نقطهٔ a و b مشتق صفر است. پس:

از چپ به راست، نمودار f' ابتدا باید بالای محور x، سپس پایین محور x ها و در نهایت مجدداً بالای محور x ها باشد و در نقطه با طول‌های مثبت محور x ها را قطع کند، پس گزینهٔ «۱» صحیح است.



توابع صعودی و نزولی

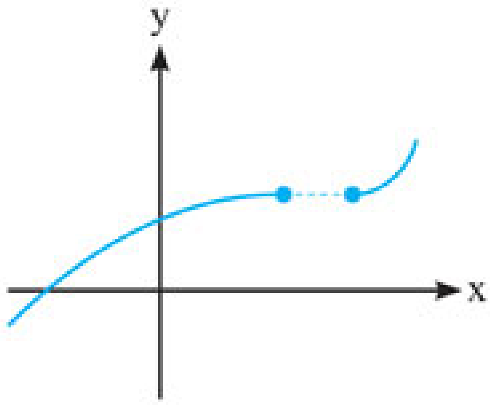
تا این‌جا در مورد توابع صعودی اکید، نزولی اکید و توابع ثابت صحبت کردیم. حال می‌خواهیم بررسی کنیم که چه تابعی صعودی و یا نزولی است.

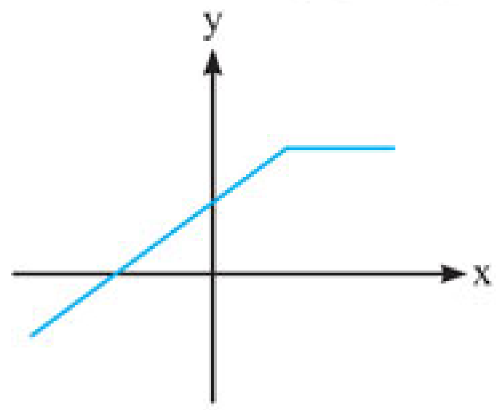
توابع صعودی

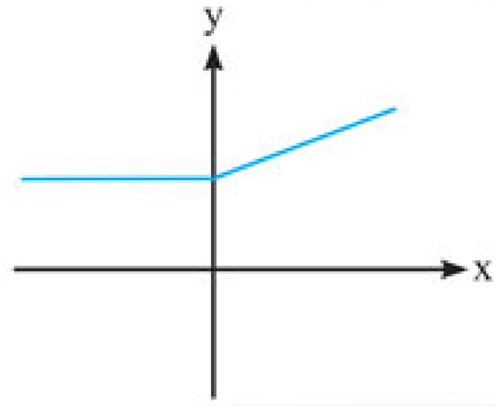
اگر برای هر x_2 و x_1 از دامنهٔ f داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$$

آن‌گاه گوییم f صعودی است، مانند شکل‌های زیر:





