سرشناسه: منصوری، میلاد/ عنوان و نام پدیدآور: جمع بندی ریاضی تجربی/
مشخصات نشر: تهران: مهروماه نو، ۱۳۹۹ / مشخصات ظاهری: ۱۵×۲۱ س.م/
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۱۷-۵۸۸-۴ / وضعیت فهرست‌نویسی: فیپای مختصر/
شناسه افزوده: گودرزی، محمد - کریمی خراسانی، کیان /شماره کتاب‌شناسی
ملی: ۴۹۰۵۴۶۲

جمع‌بندی

ریاضیات تجربی

مرور و جمع‌بندی کنکور در ۲۴ ساعت

- ناشر .... مهروماه نو
- مؤلفان .... میلاد منصوری، محمد گودرزی، کیان کریمی خراسانی
- مدیر شورای تألیف .... محمد حسین انوشه
- مدیر گروه ریاضی .... عباس اشرفی
- مسئول ویراستاری .... آزاده غنی‌فرد
- ویراستاران علمی .... آزاده غنی‌فرد، مهرنوش رضوی، وحید جعفری
- نوبت و سال چاپ .... چهارم، ۱۴۰۰
- تیراژ .... ۲۰۰۰ نسخه
- شابک ۹۷۸-۶۰۰-۳۱۷-۵۸۸-۴

قیمت ۷۹۰۰۰ تومان

- مدیر تولید .... مریم تاجداری
- مدیر هنری .... محسن فرهادی
- طراح گرافیک .... تایماز کاویانی
- طراح جلد .... حسین شیرمحمدی
- مسئول تصویربرداری .... مهدی منصوری
- مدیر فنی .... میلاد صفایی
- صفحه‌آرا .... مرجان سپهریان، پریسا حسینی، رویا طبسی، مرتضی یعقوبی
- رسم تصاویر .... مریم صابری برون
- حروف‌چین .... ربابه موسوی، مهناز ستاری، مجتبی حسنی

نشانی: تهران، میدان انقلاب، خیابان ۱۲ فروردین، کوچه مینا، پلاک ۳۷
دفتر مرکزی ۶۶۴۰۸۴۰۰
واحد فروش ۶۶۴۰۸۴۰۳
روابط عمومی ۶۶۹۶۸۵۸۹
فروش اینترنتی و تلفنی ۶۶۴۷۹۳۱۱
پیامک ۲۰۰۰۸۴۸۴

www.mehromah.ir

مهروماه

مثال از توضیحات قبل می‌فهمیم که $\sqrt{۹}=۳$ اســت. اشــتباه متداولی وجــود دارد که $\sqrt{۹}$ را برابر ±۳ می‌گیرند. چنین چیزی در ریاضی نداریم.

مثال به محاسبه‌های زیر دقت کنید:

۱) $\sqrt{(\sqrt{۲}-۲)^۲}=|\sqrt{۲}-۲|=۲-\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{(x+۳)^۲}=|x+۳|$

۳) $\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$ (فرجهٔ فرد، قدرمطلق نمی‌گیرد.)

۴) $\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۲^۶}=۲^۲=۴$

۵) $\sqrt[۵]{x^{۱۵}}=x^۳$

■ بنابراین می‌فهمیم که $\sqrt[۲n]{x}$ همواره نامنفی اســت. یعنی $\sqrt[۲n]{x}\geq ۰$. این حقیقت، در آیندهٔ نزدیک، نقش مهمی را ایفا می‌کند.

دامنهٔ رادیکال‌ها

اگر فرجهٔ رادیکالی زوج باشد، عدد داخل رادیکال باید نامنفی باشد. یعنی در $\sqrt[n]{x}$، اگر n عددی زوج باشد، باید $x\geq ۰$ باشد. اما اگر n فرد باشد، هیچ محدودیتی برای x نداریم و می‌تواند عددی منفی، مثبت یا صفر باشد.

■ آموختیم که هم خود $\sqrt[۲n]{x}$ نامنفی اســت، هم x داخل آن. بنابراین $\sqrt{x^۲}=|x|$ است، اما $(\sqrt{x})^۲=x$ است، زیرا در این‌جا x حتماً نامنفی است (مهم).

مثال عدد $\sqrt{-۷}$ بی‌معنی است. عدد $\sqrt{۷}$، عددی مثبت است. عدد $-\sqrt{۷}$ عددی بامعنی و منفی است. اگر فرجه فرد بود، دردسر کم‌تر بود، زیرا $\sqrt[۳]{-۷}$ بامعنی است و البته که عددی منفی است.

مثال دقت کنید که $\sqrt{-x}$ لزوماً بی‌معنی نیست. در واقع اگر $x\leq ۰$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{-x}$ بامعنی است.

علاوه‌بر این‌ها، باید بتوانیم توان‌های مختلف اعداد را با هم مقایسه کنیم.

بدرفتاری توان‌ها

اگر $۰<a<۱$ باشــد، آن‌گاه $۰<\cdots<a^۳<a^۲<a<\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}<\cdots<۱$ است. اما اگر $a>۱$ باشد، آن‌گاه $\cdots>a^۳>a^۲>a>\sqrt{a}>\sqrt[۳]{a}>\cdots>۱$ است.

مثال دقــت کنید که چون $۰<\frac{۱}{۲}<۱$ اســت، پس $\sqrt{\frac{۱}{۲}}>(\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۱}{۸}$ اســت. اما چون $۳>۱$ اســت، لذا $۳\sqrt{۳}=۳^{۱/۵}>۳^{۱/۲۵}=۳\sqrt[۴]{۳}$ است.

مثال **اگر a عددی مثبت و $a>a^۳$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{(a-۱)^۲}+\sqrt{(a-\sqrt{a})^۲}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ دقت کنید که داریم:

$$\sqrt{(a-۱)^۲}+\sqrt{(a-\sqrt{a})^۲}=|a-۱|+|a-\sqrt{a}|$$

از آن‌جا که a مثبت است و $a>a^۳$ است، می‌فهمیم که در واقع $۰<a<۱$ است. در نتیجه $۰<a<\sqrt{a}<۱$ و داریم:

$$|a-۱|+|a-\sqrt{a}|=۱-a+\sqrt{a}-a=۱+\sqrt{a}-۲a$$

■ حالا می‌توانید آزمون ۱ را حل کنید.

۲ اتحاد و تجزیه (۱)

■ دو اتحاد مهم، یعنی اتحادِ مزدوج و اتحاد مربع دوجمله‌ای (اتحاد اول)، در مسائل مربوط به توان‌ها و رادیکال‌ها نقش مهمی دارند لذا موقتاً این دو اتحاد را مطالعه می‌کنیم و بعداً دوباره به توان‌ها و محاسبه‌کردن برمی‌گردیم.

■ درصورتی که دو عدد مزدوج دیدیم که برایمان آشـــنا نیستند، بهتر است به کمک اتحاد مزدوج، معکوس بودن آن‌ها را چک کنیم.

■ اعداد معکوس را برای قضیهٔ مفید زیر نیاز داریم که در اکثر مسائل، محاسبات ما را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.

■ **قضیهٔ اعداد معکوس:** اگر a و b دو عدد معکوس باشند، یعنی $ab=1$ باشد، آن‌گاه داریم:

۱) $a^m b^n = a^{m-n} = b^{n-m}$ ۲) $a^n = b^{-n}\,,\, a^{-n} = b^n$ ۳) $\dfrac{a^m}{b^n} = a^{m+n}$

مثال به نحوهٔ محاسبه‌های زیر که عمدتاً براساس قضیهٔ اعداد معکوس است، دقت کنید.

۱) $\underbrace{(۲+\sqrt{۳})^{۵}(۲-\sqrt{۳})^{۳}}_{\text{پایه‌ها معکوس هستند}} = (۲+\sqrt{۳})^{۵-۳} = (۲+\sqrt{۳})^{۲}$

۲) $\underbrace{(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۳}{۴}}(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۲}{۳}}}_{\text{پایه‌ها معکوس هستند}} = (\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}} = (\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۱}{۱۲}}$

۳) $(۲+\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}+۱}(۲-\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}-۱} = (۲+\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}+۱} = (۲+\sqrt{۳})^{۲}$

۴) $\dfrac{(\sqrt{۲}-۱)^{۵}}{(\sqrt{۲}+۱)^{۳}} = (\sqrt{۲}-۱)^{۸}$

۵) $\sqrt{\dfrac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}} = \sqrt{\dfrac{(۲-\sqrt{۳})^{۱}}{(۲+\sqrt{۳})^{۱}}} = \sqrt{(۲-\sqrt{۳})^{۲}} = |۲-\sqrt{۳}| = ۲-\sqrt{۳}$

۶) $\sqrt{۲+\sqrt{۳}} \times \sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}} = (۲+\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۲}}(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۳}} = (۲+\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}} = (۲+\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۶}}$

■ در این‌جا نیز ممکن است که طراح، سؤال را در دو مرحله بیان کند.

تست اگر $A=(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۲}{۳}}\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{\dfrac{A}{\sqrt[۳]{A}}}$ برابر کدام است؟ (مشابه ریاضی خارج ۹۳)

۱) $(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۱}{۶}}$ ۲) $(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۱}{۶}}$ ۳) $(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۱}{۱۸}}$ ۴) $(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۱}{۱۸}}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

در ابتدا دقت کنید که $(\sqrt{۲}+۱)$ و $(\sqrt{۲}-۱)$ دو عدد معکوس هستند. بنابراین:

$$A=(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۲}{۳}}(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۱}{۲}} = (\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}} = (\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۱}{۶}}$$

حالا سراغ محاسبهٔ $\sqrt{\dfrac{A}{\sqrt[۳]{A}}}$ می‌رویم و سپس مقدار A را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{A}{\sqrt[۳]{A}}} = \sqrt{\frac{A}{A^{\frac{۱}{۳}}}} = \sqrt{A^{۱-\frac{۱}{۳}}} = \sqrt{A^{\frac{۲}{۳}}} = |A|^{\frac{۱}{۳}} \xlongequal{A>۰} A^{\frac{۱}{۳}} = ((\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۱}{۶}})^{\frac{۱}{۳}} = (\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۱}{۱۸}}$$

۶. حاصل $\dfrac{۲x^{۲}+|x|-۳}{x^{۲}-۱}$ برابر کدام است؟ (در اتحاد مزدوج، زیرکانه عمل کنید!)

۱) $۲x-۳$ ۲) $\dfrac{۲|x|+۳}{|x|+۱}$ ۳) $\dfrac{۲|x|-۳}{|x|-۱}$ ۴) $\dfrac{۲|x|+۳}{|x|-۱}$

۷. حاصل $\dfrac{۱}{(x+۱)(x+۲)}+\dfrac{۱}{x(x+۱)}$ برابر کدام است؟ (محاسباتی ـ تکنیکی)

۱) $\dfrac{۲}{x(x+۲)}$ ۲) $\dfrac{۱}{x(x+۱)}$ ۳) $\dfrac{۳}{x(x+۲)}$ ۴) $\dfrac{۲}{x+۲}$

۸. اگر $\dfrac{b}{x+۲}+\dfrac{a}{x+۱}=\dfrac{۲x+۱}{x^{۲}+۳x+۲}$ باشد، آن‌گاه $۳a+b$ کدام است؟ (مفهومی ـ محاسباتی)

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) صفر

۹. اگر بخواهیم $x(x+۱)+۳x+۳$ را به‌صورت مربع کامل درآوریم، حاصل برابر کدام گزینه می‌شود؟

۱) $(x+۲)^{۲}-۱$ ۲) $(x-۲)^{۲}+۱$ ۳) $(x-۲)^{۲}-۱$ ۴) $(x+۲)^{۲}+۱$

۱۰. حاصل $\sqrt{۲۰}\left(\sqrt{۷-۲\sqrt{۱۰}}+\sqrt{۷+۲\sqrt{۱۰}}\right)$ برابر کدام است؟ (مشابه ریاضی ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) $۴\sqrt{۲۰}$ ۴) $۶\sqrt{۲۰}$

هایپرتست

۱. اگر $a=\sqrt{\sqrt{\dfrac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}}+\sqrt{\dfrac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{a-\sqrt{۳}}+\sqrt{a+\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۲. حاصل $(۱۷+۱۲\sqrt{۲})^{\frac{۵}{۸}}(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۴}{۳}}$ برابر کدام است؟

۱) $(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۱}{۳}}$ ۲) $(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۷}{۶}}$ ۳) $(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۲}{۳}}$ ۴) $(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۳}{۵}}$

۳. اگر $۲^{a}=\sqrt{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}-\sqrt{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}$ باشد، a کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{۵}{۴}$ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

۴. ساده‌شدهٔ عبارت $\dfrac{(x^{۲}+x)^{۲}-۱۸(x^{۲}+x)+۷۲}{(|x|-۳)(|x|+۳)}$ برابر کدام است؟

۱) $x^{۲}-۲x-۸$ ۲) $x^{۲}+۲x+۸$ ۳) $x^{۲}+۲x-۸$ ۴) $x^{۲}-۲x+۸$

۵. اگر $\tan^{۲}\alpha+\cot^{۲}\alpha=۷$ باشد، آن‌گاه $\tan^{۳}\alpha+\cot^{۳}\alpha$ برابر کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۱۸− ۳) ۲۰ ۴) ۳۶−

۶. حاصل $\sqrt{x+۸+۴\sqrt{x+۴}}$ به‌ازای $x=۲\sqrt{۳}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}+۱$ ۲) $\sqrt{۳}+۲$ ۳) $\sqrt{۳}+۳$ ۴) $\sqrt{۳}+۴$

۷. اگر $\sqrt[۴]{x+۱}+\sqrt[۴]{x-۱}=۵$ باشد، آن‌گاه حاصل $\dfrac{۲}{\sqrt[۴]{x+۱}-\sqrt[۴]{x-۱}}$ برابر کدام است؟

۱) $۵(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})$ ۲) $\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}$

۳) ۱۲۰ ۴) $۲(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})$

۸. اگر $-۱<a<۰$ باشد و $x=|a|^{-\frac{۳}{۵}}$ و $y=|a|^{-\frac{۱}{۳}}$ و $z=|a|^{\frac{۵}{۳}}$ باشند، آن‌گاه ....

۱) $x<y<z$ ۲) $z<y<x$ ۳) $y<x<z$ ۴) $z<x<y$

۹. فرض کنید $a=۲+۲\sqrt{۲}$ و $b=۲-۲\sqrt{۲}$ باشد. در این‌صورت، حاصل $(a+۱)^{-\frac{۱}{۲}}+(b+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$ برابر کدام‌است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$

۱۰. کدام عامل در تجزیهٔ عبارت $(x^{۴}+x^{۲})^{۲}-۸(x^{۴}+x^{۲})+۱۲$ دیده نمی‌شود؟

۱) $x^{۲}+۲$ ۲) $x^{۲}+۳$ ۳) $x^{۲}-۳$ ۴) $x^{۲}-۲$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی (۱)

۱. گزینهٔ «۴»

$$۲^{x+۱}=۱۰\Rightarrow ۲^{x}\times ۲^{۱}=۱۰\Rightarrow ۲^{x}=۵\Rightarrow ۴^{x}=۲۵\Rightarrow ۴^{x-۱}=\frac{۴^{x}}{۴}=\frac{۲۵}{۴}=۶/۲۵$$

۲. گزینهٔ «۲»

از تساوی $۵^{x+۱}=a$ داریم:

$$۵^{x}\times ۵=a\Rightarrow ۵^{x}=\frac{a}{۵}$$

و از تساوی $۳^{x-۱}=b$ نیز داریم:

$$\frac{۳^{x}}{۳}=b\Rightarrow ۳^{x}=۳b$$

بنابراین:

$$۱۵^{x+۱}=۱۵^{x}\times ۱۵=(۵^{x}\times ۳^{x})\times ۱۵=(\frac{a}{۵}\times ۳b)\times ۱۵=۹ab$$

۳. گزینهٔ «۲»

$$\frac{۱۸^{۳}\times ۱۲^{-۲}}{۶^{۴}\times ۱۶}=\frac{۱۸^{۳}}{۱۲^{۲}\times ۶^{۴}\times ۱۶}=\frac{(۳^{۲}\times ۲)^{۳}}{(۲^{۲}\times ۳)^{۲}\times ۲^{۴}\times ۳^{۴}\times ۲^{۴}}$$

$$=\frac{۳^{۶}\times ۲^{۳}}{۲^{۴}\times ۳^{۲}\times ۲^{۸}\times ۳^{۴}}=\frac{۳^{۶}\times ۲^{۳}}{۳^{۶}\times ۲^{۱۲}}=\frac{۱}{۲^{۹}}=۲^{-۹}=۲^{-۹}\times ۳^{۰}$$

یعنی $a=-۹$ و $b=۰$ است. پس $a+b=-۹$ است.

۱ معادلهٔ درجهٔ ۱

▪ بـــرای حل معادلهٔ درجهٔ یک، مجهول‌ها را به یک طرف انتقال می‌دهیم و عددها را به طرف دیگر می‌بریم سپس به معادله‌ای به فرم $ax = b$ می‌رسیم که جواب آن $x = \frac{b}{a}$ است. $(a \neq ۰)$

مثال به نحوهٔ حل معادله‌های درجهٔ ۱ زیر دقت کنید.

۱ $۴x - ۳ = ۵ - x \Rightarrow ۵x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۸}{۵}$

۲ $(\sqrt{۲}+۱)^۳ x = (\sqrt{۲}-۱) \Rightarrow x = \frac{(\sqrt{۲}-۱)}{(\sqrt{۲}+۱)^۳} = (\sqrt{۲}-۱)^۴$

۳ $۴-(۲-(۴-۲x)) = (x+۳)+۲(۱-x)$

$\Rightarrow ۴-(۲-۴+۲x) = x+۳+۲-۲x$

$\Rightarrow ۴-(-۲+۲x) = -x+۵ \Rightarrow ۴+۲-۲x = -x+۵ \Rightarrow ۱ = x$

نکته اگر به وضعیت کسر = کسر رسیدیم، باید طرفین وسطین کنیم. این قاعدهٔ مهم چنین است:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Rightarrow A(x)D(x) = B(x)C(x)$$

ولی هرجا کسر داشتیم حتماً باید چک کنیم که جواب ما، مخرج را صفر نکند. کدام مخرج را؟ مخرج معادلهٔ اصلی سؤال. این نکته را در مثال‌های بعدی بررسی می‌کنیم. فعلاً چند طرفین وسطین ساده‌تر را حل کنیم.

مثال به نحوهٔ حل معادلات گویای زیر دقت کنید.

۱ $\frac{۳x}{x+۱} = ۲ \Rightarrow ۳x = ۲(x+۱) \Rightarrow ۳x = ۲x+۲ \Rightarrow x = ۲$

۲ $\frac{۲x+۱}{۳} + \frac{x-۱}{۲} = \frac{۴x+۱}{۲} + x + ۲$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۲(۲x+۱)+۳(x-۱)}{۶} = \frac{۴x+۱+۲(x+۲)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۴x+۲+۳x-۳}{۶} = \frac{۴x+۱+۲x+۴}{۲} \Rightarrow \frac{۷x-۱}{۶} = \frac{۶x+۵}{۲} \Rightarrow ۲(۷x-۱) = ۶(۶x+۵)$$

$$\Rightarrow ۱۴x-۲ = ۳۶x+۳۰ \Rightarrow ۲۲x = -۳۲ \Rightarrow x = -\frac{۳۲}{۲۲} = \frac{-۱۶}{۱۱}$$

نکته اگر $x = a$ ریشهٔ یک معادله باشـــد (چه کسری، چه رادیکالی، چه درجهٔ ۱، چه درجهٔ ۲ و...)، آن‌گاه این عدد در معادله صدق می‌کند.

مثال **اگر $x=۲+\sqrt{۳}$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{a}{x}=۳x+a$ باشد، آن‌گاه مقدار a را بیابید.**

پاسخ با قراردادن $x=۲+\sqrt{۳}$ در معادله، داریم:

$$\frac{a}{۲+\sqrt{۳}}=۳(۲+\sqrt{۳})+a\Rightarrow a(۲-\sqrt{۳})=۶+۳\sqrt{۳}+a\Rightarrow a(۲-\sqrt{۳})-a=۶+۳\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow[\text{از a}]{\text{فاکتورگیری}}a(۲-\sqrt{۳}-۱)=۶+۳\sqrt{۳}\Rightarrow a(۱-\sqrt{۳})=۶+۳\sqrt{۳}\Rightarrow a=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{گویاکردن}}a=-\frac{۱۵+۹\sqrt{۳}}{۲}$$

گاهی بعد از ساده کردن یک عبارت به معادلهٔ درجهٔ یک می‌رسیم. خیلی مهم است که حواس‌مان به مخرج‌ها باشد.

مثال **جواب‌های معادلهٔ $\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۲}=۲x-۳$ را به‌دست آورید.**

پاسخ به کمک اتحاد جملهٔ مشترک داریم: $\frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)}=۲x-۳\Rightarrow x-۱=۲x-۳\Rightarrow x=۲$

اما $x=۲$ جواب قابل قبولی نیست، زیرا مخرج معادلهٔ اصلی سؤال را صفر می‌کند. باید بدانید که ساده‌کردن اصولی دارد و آن اصول را به‌درستی رعایت کنید:

نکتهٔ مهم اگر عبارتی را از دو طرف معادله‌ای ساده کردیم، باید آن عبارت را برابر صفر قرار دهیم و جواب یا جواب‌های آن را، در صورت وجود، به‌دست آوریم، یعنی:

$$A(x)B(x)=A(x)C(x)\Rightarrow A(x)=۰ \text{ یا } B(x)=C(x)$$

اما اگر عبارت در مخرج بود، ساده‌کردن آن از طرفین بلامانع است، ولی در پایان بررسی می‌کنیم که جواب مخرج را صفر نکند.

$$\frac{B(x)}{A(x)}=\frac{C(x)}{A(x)}\Rightarrow A(x)\neq ۰\,,\,B(x)=C(x)$$

مثال **معادلهٔ $۲(x-۲)(x-۳)(x-۴)=x(x-۲)(x-۳)$ را حل کنید.**

پاسخ می‌خواهیم $(x-۲)$ و $(x-۳)$ را ساده کنیم. بنابراین باید ریشه‌های آن‌ها را هم در نظر بگیریم.

$$۲\cancel{(x-۲)}\cancel{(x-۳)}(x-۴)=x\cancel{(x-۲)}\cancel{(x-۳)}\Rightarrow x-۲=۰ \text{ یا } x-۳=۰ \text{ یا } ۲(x-۴)=x\Rightarrow x=۲ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۸$$

بنابراین این معادله سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

نکته ویژگی مهم عدد صفر: اگر حاصل‌ضرب چند عبارت برابر ۰ باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر است. یعنی برای حل معادلهٔ $A(x)B(x)C(x)\cdots=۰$ ، معادله‌های $A(x)=۰$ و $B(x)=۰$ و... را جداگانه حل می‌کنیم و در آخر کار از جواب‌ها اجتماع می‌گیریم. دقیقاً به خاطر همین قضیه است که تجزیه و اتحاد خیلی مفید است.

مثال معادله‌های زیر، با توجه به نکتهٔ فوق حل شده‌اند. آن‌ها را مطالعه بفرمایید.

۱ $(x^۲+۳x)(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x(x+۳)(x-۱)(x+۱)=۰$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x+۳=۰ \text{ یا } x-۱=۰ \text{ یا } x+۱=۰\Rightarrow x\in\{۰,-۳,۱,-۱\}$$

۲ $x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow(x+۴)(x-۳)=۰\Rightarrow x+۴=۰ \text{ یا } x-۳=۰\Rightarrow x\in\{-۴,۳\}$

۳ $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0 \Rightarrow ((x^2+x)-12)((x^2+x)-6)=0$

$\Rightarrow (x^2+x-12)(x^2+x-6)=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)(x+3)(x-2)=0$

$\Rightarrow x+4=0$ یا $x-3=0$ یا $x+3=0$ یا $x-2=0 \Rightarrow x\in\{-4,3,-3,2\}$

۴ $7x^2-16x+4=0 \xrightarrow{\text{جملهٔ مشترک ضریب‌دار}} (x-2)(7x-2)=0 \Rightarrow x-2=0$ یا $7x-2=0$

$x\in\{2,\frac{2}{7}\}$

۵ $(\frac{x+3}{x-1})^2+5(\frac{x+3}{x-1})+6=0 \Rightarrow (\frac{x+3}{x-1}+3)(\frac{x+3}{x-1}+2)=0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1}+3=0$ یا $\frac{x+3}{x-1}+2=0$

$\Rightarrow \frac{4x}{x-1}=0$ یا $\frac{3x+1}{x-1}=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=-\frac{1}{3} \Rightarrow x\in\{0,-\frac{1}{3}\}$

در مورد شمارهٔ ۵ دقت کنید که جواب‌های به‌دست آمده، هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند.