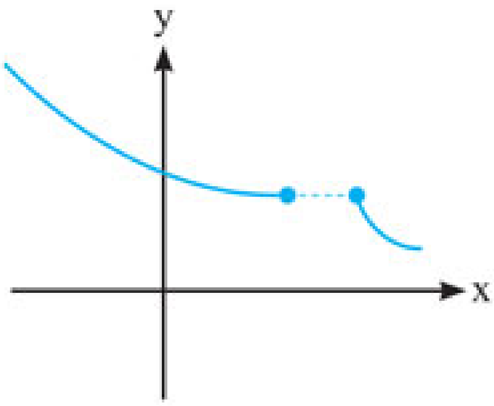


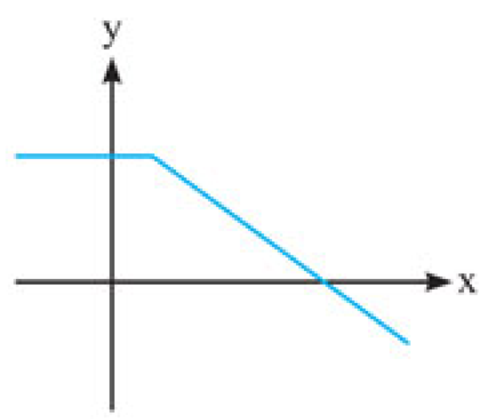
توابع نزولی

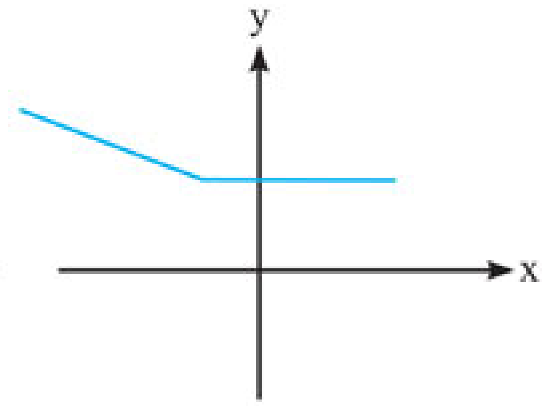
اگر برای هر x_2 , x_1 از دامنهٔ f داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$$

آن‌گاه گوییم f نزولی است. مانند شکل‌های زیر:



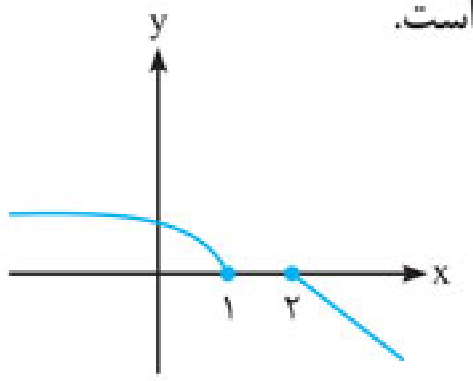




تست در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & ; \quad x\le 1\\ 2-x & ; \quad x\ge 2\end{cases}$، کدام گزینهٔ زیر کاملاً صحیح است؟

۱) تابع f نزولی است.
۲) تابع f صعودی اکید است.
۳) تابع f نزولی اکید است.
۴) تابع f صعودی است.

پاسخ **گزینهٔ «۱»** تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در حال نزول است. فقط در نقطهٔ $x_1=1$ و $x_2=2$ عرض ثابت دارد و تغییر نکرده است، پس دقت کنید که تابع نزولی اکید نیست، فقط نزولی است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. تابع $f(x)=x^4-4x+1$ در فاصلهٔ $(-\infty,a]$ نزولی اکید است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲. کدام یک از توابع هموگرافیک زیر در بازهٔ $(0,+\infty)$ صعودی اکید است؟

۱) $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$ ۲) $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ ۳) $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ ۴) $y=\dfrac{2x+21}{x+10}$

۱۲. تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x & ; \ -۲\le x\le ۰ \\ x^۲-x & ; \ ۰<x\le ۱ \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲+۴}$ **روی بازهٔ** $(-۱,۲)$ **چند نقطهٔ بحرانی دارد؟**

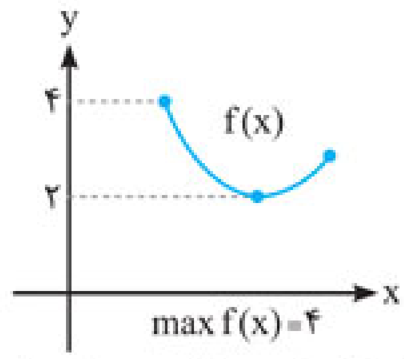
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۱

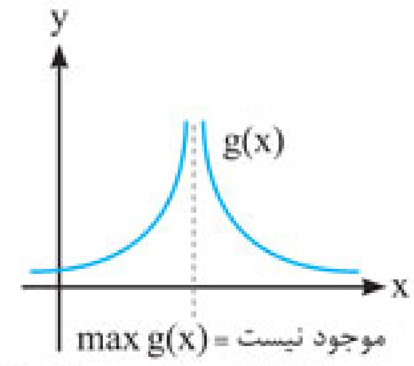
۳ اکسترمم‌های مطلق

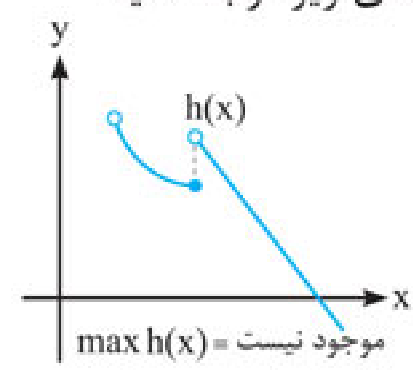
فرض کنید D دامنهٔ تابع f و نقطهٔ c عضو دامنه باشد، می‌گوییم:

الف) مقدار $f(c)$ ماکزیمم (ماکزیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x)\le f(c)$

به عبارت ساده‌تر عرض بالاترین نقطه در نمودار f، در صورت وجود، ماکزیمم تابع f است. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

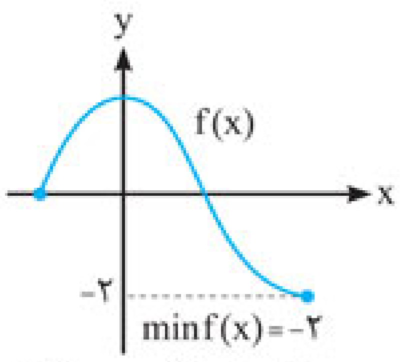


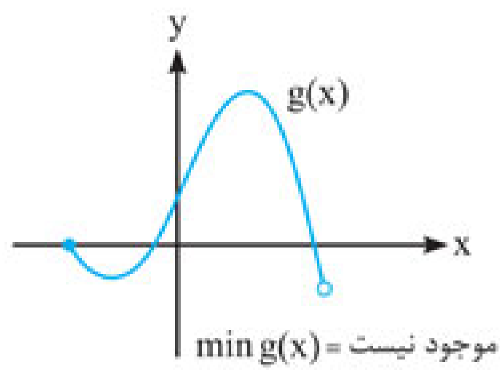


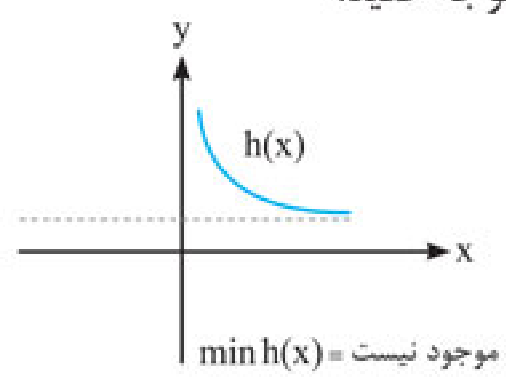


ب) $f(c)$ مقدار مینیمم (مینیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x)\ge f(c)$

به عبارت دیگر عرض پایین‌ترین نقطه در نمودار f، در صورت وجود، مینیمم تابع f است. به نمونه‌های زیر توجه کنید:



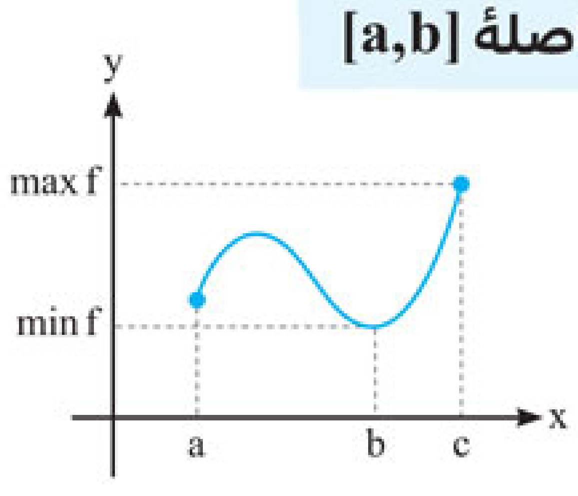




پ) $f(c)$ مقدار اکسترمم مطلق تابع f روی D است به شرطی که ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع f روی D باشد.