حل معادلهٔ قدرمطلقی

اصل مطلب بـرای حل معادلهٔ $|A(x)|=B(x)$، راه‌حل کلی این اسـت کـه معادله‌های $A(x)=B(x)$ و $A(x)=-B(x)$ را حل کنیم و جواب‌های به‌دسـت آمده را چک کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید بخواهیم معادلهٔ $|2x-1|=x+2$ را حل کنیم. داریم:

$$|2x-1|=x+2 \Rightarrow 2x-1=x+2 \text{ یا } 2x-1=-x-2 \Rightarrow x=3 \text{ یا } x=-\frac{1}{3}$$

حالا باید این جواب‌ها را در معادله چک کنیم. بعضی وقت‌ها جواب‌های اضافه به‌دست می‌آوریم. ریشه‌ها را در معادلهٔ $|2x-1|=x+2$ قرار می‌دهیم و داریم:

$x=3 \Rightarrow |5|=5$ ✓

$x=-\frac{1}{3} \Rightarrow |-\frac{5}{3}|=\frac{5}{3}$ ✓

بنابراین هر دو جواب قابل قبول‌اند.

خوشـبختانه در دو مورد بسـیار رایـج، حتی نیازی به چک‌کـردن نداریم. یکی معادلـه‌ای که دو طرف آن قدرمطلقی هسـتند، یعنی $|A(x)|=|B(x)|$ و دیگری معادله‌ای که یک طرف آن عددی نامنفی است. یعنی با شـرط $a\geq 0$، معادلهٔ $|A(x)|=a$ نیازی به چک‌کردن ندارد. مثلاً بـرای حل معادلهٔ $|x-3|=2$، داریم:

$|x-3|=2 \Rightarrow x-3=2$ یا $x-3=-2 \Rightarrow x=5, x=1$

در آخر این نکتهٔ بدیهی را فراموش نکنید: معادلهٔ $|A(x)|=b$ وقتی b عددی منفی باشد، جواب حقیقی ندارد.

مثال به نحوهٔ حل معادلات قدرمطلقی زیر دقت کنید:

۱ $|3x-2|=7 \Rightarrow 3x-2=7$ یا $3x-2=-7 \Rightarrow x=3$ یا $x=-\frac{5}{3}$

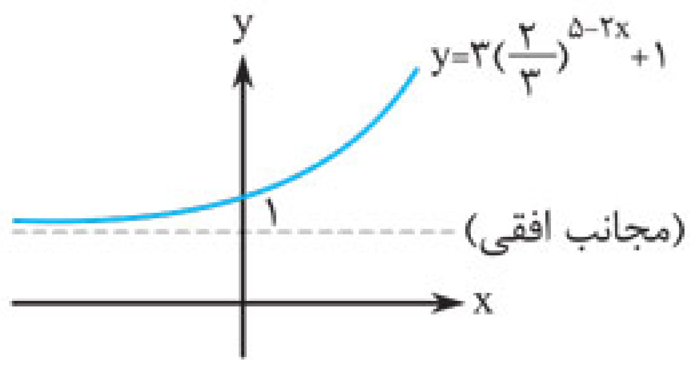
۲ $||x-2|-5|=3 \Rightarrow |x-2|-5=3$ یا $|x-2|-5=-3 \Rightarrow |x-2|=8$ یا $|x-2|=2$

$\Rightarrow x-2=8$ یا $x-2=-8$ یا $x-2=2$ یا $x-2=-2 \Rightarrow x\in\{10,-6,4,0\}$

۱ توابع نمایی

اصل مطلب بــه تابع با ضابطه $f(x)=a^x$ که در آن a عدد حقیقی ثابت و مثبتی اســت، که مخالف ۱ هم هست، تابع نمایی می‌گویند. یعنی $f(x)=a^x$ با شرط $a>0$ و $a\neq 1$، یک تابع نمایی است. مثلاً $y=3^x$، $y=(\frac{2}{3})^x$ و $y=(\sqrt{2}-1)^x$ مثال‌هایی از تابع‌های نمایی‌اند.

■ تابع نمایـی اگـر $a>1$ باشـد، اکیـداً صعودی اسـت. ولی اگر $0<a<1$ باشـد، اکیـداً نزولی اسـت. دامنهٔ تابـع نمایـی $\mathbb{R}$ و بـرد آن $(0,+\infty)$ اسـت. نمـودار تابـع نمایی مجانـب افقـی دارد، یعنی خطـی افقی که نمـودار مـدام بـه آن نزدیـک می‌شـود. این خـط در حالت عادی $y=0$ اسـت. اما گاهی طراح مسـئله، تابع نمایـی را کمـی تـا قسـمتی تغییـر می‌دهـد تـا به‌صـورت $f(x)=Aa^{bx+c}+B$ درآیـد. در ایـن حالـت مجانـب افقـی $y=B$ اسـت و خـط مهمـی اسـت. مثـلاً مجانب افقـی نمـودار $y=3(\frac{2}{3})^{5-2x}+1$، خط $y=1$ است (نقطه چین در شکل زیر).



در این تابع، یعنی $f(x)=Aa^{bx+c}+B$ برای تشــخیص صعــودی اکید یا نزولی اکید بودن نمودار، کافی است به علامت $A(a-1)b$ دقت کنیم. اگر علامت مثبت بود، تابع اکیداً صعودی است و اگر علامت منفی بود، تابع اکیداً نزولی است. با تشخیص خط مجانب افقی، صعودی یا نزولی بودن $f(x)$ و در آخر مقدار $f(0)$، نمودار $y=f(x)$ را می‌توانیم به راحتی رسم کنیم. هرچه نکتهٔ عجیب غریب در این باره هست را بی‌خیال می‌شویم و همین یک کار مهم را خوب تمرین می‌کنیم. به قول معروف: «روباه کارهای بسیاری بلد بود، اما خارپشت یک کار بزرگ بلد بود.»

مثال **نمودار $y=3-2(\frac{2}{3})^{4x+1}$ را رسم کنید.**

پاسخ در سه مرحله و با یک ترتیب و الگوی مشخص، نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.

۱) اول مجانب افقی: خیلی ساده است: $y=3$.

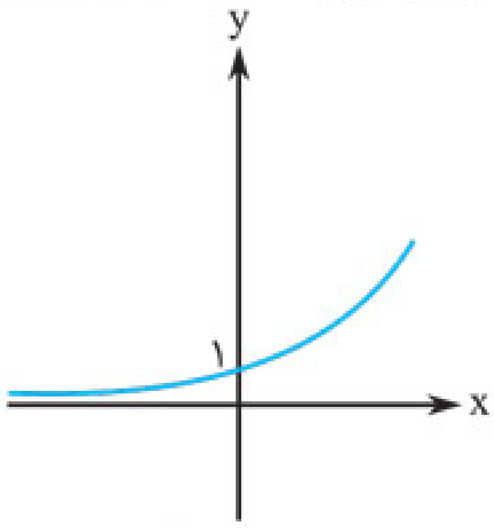
۲) تعیین وضعیت یکنوایی: از آن‌جا که $-2(\frac{2}{3}-1)(4)>0$، پس با تابعی اکیداً صعودی طرفیم.

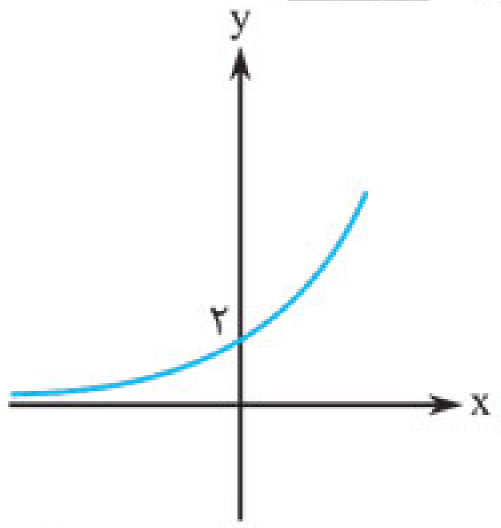
۳) پیدا کردن $f(0)$ یعنی نقطهٔ تلاقی با محور y ها:

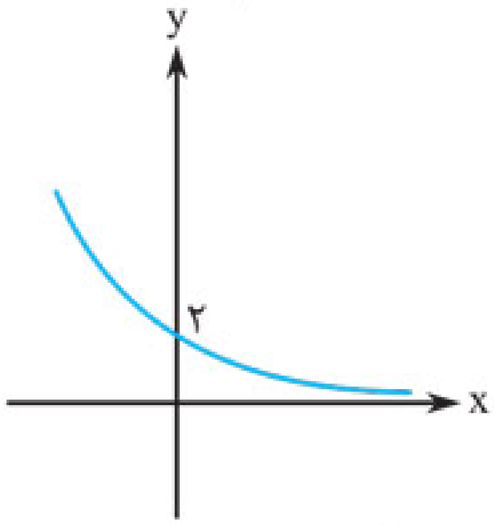
$$f(0)=3-2(\frac{2}{3})=\frac{5}{3}$$

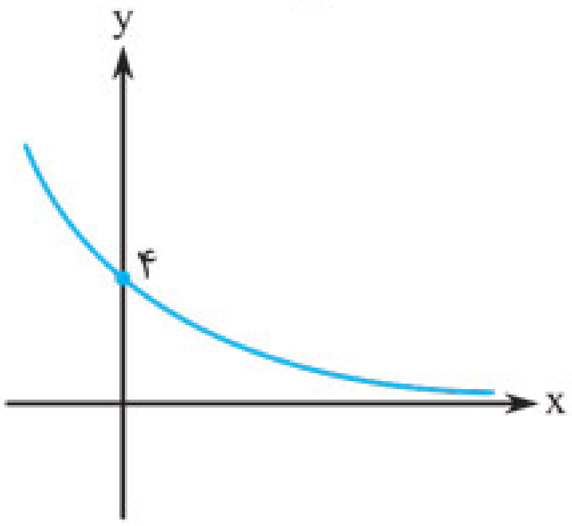
هایپرتست

۱. نمودار تابع $y = ۳a^{۲-x}$، به ازای $a > ۰$ ثابت، به کدام صورت نمی‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

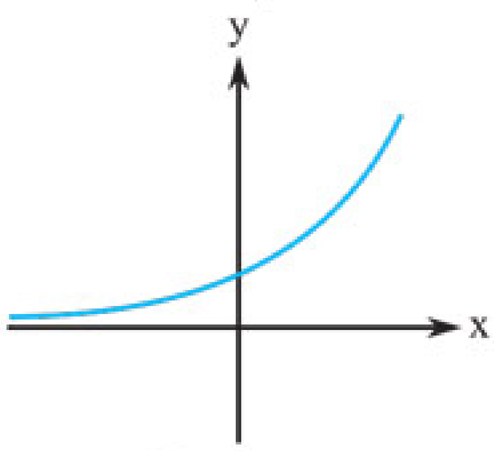
۳) 

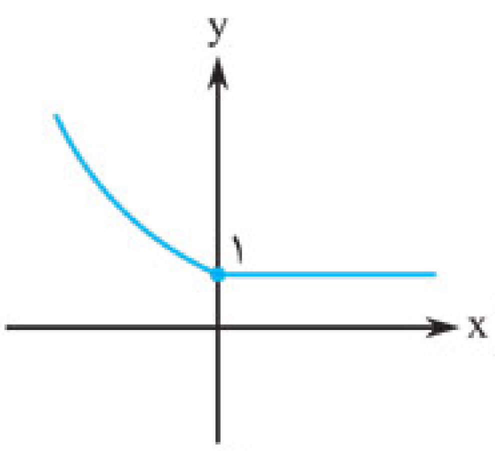
۴) 

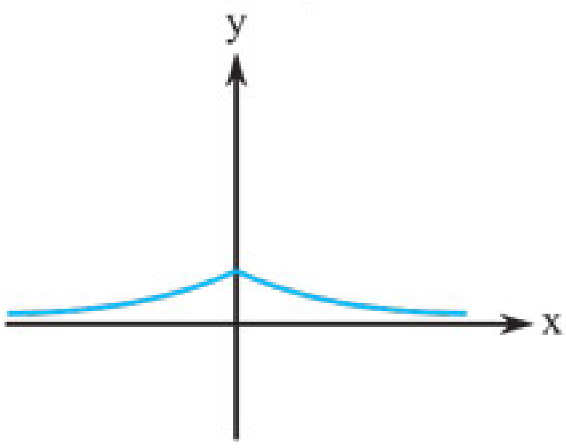
۲. حاصل $\sqrt{۳^{\log_{\sqrt{۳}} ۵} + ۵^{\log_{\sqrt{۵}} ۱۲} + ۱۲^{\log_{\sqrt[۳]{۱۲}} ۳}}$ برابر کدام است؟

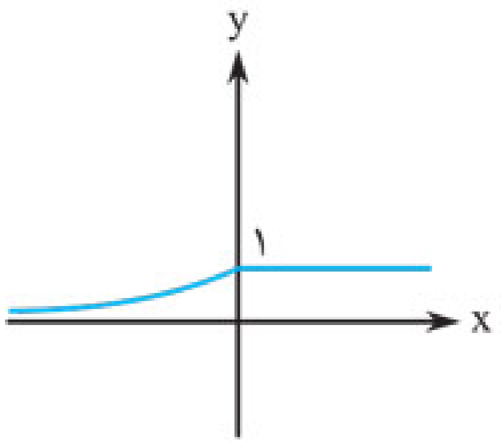
۱) $\sqrt{۱۵}$ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) $۱۵\sqrt{۱۵}$

۳. نمودار تابع $y = ۲^x (\frac{۱}{۲})^{|x|}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴. کدام بزرگ‌تر است؟ (زاویه برحسب رادیان است.)

۱) $\tan ۱^{\tan ۱}$ ۲) $\tan ۱^{\cot ۱}$ ۳) $\cot ۱^{\cot ۱}$ ۴) $\cot ۱^{\tan ۱}$

مقدمه

سلام به بچه‌های نازنین تجربی...

بـه کتـاب جمع‌بنـدی ریاضی خـوش آمدید. این یـک کتاب «بـه دانش‌آموزان خـود اهمیت‌دهنده» اسـت و خیلـی خوشـحالیم کـه قـرار است اسـترس ایـن یکـی درس‌تـان را کـم کنیم. ایـن کتاب را بـرای کسـانی نوشـته‌ایم کـه نمی‌خواهنـد بی‌خیـال بلندپروازی‌هایشـان بشـوند و «رسـیدن بـه هـدف» را حـق خودشـان می‌داننـد، ولی در ریاضی به مشـکل خورده‌انـد و دنبال منبعـی می‌گردند کـه مطالـب مختلـف ایـن درس را جمع‌وجور کنـد. قصدمان این بوده اسـت که به هـر دانش‌آموزی کـه کتـاب را می‌خوانـد، یـک شـانس خـوب بدهیـم، حتـی اگـر در ایـن درس امیـدش را از دسـت داده باشـد. بـه همیـن دلیل، روی جنبهٔ آموزشـی کتاب حسـابی کار شـده اسـت و بـه روال متداول کتاب‌هـای جمع‌بنـدی، فـرض نکرده‌ایـم کـه همـه چیـز را بلدیـد و دوتـا فرمـول بگوییـم و دسـت از سـرتان برداریـم. نـه! تصمیـم گرفتیـم کـه حتی اگر خواسـتیم اتحـاد هـم بگوییـم، آن را یادتان بدهیـم و چیـزی فراتـر از فرمول‌نامـه و چکیـدهٔ نکات باشـیم.

- یکی از ویژگی‌های ممتاز این کتاب، آزمون‌های میان‌وعدهٔ آن است. یعنی برای هر قسمت از درسنامه، آزمون مناسب آن قسمت طراحی شده است. این آزمون‌ها با وسواس چیده شده‌اند و تمام مطالب را برای شرایط عادی کنکور پوشش می‌دهند.
- علاوه بر این، برای آن دسته از دانش‌آموزانی که آزمون‌های چالشی ولی در راستای کنکور می‌خواهند، آزمون‌های هایپرتست را قرار داده‌ایم. هایپرتست‌ها قرار نیست عیناً سؤال کنکور باشند، بلکه قرار است تا با مطالعه و تمرین آن‌ها، برای شرایط غیرمترقبه آماده شوید. اگر زمان کافی برای مطالعهٔ ریاضی ندارید (و دلتان آمد)، می‌توانید از این آزمون‌ها صرف‌نظر کنید. چون هایپرتست‌ها پهلوانی طراحی شده‌اند. اگر بر هایپرتست‌ها تسلط پیدا کردید، برای درصد ۱۰۰ به جلسهٔ کنکور بروید.
- پاسـخ‌نامهٔ کلیدی هایپرتسـت‌ها و آزمون‌های جامع در انتهای کتاب موجود است. اما اگر پاسخ‌نامهٔ تشـریحی می‌خواهید، هیچ نگران نباشـید. زیرا فایل pdf آن را می‌توانید با اسکن QR Code زیر، که در بنر هایپرتسـت تمام فصل‌ها نیز قرار داده شده اسـت، از سایت انتشارات مهروماه به آدرس www.mehromah.ir دانلود کنید.

پاسخ‌ها را اینجا بخوانید!

۵. نمودارهای $y=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}$ و $y=۳^x+\frac{۸}{۳}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $(-۱,۱)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۶. نیمه‌عمر ماده‌ای ۲۰۰ سال و مقدار اولیهٔ آن ۲۵۰۰ گرم است. پس از چند سال ۱۵۶/۲۵ گرم از این ماده باقی می‌ماند؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۷۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۴۰۰

۷. جواب نامعادلهٔ $\log_{(۲x-۱)}(۳x+۴)<۰$ ، کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۱)\cup(۳,+\infty)$ ۲) $(۱,\frac{۳}{۲})\cup(۳,+\infty)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $(۳,+\infty)$

۸. اگر $\log_۶ ۳=a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{۴۸} ۳\sqrt{۱۲}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{a+۲}{۶a-۸}$ ۲) $\frac{a+۳}{۶a+۸}$ ۳) $\frac{a-۳}{۸a-۶}$ ۴) $\frac{a+۳}{۸a+۶}$

۹. اگر $\log_{۱۲}(a^۲+b)=۲+\log_۳ b=۳+\log_۲ a$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a^۲}}$ کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۰. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\log(x^۲-۳x)}$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $[-۲,۰)\cup(۳,۵]$ ۲) $[-۲,۰]\cup(۳,۵)$ ۳) $[-۲,۳)$ ۴) $(۰,۵]$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی (۱)

۱. گزینهٔ «۲»

اولاً $f(۰)=\frac{۱}{۲}$. ثانیاً $۱(\frac{۱}{۲}-۱)(-۱)=\frac{۱}{۲}>۰$ اســت، لذا $f(x)$ اکیداً صعودی است. در آخر $y=۰$ مجانب افقی $y=f(x)$ است، یعنی گزینهٔ «۲» درست است.

۲. گزینهٔ «۲»

$$۲^{x^۲-۸}<۴^x \Rightarrow ۲^{x^۲-۸}<۲^{۲x} \Rightarrow x^۲-۸<۲x \Rightarrow x^۲-۸-۲x<۰$$

$\Rightarrow (x-۴)(x+۲)<۰ \Rightarrow -۲<x<۴ \Rightarrow$ شامل ۵ عدد صحیح

۳. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که طبق نمودار $f(-\frac{۱}{۳})=۰$ و $f(۰)=-۲$. همین برای حل مسئله کافی است.

$$\begin{cases} f(-\frac{۱}{۳})=۰ \\ f(۰)=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴+۲^{-\frac{a}{۳}+b}=۰ \\ -۴+۲^b=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲^{-\frac{a}{۳}+b}=۴=۲^۲ \\ ۲^b=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{۳}+b=۲ \\ b=۱ \end{cases} \Rightarrow b=۱\ ,\ a=-۳ \Rightarrow f(x)=-۴+۲^{-۳x+۱} \Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=-۴+۲^۶=۶۰$$

مثال **فرض کنید $f(x)$ تابعی صعودی و $g(x)=(\frac{۱}{۲})^{۳-x}$ و $h(x)=-۲x^۳+۱۰$ باشد.**

در این‌صورت $f(x)$ و $g(x)$ صعودی و $h(x)$ اکیداً نزولی اسـت. بنابراین ترکیب آن؛ مثلاً $(gohof)(x)$ را می‌توان با ضرب $(+۱)(-۱)(+۱)=-۱$ به‌عنوان تابعی نزولی تشخیص داد.

مثال **اگر $f(۲-x)$ نزولی باشد، آن‌گاه دربارهٔ $f(x)$ چه می‌توان گفت؟**

پاسخ دقـت کنید که اگـر تعریف کنیـم $g(x)=۲-x$ ، آن‌گاه $g(x)$ تابعـی نزولی اسـت. از طرفی $f(۲-x)=(fog)(x)$ هم طبق فرض مسئله نزولی است. یعنی داریم: $(-۱)=\square\times(-۱)$ فوراً می‌فهمیم $\square=+۱$ و لذا $f(x)$ تابعی صعودی است.

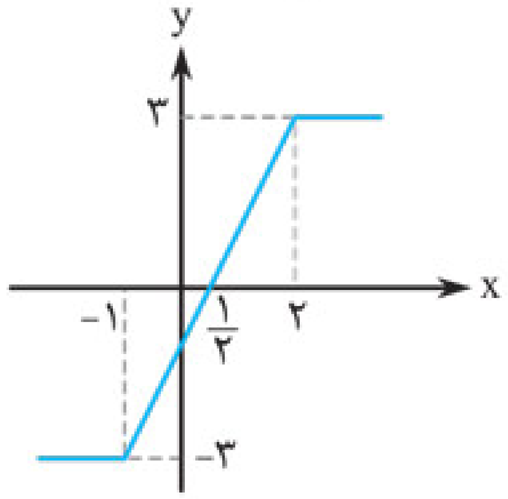
نکته برای بررسی یکنوایی توابع چند ضابطه‌ای، آن‌ها را رسم کنید. حتماً یادتان هست که قدرمطلق ذاتاً چند ضابطه‌ای است.

تست **بزرگ‌ترین بـــازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$ روی آن اکیداً صعودی است، کدام است؟** (تجربی خارج ۹۸)

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** این همان دوست‌مان است. (تابع آبشاری)

این تابع روی $[-۱,۲]$ اکیداً صعودی است. البته ممکن است در کنکور بین گزینه‌ها بـازه را به‌صورت باز بدهند $(-۱,۲)$ کـه هیچ فرقی ندارد.(هردوتا را نمی‌دهند). بدیهی اسـت که $f(x)$ در $\mathbb{R}$ صعودی است، اما مسـئله از ما اکیداً صعودی را خواسته است.



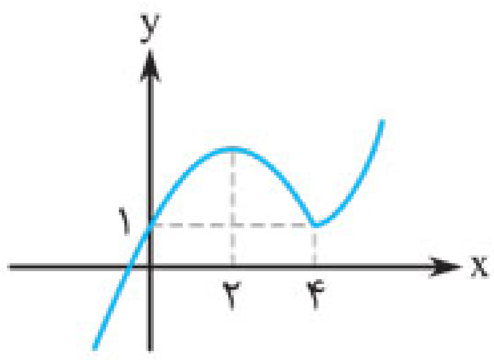
مثال **تابع $f(x)=x|x-۴|+۱$ روی بازه‌ای، اکیداً نزولی است. این بازه را بیابید و ضابطهٔ $f(x)$ را در این بازه بنویسید.**

پاسخ

$$f(x)=x|x-۴|+۱=\begin{cases}x(x-۴)+۱ & ; \quad x\geq ۴\\ -x(x-۴)+۱ & ; \quad x<۴\end{cases}$$

بنابراین نمودار $y=f(x)$ چنین است:

(عدد ۲ طول رأس سهمی است)



بدیهـی اسـت کـه $f(x)$ روی بـازهٔ $(۲,۴)$ اکیـداً نزولـی اسـت و ضابطـهٔ آن روی ایـن بـازه: $f(x)=-x(x-۴)+۱;۲<x<۴$. می‌توانستید بازه را بسته بگذارید. این موضوع کاملاً دلخواه است.

- امیدوارم خسته نباشید، چون آزمون (۳) خیلی خیلی عجله دارد که حلش کنید.