نکته: یکی از روش‌های یافتن اکسترمم‌های سراسری (مطلق) رسم تابع است.

اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$



نمودار تابع پیوسته $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ را در شکل روبه‌رو ببینید.

ماکزیمم مطلق تابع در نقطهٔ انتهایی راست c اتفاق افتاده است و مینیمم مطلق این تابع در نقطهٔ بحرانی b رخ داده است.

فرمول‌نامه

اتحاد، رادیکال و توان

۱ اتحادها

اتحادهای مهم و اصلی به شرح زیر است:

مربع دوجمله‌ای: الف) $(a\pm b)^{۲}=a^{۲}\pm ۲ab+b^{۲}$

مزدوج: ب) $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$

جملهٔ مشترک: پ) $(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$

مکعب دوجمله‌ای: ت) $(a\pm b)^{۳}=a^{۳}\pm ۳a^{۲}b+۳ab^{۲}\pm b^{۳}$

چاق و لاغر: ث) $(a\pm b)(a^{۲}\mp ab+b^{۲})=a^{۳}\pm b^{۳}$

۲ قوانین رادیکال‌ها $(n>۱\,,\,m\,,\,n\in\mathbb{N})$

الف) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\ (a\geq ۰)$

ب) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

پ) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ \ (b\neq ۰)$

ت) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

ث) $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$

۳ قوانین توان

الف) $a^{۰}=۱$

ب) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

پ) $a^m\div a^n=a^{m-n}\ \ (a\neq ۰)$

ت) $a^m\times b^m=(ab)^m$

ث) $a^m\div b^m=(\frac{a}{b})^m\ \ (b\neq ۰)$

الگو و دنباله

۱ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲\underbrace{a_۱}_{\text{جملهٔ اول}}+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(a_۱+\underbrace{a_n}_{\text{جملهٔ آخر}})$$

۲ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

$$S_n=a_۱\frac{۱-q^n}{۱-q}\ \ (q\neq ۱)$$

۳ قانون اندیس‌ها

دنبالهٔ حسابی: $m+n=p+q\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$

دنبالهٔ هندسی: $m+n=h+k\Rightarrow a_m\cdot a_n=a_h\cdot a_k$

معادلات گویا و گنگ

۱ حل معادلات گویا:

الف) دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب می‌کنیم.

ب) عبارت به‌دست آمده را حل می‌کنیم. جواب‌ها باید مخرج هیچ کسری را صفر نکنند.

۲ حل معادلات گنگ

الف) دو طرف معادله را به توان فرجهٔ مشترک رادیکال‌ها می‌رسانیم.

ب) با حل عبارت به‌دست آمده، جواب‌ها را در معادلهٔ اصلی امتحان می‌کنیم، زیرا ممکن است که در فرجه‌های زوج، ریشهٔ اضافی تولید شود.

هندسهٔ تحلیلی

۱ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

۲ مختصات وسط پاره‌خط AB:

$$M \left| \begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right.$$

۳ فاصلهٔ نقطهٔ (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$: $AH = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۴ فاصلهٔ دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$: $AH = \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

قدرمطلق

۱ ویژگی‌های قدرمطلق

الف) $|x| \geq 0$

ب) $|x| = |-x|$

پ) $\sqrt{x^2} = |x|$

ت) $|x^2| = x^2$

ث) $|xy| = |x||y|$

ج) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

چ) $|x| = |a| \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{یا} \\ x = -a \end{cases}$

ح) $|x| \geq c \Rightarrow \begin{cases} x \geq c \\ \text{یا} \\ x \leq -c \end{cases} \quad (c > 0)$

خ) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلثی)

د) $|x| \leq a \Rightarrow -a < x < a$

۲ معادلات قدرمطلقی

جواب‌های معادلهٔ $|f(x)| = |g(x)|$ همان جواب‌های دو معادلهٔ $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ هستند یا می‌توان جواب‌های معادله را با به توان رساندن دو طرف معادله به‌دست آورد.