۴ توابع ۱–۱ و تابع وارون

سؤال آموزشی: فرض کنید $f(x)=x^۲+۱$ در این صورت از $f(a)=f(b)$ چه نتایجی می‌گیریم؟

با قرار دادن a و b در ضابطهٔ $f(x)$ داریم: $f(a)=f(b)\Rightarrow a^۲+۱=b^۲+۱\Rightarrow a=b$ یا $a=-b$

در واقع دربارهٔ توابع درجه ۲ نکتهٔ جالبی داریم:

نکته اگر $f(x)=ax^{2}+bx+c$ باشد، آن‌گاه از $f(m)=f(n)$ نتیجه می‌گیریم که $m=n$ یا $m+n=-\frac{b}{a}$.

مثال فرض کنید $f(x)=2x^{2}+3x+5$ باشد. معادلهٔ $f(2x+1)=f(x-2)$ را حل کنید.

پاسخ طبق نکتهٔ قبل دربارهٔ توابع درجه ۲، داریم:

$$f(2x+1)=f(x-2)\Rightarrow 2x+1=x-2 \text{ یا } 2x+1+x-2=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=-3 \text{ یا } x=-\frac{1}{6}$$

اصل مطلب دربارهٔ تابع درجه ۲ مانند $f(x)$ دیدیم که $f(a)=f(b)$ ما را به دو نتیجه می‌رساند. یکی $a=b$ و یک نتیجه دیگر. در واقع برای هر تابع مانند $f(x)$، از معادلهٔ $f(a)=f(b)$ حتماً نتیجه $a=b$ به‌دست می‌آید، اما گاهی ممکن است نتایج دیگری هم به‌دست بیاید. این وضعیت دوم، مورد علاقه ما نیست. ما به توابعی علاقه‌مندیم که $f(a)=f(b)$ فقط به نتیجهٔ $a=b$ برسد. به این توابع، تابع‌های ۱ $-$ ۱ (یک به یک) می‌گویند. باز هم از خوبی‌های کتاب مهر و ماه این است که جدول توابع ۱ $-$ ۱ را، با مخلفات، تا دو صفحهٔ دیگر تقدیم می‌کند. ولی قبل از هر چیز به یک مثال جانانه نیاز داریم.

مثال نشان دهید تابع $f(x)=\frac{x^{3}+1}{2x^{3}+1}$، تابعی ۱ $-$ ۱ است.

پاسخ با $f(a)=f(b)$ شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم تنها نتیجهٔ ممکن $a=b$ است:

$$f(a)=f(b)\Rightarrow\frac{a^{3}+1}{2a^{3}+1}=\frac{b^{3}+1}{2b^{3}+1}\Rightarrow(a^{3}+1)(2b^{3}+1)=(b^{3}+1)(2a^{3}+1)$$

$$\Rightarrow 2a^{3}b^{3}+a^{3}+2b^{3}+1=2a^{3}b^{3}+b^{3}+2a^{3}+1\Rightarrow b^{3}=a^{3}\Rightarrow b=a$$

بنابراین $f(x)$ واقعاً ۱ $-$ ۱ است.

قبل از این‌که بتوانیم دربارهٔ وارون توابع، بحثی را آغاز کنیم، باید نکاتی را دربارهٔ برد توابعی که دامنه‌شان محدود شده است بگوییم. این همان نکته‌ای است که در بخش (۱) وعده کرده بودیم که به یادتان بیاوریم.

اصل مطلب فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنهٔ $x\in[a,b)$ باشد (باز یا بسته بودن بازه مهم نیست). اگر $f(x)$ تابعی خطی $f(x)=ax+b$، رادیکالی $(f(x)=a+\sqrt{bx+c})$، لگاریتمی $(f(x)=\log(ax+b))$ یا نمایی $(f(x)=a^{bx+c})$ باشد، برد آن با محاسبه $f(b)$ و $f(a)$ به‌راحتی به‌دست می‌آید.

مثال فرض کنید $f(x)=\sqrt{4x+1};\ 2\le x<5$ باشد. در این‌صورت برد $f(x)$ را بیابید.

پاسخ چون ضابطهٔ $f(x)$، ترکیبی از توابع خطی و رادیکالی است، برد با عددگذاری به‌دست می‌آید:

$f(2)=\sqrt{9}=3$ و $f(5)=\sqrt{21}$

بنابراین $R_f=[3,\sqrt{21})$ علت باز و بسته بودن بازه‌ها به عهده شما.

مثال فرض کنید $f(x)=3-2^{x-1}$ با دامنه $D_f=[-1,2)$ باشد، برد تابع $4f(x-1)+3$ را بیابید.

پاسخ چون $f(x)$ نمایی است، پس برد $f(x)$ با عددگذاری به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}f(-1)=3-2^{-2}=\frac{11}{4}\\ f(2)=3-2=1\end{cases}\Rightarrow R_{f(x)}=(1,\frac{11}{4}]$$

حالا با توجه به آنچه در بخش قبل آموختیم، داریم: $R_{4f(x-1)+3}=(4\times1+3,4\times\frac{11}{4}+3]=(7,14]$

نکته گاهی ایـــن قضیه در قالب تغییر متغیرهای $T=\sqrt{x}$ و $T=|x|$ و $T=a^x$ بیان می‌شـــود. دقت کنید که دو تغییر متغیر اول شرط $T\in[0,+\infty)$ و تغییر متغیر نمایی، شرط $T\in(0,+\infty)$ را ایجاد می‌کنند.

مثال **برد تابع $f(x)=2^{|x|}+1$ را به‌دست آورید.**

پاسخ در این مســـئله قدر مطلق آمده است، که مشکلش با عددگذاری حل نمی‌شود.(عددگذاری فقط برد توابـــع خطی، رادیکالی، لگاریتمی و نمایـــی را حل می‌کند). اما در عوض نکتهٔ قبـــل را داریم که می‌گوید $T=|x|\geq 0$ را اعمال کنیم. $f(T)=2^T+1; T\in[0,+\infty)$

حالا تابع نمایی است:
$$\begin{cases} f(0)=2^0+1=2 \\ f(+\infty)=2^{+\infty}+1=+\infty \end{cases} \Rightarrow R_f=[2,+\infty)$$

حالا می‌رسیم به بداخلاق‌ترین تابع دنیا،که همان تابع درجه ۲ است.

نکته برای محاســـبه برد تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ ، وقتی $x\in[m,n)$ است، اول باید ببینیم که آیا طول رأس سهمی، یعنی $x_s=-\frac{b}{2a}$ در این بازه قرار دارد یا نه. اگر قرار نداشته باشد که خوش‌به‌حال ما. همان اول و آخر بازه را عددگذاری می‌کنیم. اما اگر $x_s=-\frac{b}{2a}$ در بازهٔ دامنه قرار داشته باشد، علاوه بر اول و آخر بازه باید x_s را هم در $f(x)$ عددگذاری کنیم. سه عدد به‌دست می‌آوریم. به کمک کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها برد را تعیین می‌کنیم.

مثال **برد تابع $f(x)=x^2-6x+1\ ;\ x\in[-1,2)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ در این‌جا $x_s=-\frac{b}{2a}=3\notin D_f$. لذا فقط اول و آخر بازه را باید عددگذاری کنیم:
$$\begin{cases} f(-1)=1+6+1=8 \\ f(2)=4-12+1=-7 \end{cases} \Rightarrow R_f=(-7,8]$$

مثال **برد تابع $f(x)=x^2-6x+1; x\in[1,4)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ در این‌جا $x_s=-\frac{b}{2a}=3\in[1,4)$ است. لذا باید در عددگذاری‌ها شرکت کند:
$$\begin{cases} f(1)=1-6+1=-4 \\ f(3)=9-18+1=-8 \\ f(4)=16-24+1=-7 \end{cases} \Rightarrow R_f=[-8,-4]$$

دقت کنید که چون $3\in[1,4)$ است، پس بازه را از سمت $f(3)=-8$ بسته گذاشتیم. نیازی هم به حذف $f(4)=-7$ از برد نیســـت. نگران نباشید، -7 توسط عددی غیر از ۴ ، در همین بازه به‌دست می‌آید (اگر شک دارید $f(2)$ را محاسبه کنید).

- حالا آماده‌ایم تا تابع وارون را بیاموزیم. اولاً باید بدانید که فقط توابع ۱–۱ وارون‌پذیر هستند. یعنی شرط وارون‌پذیری ۱–۱ بودن تابع است. قبل از هر چیز فهرستی از توابع ۱–۱ نیاز داریم.

نکته همـــهٔ توابع اکیداً صعودی ۱–۱ هســـتند. همـــهٔ توابع اکیـــداً نزولی نیز ۱–۱ هســـتند. لذا توابع نمایـــی $(y=a^{bx+c})$، خطـــی غیرثابـــت $(y=ax+b)$، رادیکالـــی $(y=a\pm\sqrt{bx+c})$، لگاریتمی $(y=\log_c ax+b)$ و هموگرافیک $(y=\frac{ax+b}{cx+d})$، همه وارون‌پذیر هســـتند. ترکیب این توابع با یکدیگر نیز، تابعی ۱–۱ ایجاد می‌کند.

◂ تابع درجه ۲ ، یعنی $f(x)=ax^{2}+bx+c$ تابعی ۱−۱ نیســـت، مگر این‌که طراح دامنهٔ آن را به نحو مناسبی محدود کند. این نحوهٔ مناسب یعنی چه؟ یعنی تمام دامنهٔ $f(x)$ یا قبل از رأس آن $x_s=-\dfrac{b}{۲a}$ باشد یا بعد از رأس آن. به عبارتی برای ۱−۱ یا وارون‌پذیر بودن تابع درجه ۲ باید $D_f\subseteq[-\dfrac{b}{۲a},+\infty)$ یا $D_f\subseteq(-\infty,\dfrac{-b}{۲a}]$ باشد.

◂ برای بررسی ۱−۱ بودن توابع چندضابطه‌ای، بهترین کار رسم است.

◂ تابع $f(x)=ax+b|x|$ با شرط $|a|>|b|$ وارون‌پذیر است. در غیر این‌صورت وارون‌پذیر نیست. $(a,b\neq ۰)$

مثال در این مثال همهٔ توابع ۱ ـ ۱ مهم برای کنکور را می‌بینید.

❶ $f(x)=\dfrac{۳x+۷}{x+۳}$:تابع هموگرافیک

❷ $f(x)=۳\sqrt{x+۱}+۵$:ترکیب خطی و رادیکالی

❸ $f(x)=x^{۲}-۳x+۲\,;\,x\in[۴,+\infty)\Rightarrow[۴,+\infty)\subseteq[\dfrac{۳}{۲},+\infty)$

❹ $f(x)=۵x+۳|x|\Rightarrow|۵|>|۳|$

❺ $f(x)=x^{۳}+۱۰x+۱\Rightarrow$ جمع دو تابع اکید صعودی

نکته برای این‌که نشان دهیم تابعی ۱−۱ نیست، کافی است دو عدد متمایز $x_۱$ و $x_۲$ پیدا کنیم که $f(x_۱)=f(x_۲)$ باشـــد. معمـــولاً توابعی که $x^{۲}$ یا $|x|$ دارنـــد یا توابعی که جمـــع دو عبارت معکوس دارند، یک به یک نیســـتند.

مثال در این مثال توابعی غیر ۱−۱ را نوشته‌ایم و برای هرکدام اعدادی پیدا کردیم که ۱-۱ بودن را خراب می‌کنند. خوشبختانه زیاد با این تابع‌ها، کار نداریم.

❶ $f(x)=|x|\Rightarrow f(۵)=f(-۵)=۵$ ×

❷ $f(x)=x^{۲}-۴x\Rightarrow f(۰)=f(۴)=۰$ ×

البته کلاً توابع درجه ۲ بدون محدودکردن دامنه‌شان ۱−۱ نیستند.

❸ $f(x)=۲^{x}+۲^{-x}\Rightarrow f(۱)=f(-۱)=۲/۵$ × $\Rightarrow$ جمع دو عبارت معکوس

❹ $f(x)=x+|x|\Rightarrow$ نکتهٔ گفته شده $|a|=|b|=۱\Rightarrow$ ۱−۱ نیست

اصل مطلب اگر $f(x)$ تابعی ۱−۱ باشـــد، آن‌گاه حتماً تابع وارون دارد. تابع وارون $f(x)$ را با $f^{-۱}(x)$ نشان می‌دهیم. برای محاسبهٔ $f^{-۱}(x)$ قدم اول محاسبهٔ برد $f(x)$ است. این مرحله حتماً باید همان اول انجام شود. برد $f(x)$ در واقع همان دامنهٔ $f^{-۱}(x)$ اســـت. یعنی $R_f=D_{f^{-۱}}$. در مرحلهٔ دوم با حل معادلهٔ $y=f(x)$ و به‌دست آوردن x برحسب y، ضابطهٔ تابع معکوس را به‌دست می آوریم. قبلاً بارها این کار را انجام داده‌ایم.

مثال فرض کنید $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{۳}\,;\,x\in(۱,۴]$ باشد. دامنه و ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را بیابید.

پاسخ اول باید برد $f(x)$ را حساب کنیم. خوشبختانه $f(x)$ خطی است و برد آن با عددگذاری به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}f(۱)=\dfrac{۲+۱}{۳}=۱\\[2mm] f(۴)=\dfrac{۸+۱}{۳}=۳\end{cases}\Rightarrow R_f=(۱,۳]=D_{f^{-۱}}$$

حال کار ساده است. باید $y=\frac{۲x+۱}{۳}$ را حل کنیم و x را به‌دست آوریم:

$$۳y=۲x+۱\Rightarrow ۳y-۱=۲x\Rightarrow \frac{۳y-۱}{۲}=x\xrightarrow{\text{تغییر اسم متغیرها}}f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۱}{۲}\,;\,x\in(۱,۳]$$

مثال **فرض کنید $f(x)=x^۲+۶x+۱;\,x>۱$ باشد. دامنه و ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ اول برد $f(x)$. از آن‌جا که $f(x)$ تابعی درجه ۲ است، باید طول رأس آن را به‌دست آوریم: $x_s=-۳$ که خوشبختانه دربازهٔ $(۱,+\infty)$، که دامنهٔ $f(x)$ است قرار ندارد. لذا برای محاسبهٔ برد $f(x)$ کافی است ۱ و $+\infty$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\begin{cases}f(۱)=۱+۶+۱=۸\\ f(+\infty)=(+\infty)+(+\infty)+۱=+\infty\end{cases}\Rightarrow R_f=(۸,+\infty)=D_{f^{-۱}}$$

به‌عنوان یک نکتهٔ اخلاقی، به یاد داشته باشید که در محاسبهٔ ضابطهٔ تابع معکوس یک تابع درجه ۲، بهترین کار مربع کامل کردن است (این را بزرگ بنویسید روی کاغذ، یک گوشهٔ ذهن‌تان نگه دارید).

$$y=x^۲+۶x+۱=(x+۳)^۲-۸\Rightarrow y+۸=(x+۳)^۲\Rightarrow \sqrt{y+۸}=|x+۳|$$

$$\xrightarrow{x>۱}\sqrt{y+۸}=x+۳\Rightarrow x=\sqrt{y+۸}-۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۸}-۳\,;\,x\in(۸,+\infty)$$

نکته اگر $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، آن‌گاه $R_f=D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ و البته $f^{-۱}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$ است.

مثال **وارون توابع زیر را به‌دست آورید:**

۱) $f(x)=\frac{۴x+۱۰}{۳x-۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۲x-۱۰}{-۳x+۴}=\frac{۲x+۱۰}{۳x-۴}$

۲) $f(x)=\frac{۸-۲x}{x+۳}\Rightarrow f(x)=\frac{-۲x+۸}{x+۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۸}{-x-۲}$

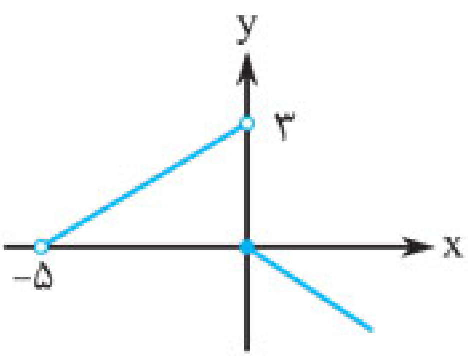
۳) $f(x)=\log_۳(x+۱)-\log_۳(x-۱)\xrightarrow{\text{خواص } \log}y=\log_۳(\frac{x+۱}{x-۱})\Rightarrow ۳^y=\frac{x+۱}{x-۱}$

$$\Rightarrow ۳^y(x-۱)=x+۱\Rightarrow ۳^yx-۳^y-x-۱=۰\Rightarrow x(۳^y-۱)=۳^y+۱\Rightarrow x=\frac{۳^y+۱}{۳^y-۱}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳^x+۱}{۳^x-۱}$$

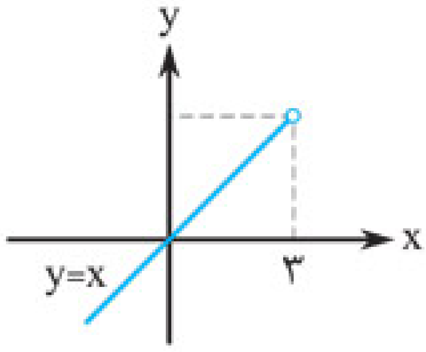
نکته از لحاظ ضابطه‌ای $(fof^{-۱})(x)=x$ و $(f^{-۱}of)(x)=x$ است، اما در کمال تعجب این دو تابع برابر نیستند، چون دامنهٔ آن‌ها یکی نیست. در واقع: $D_{(f^{-۱}of)(x)}=D_{f(x)}$, $D_{(fof^{-۱})(x)}=D_{f^{-۱}(x)}=R_{f(x)}$

مثال **نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=(fof^{-۱})(x)$ به چه صورت است؟**

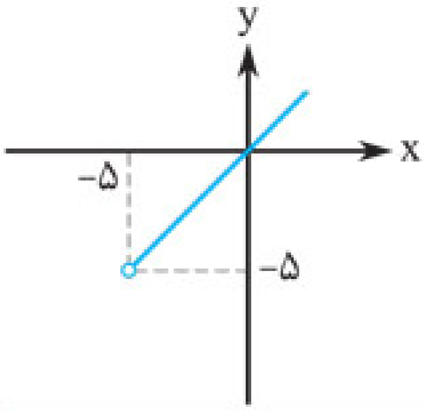


پاسخ در نمودار بدیهی است که $f(x)$ تابعی ۱ـ۱ است، زیرا هر خط افقی نمودار $y=f(x)$ در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند. پس $y=f(x)$ وارون‌پذیر است و لذا سؤال بامعنی است.

از طرفی $D_f=(-۵,+\infty)$ و $R_f=(-\infty,۳)$ لذا $y=(fof^{-۱})(x)=x\,;\,x\in(-\infty,۳)$ است و بنابراین نمودار آن به‌صورت مقابل است:



دقت کنید که در همین مثال، نمودار $(f^{-۱}of)(x)$ به‌صورت زیر است:



نکته معادلهٔ $f^{-۱}(\triangle)=\square$ معادل است با $\triangle=f(\square)$

مثال **فرض کنید $f^{-۱}(g(x))=۸x+۱۰$ و $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد. در این‌صورت ضابطهٔ $g(x)$ را بیابید.**

پاسخ به کمک نکتهٔ اخیر داریم:

$$f^{-۱}(g(x))=۸x+۱۰\Rightarrow g(x)=f(۸x+۱۰)=۸x+۱۰+\sqrt{۸x+۱۰}$$

نکته البته که معادلهٔ $f(\triangle)=\square$ هم با معادلهٔ $\triangle=f^{-۱}(\square)$ معادل است. (f وارون‌پذیر است)

مثال **فرض کنید $f(g(x))=x^۲+۱$ و $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۵}$ باشد. آن‌گاه ضابطهٔ $g(x)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ

$$f(g(x))=x^۲+۱\Rightarrow g(x)=f^{-۱}(x^۲+۱)\xrightarrow{f^{-۱}(x)=\frac{۵x-۱}{-x+۲}}g(x)=\frac{۵(x^۲+۱)-۱}{-(x^۲+۱)+۲}=\frac{۵x^۲+۴}{-x^۲+۱}$$

مثال **در همهٔ مسائل زیر، ضابطهٔ تابع خواسته‌شده را به‌دست آورید.**

۱ $\mathbf{f^{-۱}(g(x))=x+۲\,;\,f(x)=x^۲+\sqrt{x}\ ;\ g(x)=?}\ \Rightarrow g(x)=f(x+۲)=(x+۲)^۲+\sqrt{x+۲}$

۲ $\mathbf{f^{-۱}(۲x+۱)=۳x\ ;\ f(x)=?}$

$$f^{-۱}(۲x+۱)=۳x\Rightarrow ۲x+۱=f(۳x)\xrightarrow[x=\frac{T}{۳}]{T=۳x}f(T)=۲(\frac{T}{۳})+۱\xrightarrow{\text{تغییرنام}}f(x)=\frac{۲x}{۳}+۱$$

به‌طورکلی اگر بخواهیم از $f(\triangle)=\square$ به ضابطهٔ $f(x)$ برسیم باید از تغییر متغیر $T=\triangle$ استفاده کنیم. مورد بسیار مهم چنین سؤالاتی مثال بعدی است.

مثال **اگر $f(g(x))=\sqrt{x}+۱$ و $g(x)=\dfrac{۲x-۳}{x+۵}$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ

$$f(g(x))=\sqrt{x}+۱\Rightarrow f(\frac{۲x-۳}{x+۵})=\sqrt{x}+۱\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۵}=T\Rightarrow ۲x-۳=Tx+۵T$$

$$\Rightarrow x(T-۲)=-۳-۵T\Rightarrow x=\frac{-۳-۵T}{T-۲}\Rightarrow f(T)=\sqrt{\frac{-۳-۵T}{T-۲}}+۱=\sqrt{\frac{۵T+۳}{۲-T}}+۱$$

$$\xrightarrow{\text{تغییرنام}}f(x)=\sqrt{\frac{۵x+۳}{۲-x}}+۱$$

نکته برای پیداکردن مقدار $f^{-1}(a)$، در واقع باید معادلهٔ $f(x)=a$ را حل کنیم. در حقیقت اگر فرض کنیم $f^{-1}(a)=x$ است، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که $a=f(x)$.

تست فرض کنید $f(x)=x+\sqrt{x}+۳$ باشد. آن‌گاه $f^{-1}(۹)$ کدام است؟ (مفهومی ـ محاسباتی)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ گزینهٔ «۲» دقت کنید که درواقع داریم:

$$f^{-1}(۹)=x \Rightarrow ۹=f(x)=x+\sqrt{x}+۳ \Rightarrow x+\sqrt{x}-۶=۰ \Rightarrow (\sqrt{x}+۳)(\sqrt{x}-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=-۳\ (\text{غ ق ق})\ \text{یا}\ \sqrt{x}=۲ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow f^{-1}(۹)=۴$$

استفاده از این نکات می‌تواند در قالب مسائل برخورد دو نمودار مطرح شود.

مثال فرض کنید $f(x)=x+\frac{۱}{x}\ ;\ x>۱$ باشد. در این صورت نمودار $y=f^{-1}(x)$ خط $۳y=x+۹$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (مشابه تجربی خارج ۹۹)

پاسخ اول معادلهٔ خط را استاندارد می‌کنیم:

$$y=\frac{x+۹}{۳}$$

اینک باید معادلهٔ خط $f^{-1}(x)=\frac{x+۹}{۳}$ را حل کنیم، که یعنی:

$$f(\frac{x+۹}{۳})=x \Rightarrow \frac{x+۹}{۳}+\frac{۳}{x+۹}=x \Rightarrow ۲x^۲+۹x-۹۰=۰ \xrightarrow{\Delta} x_۱=\frac{-۹+\sqrt{۸۰۱}}{۴},$$

$$x_۲=\frac{-۹-\sqrt{۸۰۱}}{۴}$$

ما عمداً کاری کردیم که به اعداد غیرمعمول‌تری برسیم تا اهمیت دامنهٔ روشن شود. در یک آزمونی با استاندارد کنکور به اعداد این مدلی زیاد برخورد نمی‌کنید. باری، دو جواب به‌دست آمدند، اما کدام قبول است؟ در ابتدا سؤال گفته شده که $f(x)=x+\frac{۱}{x}\ ;\ x>۱$. لذا مثلاً $f(\frac{۱}{۲})$ نداریم اما $f(۵)$ داریم. لذا برای چک‌کردن $x_۱$ و $x_۲$ باید در معادلهٔ $f(\frac{x+۹}{۳})=x$ ببینیم که مقدار $f(\frac{x_۱+۹}{۳})$ یا $f(\frac{x_۲+۹}{۳})$ تعریف می‌شوند یا نه:

$$x_۱=\frac{-۹+\sqrt{۸۰۱}}{۴} \Rightarrow f(\frac{x_۱+۹}{۳})=f(\frac{۲۷+\sqrt{۸۰۱}}{۱۲})$$

بدیهی است که $\frac{۲۷+\sqrt{۸۰۱}}{۱۲}>۱$ است و لذا این جواب قابل قبول است. برای $x_۲$ داریم:

$$x_۲=\frac{-۹-\sqrt{۸۰۱}}{۴} \Rightarrow f(\frac{x_۲+۹}{۳})=f(\frac{۲۷-\sqrt{۸۰۱}}{۱۲})$$

که البته قابل قبول نیست، چون $\frac{۲۷-\sqrt{۸۰۱}}{۱۲}<۱$ است.

قدر این مثال را بدانید. همهٔ اشتباهات رایج این فصل را یک‌جا پوشش داده است. لطف کنید دوبار بخوانید.

نکته اگر g و f دو تابع وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه داریم: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$. البته برعکس آن نیز صحیح است: $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$. این قضیه برای هر تعداد تابع درست است.

مثال با توجه به نکتهٔ قبل داریم:

۱ $(fogoh)^{-۱} = h^{-۱}og^{-۱}of^{-۱}$

۲ $(fog^{-۱})^{-۱} = gof^{-۱}$

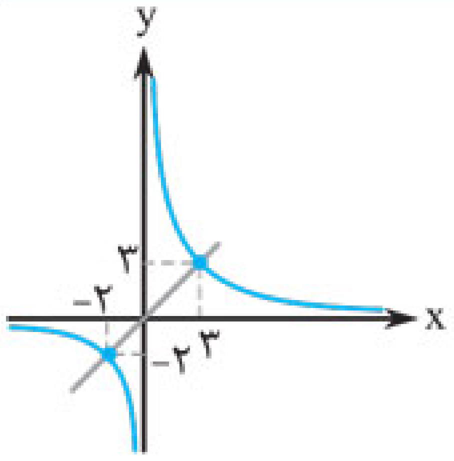
۳ $g^{-۱}of^{-۱}oh = (h^{-۱}ofog)^{-۱}$

مثال **اگر $f(g^{-۱}(x)) = x^۳ + ۱$ باشد، آن‌گاه $g(f^{-۱}(x))$ را به‌دست آورید.**

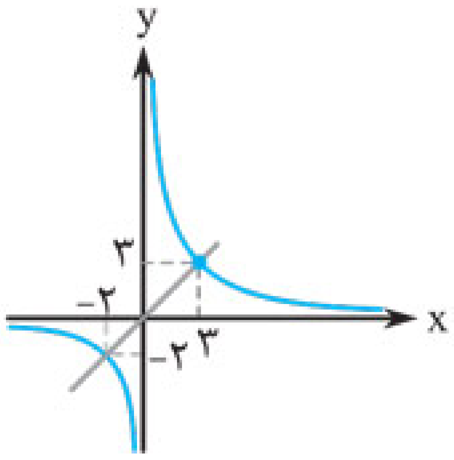
پاسخ دقت داریم که $g(f^{-۱}(x))$ در واقع همان تابع وارون $f(g^{-۱}(x))$ اســت. لذا کافی است تابع وارون $y = x^۳ + ۱$ را به‌دست آوریم: $y = x^۳ + ۱ \Rightarrow y - ۱ = x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y-۱} \Rightarrow g(f^{-۱}(x)) = \sqrt[۳]{x-۱}$

نکته اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، نمودار $y = f^{-۱}(x)$ به‌دست می‌آید.

مثال **با توجه به نمودار $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار $y = f^{-۱}(x)$ را رسم کرده و دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{x - f^{-۱}(x)}$ را محاسبه کنید.**



پاسخ



از آن‌جا که خط داده‌شــــده از $(۳, ۳)$ و $(۰, ۰)$ می‌گذرد، می‌فهمیم که در واقع همان $y = x$ است. لذا با قرینه‌کردن نمودار $y = f(x)$ نسبت به این خط، داریم:

حالا دامنهٔ $\sqrt{x - f^{-۱}(x)}$ معادل با $x - f^{-۱}(x) \geq ۰$ اســت. که یعنی $x \geq f^{-۱}(x)$ که باز هم یعنی مجموعهٔ نقاطی که $y = x$ بالاتر یا مساوی $y = f^{-۱}(x)$ است که می‌شود: $[-۲, ۰) \cup [۳, +\infty)$.

برای آزمون (۴) آماده‌اید. این آزمون ۱۵ سؤال دارد.

۵ زوج مرتب‌ها و توابع خاص

اصل مطلب تابع‌ها را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌های اول آن‌ها متمایز اســت، تعریف کرد. مثلاً مجموعهٔ $f(x) = \{(۱,۵), (۲,۶), (۳,۳)\}$ یک تابع است. معمولاً به‌جای این‌که بنویسیم $(a, b) \in f(x)$ است، می‌نویسیم $b = f(a)$. مثلاً در مثال ما $f(۱) = ۵$ ، $f(۲) = ۶$ و $f(۳) = ۳$ است. در واقع زوج مرتب‌های تابع f ، فرم مشـــخصی دارند: $(x, f(x))$. لذا باید یادمان باشد مؤلفهٔ اول، یک مؤلفه از جنس داخل تابع $f(x)$ (یعنی دامنه f) و مؤلفهٔ دوم از جنس بیرون تابع (یعنی برد f) اســـت. لذا مؤلفه‌های اول برعکس تأثیر می‌پذیرند و مؤلفه‌های دوم مستقیم تأثیر می‌پذیرند. مثلاً $۲f(x) + ۱$ فقط روی مؤلفه‌های دوم تأثیر می‌گذارد و تأثیر آن هم مســـتقیم است. در مثال بالا $۲f(x) + ۱ = \{(۱, ۱۱), (۲, ۱۳), (۳, ۷)\}$. همان‌طـــور که می‌بینید، کســـی کاری به مؤلفه‌هـــای اول ندارد. اما دربـــارهٔ $f(x+۲)$ ، مؤلفه‌های اول باید تغییـــر کنند و این کار را برعکس انجام دهند. $f(x+۲) = \{(-۱, ۵), (۰, ۶), (۱, ۳)\}$. بدیهی اســـت که $y = ۲f(x-۱) - ۳$ روی هر دو مؤلفه تأثیر می‌گذارد. با هم به پیشواز مثال زیر می‌رویم.

۱۰. فرض کنید $f(x)=x^۲-۶x+۳$ باشد، معادلهٔ $f(x^۲+۲x)=f(۴-۳x)$ چند جواب حقیقی دارد؟
(نکتهٔ تابع درجه ۲ را اوایل درسنامه گفتیم)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۱۱. اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۲. اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشد، برد تابع gof، کدام است؟ (تجربی ۹۹)
(از سومین نکتهٔ درسنامهٔ همین بخش استفاده کنید. هرجا بخواهیم برد تابع مرکب را حساب کنیم، این نکته کار را تمام می‌کند)

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۵)$

۱۳. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۱}{۲x}$ بر دامنهٔ $(۰,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۴. فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۱۵)+g(۳)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۱۵. اگر $f(x)=۳x+\sqrt{x}$ و $f^{-۱}(g(x))=x^۲$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ $g(x)$ کدام است؟

۱) $y=۳x^۲+x$ ۲) $y=۳x^۲+|x|$ ۳) $y=۳x^۲-x$ ۴) $y=۳x^۲-|x|$

آزمون تستی (۵)

۱. حداقل چند عضو از $A=\{(۱,۴),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۵)\}$ حذف کنیم، تا حاصل تابعی وارون‌پذیر باشد؟
(مزاحم‌ها را شناسایی کنید)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲. اگر $f=\{(۲x+y,۳),(۲x-y,۷),(۱,۱)\}$ تابعی باشد که $f=f^{-۱}$ است، آن‌گاه xy برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ±۵ ۴) ±۱۰

۳. اگر $f(x+۱)=\{(۲,۵),(۱,۶),(۴,۷)\}$ باشد، آن‌گاه $۲f(x)-۳$ کدام است؟

۱) $\{(۱,۷),(۰,۹),(۳,۱۱)\}$ ۲) $\{(۲,۷),(۱,۹),(۴,۱۱)\}$

۳) $\{(۳,۷),(۲,۹),(۵,۱۱)\}$ ۴) $\{(۱,۴),(۰,۴/۵),(۳,۲/۵)\}$

۴. اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۴,۱),(۵,۵)\}$ و $g(x)=\sqrt{x}+۱$ باشد، آن‌گاه مقدار a از معادلهٔ $f^{-۱}(g(a))=۱$ کدام است؟

۱) $a=۱$ ۲) $a=۲$ ۳) $a=۳$ ۴) $a=۴$

۵. فرض کنید $f=\{(۳,a+۶),(۲,۳),(۳,a^۲),(۲,b+۱)\}$ تابعی وارون‌پذیر باشد. در این صورت $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ±۱ ۴) -۴ یا ۱

- همهٔ مثال‌ها و سؤال‌ها با هدف آموزشی مطرح شده‌اند. مقابل خیلی از سؤال‌ها کلید واژه‌ای (مانند «تکنیکی» یا «مفهومی» یا ...) مشاهده می‌کنید. این کلید واژه‌ها، جنبهٔ اصلی آن سؤال را نشان می‌دهند. هم‌چنین کنار تمام تست‌های موجود در درسنامه و پاسخ تست‌های مربوط به آزمون‌های جامع، آیکون‌های قرار داده‌ایم که درجهٔ سختی تست را از طریق کم و زیاد شدن آنتن نشان می‌دهند. (زیاد شدن آنتن به معنای افزایش درجهٔ سختی سؤال است.)
- کنار بعضی از مسائل کتاب آیکون قرار دارد. این‌ها مسائلی هستند که می‌توانید با اسکن QR Cod زیر، فیلم آموزشی آن‌ها را در سایت مهروماه ببینید.

فیلم‌ها را اینجا ببینید!

- صفحه‌ای در اینستاگرام، مخصوص این کتاب ساخته‌ایم. دانش‌آموزان می‌توانند با جستجوی advansity – math با مؤلفین کتاب در ارتباط باشند. در این صفحه، هر هفته یک مسابقهٔ ریاضی از یک فصل کتاب خواهیم داشت.

تقدیر و تشکر

- چه‌قدر تقدیر و تشکر کتاب نوشتن در مهروماه به دل آدم می‌نشیند. وقتی مدیر نازنینی مثل آقای احمد اختیاری داشته باشید، مدیر تألیف کاردان و دلسوزی مانند استاد محمدحسین انوشه نصیب‌تان شود و مدیرگروه کل و کارشناسی به نام استاد عباس اشرفی کنارتان باشد، حسابی از کارتان لذت می‌برید. ما هم سعی کرده‌ایم این حس خوب‌مان را در کیفیت کتاب نشان دهیم.
- بزرگوارانی در مراحل مختلف تألیف این کتاب حامی ما بوده‌اند. بیش از همه مایلیم مراتب قدردانی خود را به مهندس عادل احمدنژاد تقدیم کنیم. حیف که زبان ما از بیان ارزش تلاش‌های دلسوزانه و روحیهٔ علمی این دوست فرهیخته‌مان قاصر است.

این کتاب مرهون زحمات دوستان ما در گروه ویراستاری، به‌ویژه سرکار خانم آزاده غنی‌فرد است. همکاری و نظرات ارزشمند جناب آقای احسان لعل در این کتاب، در موارد زیادی راهگشا بوده است و جا دارد که زحمات ایشان قدردانی کنیم.

مدیر تولید گرامی انتشارات سرکار خانم مریم تاجداری، مدیر فنی جناب آقای میلاد صفایی و صفحه‌آرایان کتاب خانم‌ها مرجان سپهریان، پریسا حسینی و رویا طبسی و جناب آقای مرتضی یعقوبی، عزیزانی هستند که برای این کتاب سنگ‌تمام گذاشتند. مهدی منصوری عزیز، فیلم‌بردار نازنین مهروماه است که تهیهٔ محتوای ویدئویی این اثر بدون کمک و همکاری ایشان غیرممکن بود. هم‌چنین از مدیر محترم سایت مهروماه، جناب آقای امیر انوشه و واحد روابط عمومی به‌ویژه جناب آقای عماد ولدی بی‌نهایت سپاسگزاریم.

۶. نقطهٔ $(۱,۶)$ روی نمودار تابع خطی $y=f(x)$ قرار دارد. اگر نمودار $y=f^{-1}(x)$، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، آن‌گاه حاصل $f(۲)+f(۴)$ کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۱۲   ۳) ۱۸   ۴) ۲۴

۷. اگــــر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\}$ و $g=\{(۲,۴),(۳,۱),(۴,۷),(۵,۵),(۶,۴)\}$ باشـــد، آن‌گاه $f+gof^{-1}$ برابر کدام است؟

۱) $\{(۳,۸),(۴,۶)\}$ ۲) $\{(۳,۵),(۴,۶),(۲,۵)\}$

۳) $\{(۳,۵),(۲,۶)\}$ ۴) $\{(۳,۸),(۲,۶)\}$

۸. فرض کنید $f=\{(۱,۲a+b),(۲,b+c),(۴,c+۳)\}$ تابع همانی باشد. در این صورت $a+b-c$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۲

۹. اگر ورودی ماشین $\boxed{\text{ورودی}\to f\to g\to \text{خروجی}}$، مقدار a و خروجی آن b باشد، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $f(g(a))=b$ ۲) $g(f(a))=b$ ۳) $g(f(b))=a$ ۴) $f(g(b))=a$

۱۰. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(۱,۲),(۶,۵),(۵,۱۲)\}$ باشند، آن‌گاه مقدار a از معادلهٔ $g(f(a))=۵$ و مقدار b از معادلهٔ $g^{-1}(f(b))=۵$، کدام است؟

۱) $b=۴, a=۱$ ۲) $b=۹, a=۴$ ۳) $a=۶, b=۱۲$ ۴) $b=۱۲, a=۶$

هایپرتست

۱. اگر $f(x+a)=۳x+b\,;\,۱<x<۲$ باشد و دامنهٔ تابع $f(\frac{x}{۲})$ بازهٔ $(۳,c)$ و برد تابع $f(x-۱)+۱$ بازهٔ $(۵,d)$ باشد، آن‌گاه $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۲/۵   ۳) ۱۴/۵   ۴) ۱۶

۲. اگر $f^{۳}(x)+f(x)=۳x$ باشد، و $g(x)$ معکوس تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه $g(۱)+g(۲)$ برابر کدام است؟

۱) ۴   ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۵}$ ۴) ۱

۳. فرض کنید $f=\{(a,۲),(۲,b),(۳,c)\}$ باشد. اگر $f(x-۱)=f^{-1}(x)+۱$ باشد، آن‌گاه abc کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۹

۳) ۱۲   ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۴. تابع $f(x)=[x][\frac{۱}{x}]$ با دامنهٔ $D_f=(۰,+\infty)$ مفروض اســـت. اگر نمودار $y=f(x)$ و خط $y=۳x+a$ دو نقطهٔ تلاقی داشته باشند، فاصلهٔ این دو نقطه کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

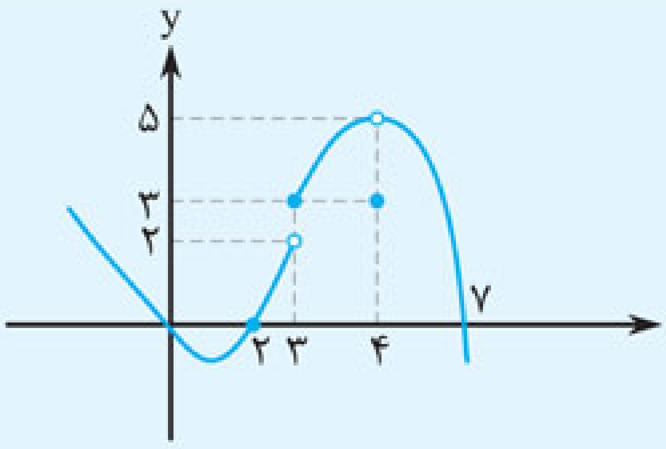
۵. اگر $f=\{(۱,۹),(۲,۴),(۳,۵)\}$ و $g(x)=x+۲$ باشد، آن‌گاه $\frac{f^{۲}-g^{۲}}{f-g}$، برابر کدام است؟

۱) $\{(۱,۱۲),(۲,۸),(۳,۱۰)\}$ ۲) $\{(۱,۱۵)\}$

۳) $\{(۱,۱۵),(۲,۸)\}$ ۴) $\{(۱,۱۲)\}$

۱ مفهوم حد

اصل مطلب نمودار $y=f(x)$ را در نظر بگیرید.



به این نمـــودار، در حوالی $x=۳$ توجه کنید. اولاً بدیهی است که $f(۳)=۳$ است. اما اگر مقادیر x، اعدادی بسیار نزدیک به ۳ ولی کم‌تر از آن باشـــند، آن‌گاه مقادیر تابع $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شـــوند. ولی همین که x به ۳ می‌رسد، ناگهان نمودار $f(x)$ در یک پرش صعودی، به نقطهٔ $(۳,۳)$ فرار می‌کند.

عدد ۲، که مقدار تابع در حال نزدیک شدن به آن است را حد چپ $f(x)$ در $x=۳$ می‌گویند و به‌صورت $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲$ می‌نویســـند. چرا می‌گوییم حد چپ؟ چون داریم با مقادیر کوچک‌تر از ۳ به ســـمت ۳ حرکت می‌کنیم. علامت منهای بالای ۳، نشانهٔ همین است. در همین مسئله اگر با مقادیر بیشتر از ۳ به ســـمت $x=۳$ حرکت کنیم، نمودار $y=f(x)$ هم به سمت نقطه‌ای با عرض ۳ حرکت می‌کند. این را چنین می‌نویســـیم: $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۳$. همواره و برای هر عددی مانند a، مقایســـهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ بسیار مهم اســـت. در این مثال‌ها $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۳=f(۳)$ اما $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲$ است.

به‌طور کلی، اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ باشد، می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ حد دارد و مقدار این حد L اســـت. به زبان ریاضی می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، حالا ممکن است که $L=f(a)$ باشد یا $L\neq f(a)$. حالت ایده‌آلی که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ باشد، نام خاصی دارد: در این حالت می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است. لذا برای حدداشتن، کافی است حد چپ و حد راست با هم برابر باشند. اما برای پیوسته‌بودن، باید حد چپ و حد راست برابر و هر دو برابر با مقدار تابع در آن نقطه باشند. مثلاً در همین نمودار ما، واضح است که $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=۵$ است. این درحالی است که $f(۴)=۳$ است. لذا $f(x)$ در $x=۴$ حد دارد و مقدار این حد ۵ است، اما پیوسته نیست. ولی در $x=۳$ اصلاً حد ندارد (و بنابراین عمراً پیوسته هم نیست). مجدداً همین تابع را در $x=۲$ بررسی می‌کنیم. بدیهی است که $f(۲)=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$. چه اتفاق خوبی! حالا دیگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$ است و بنابراین $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است. واقعیت این است که هر نموداری در نقاط عادی و معمولی خودش پیوســـته است، اما اگر نمودار $y=f(x)$ در $x=a$ دچار قطعی یا پرش شود (مانند $x=۳$ در مثال ما)، آن‌جا اصلاً حد ندارد و در نقاطی که توخالی و توپر بالا و پایین هم باشـــد (مثل $x=۴$ در مثال ما)، حد دارد ولی پیوسته نیست. تقریباً همهٔ فصل را خواندیم. از این‌جا به بعد، همین حرف‌ها را تشریح می‌کنیم.

فهرست

همدل سوختهٔ ما به لاله‌زار گریخت
تحمل نفس سرد روزگار نداشت

این کتاب و شب نخوابیدن‌هایش،از صمیم جان تقدیم می‌شود به

اسطورهٔ بزرگ زندگی‌مان

«استاد محمدرضا شجریان»

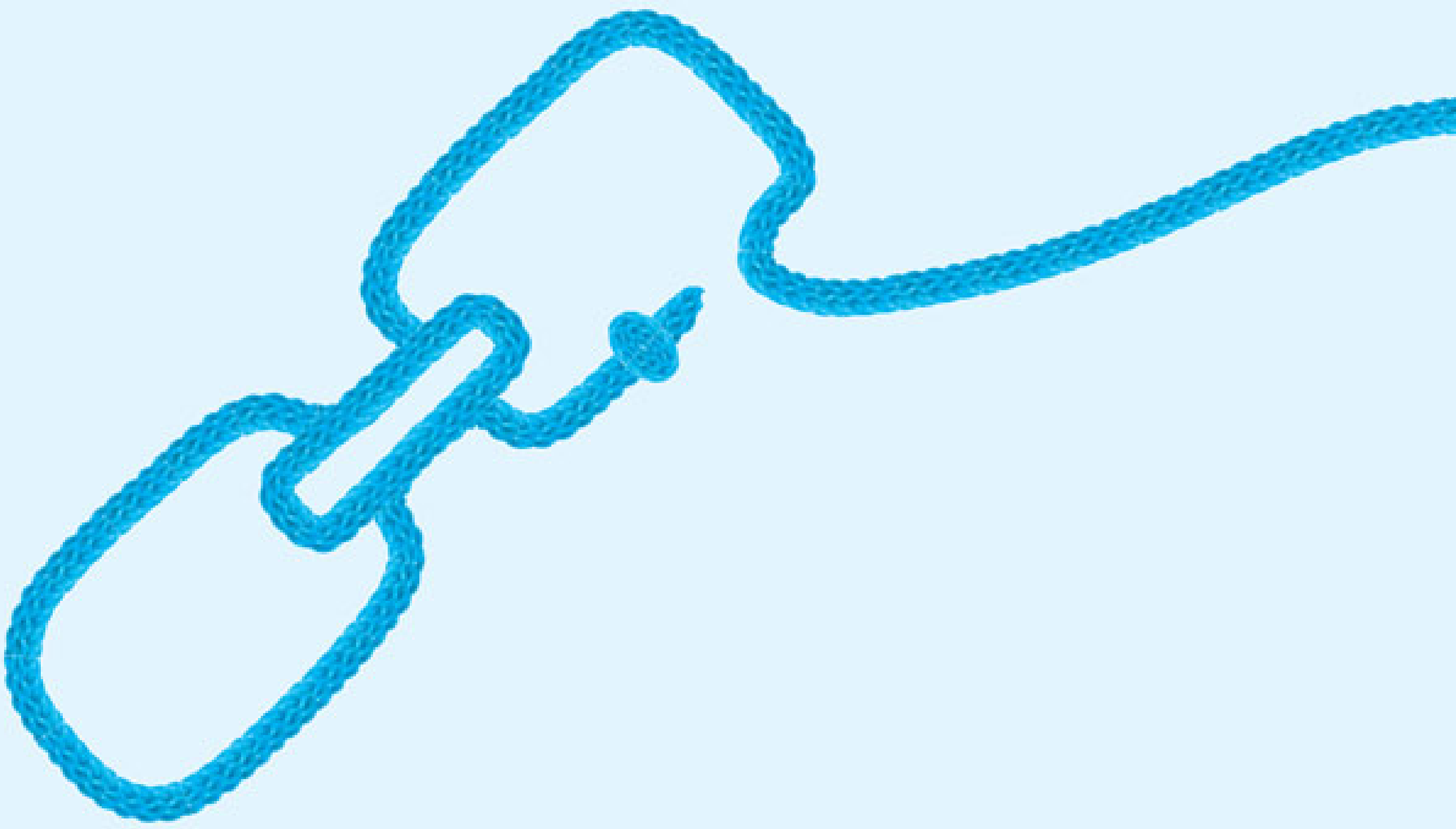
فصل ۱

توان و اتحاد

- فصل اول دربارهٔ توان، ریشه‌ها، اتحادها و تجزیه است.
- این فصل پیش‌نیاز ۷۰ درصد مطالب این کتاب است و یادگیری اصولی آن ضرورت دارد.
- میزان دشواری این فصل، ۶ از ۱۰ است. این فصل را باید مستمر بخوانید. یعنی برنامهٔ مطالعاتی این فصل نباید یک روز در میان باشد. به‌طور معمول، مدت زمان لازم برای مطالعهٔ این فصل، ۳ روز متوالی و روزانه ۹۰ دقیقه است.
- با مطالعهٔ این فصل، کارتان در فصل‌های بعدی واقعاً ساده‌تر می‌شود.
- در جدول زیر، تعداد تست‌های مستقیم و غیرمستقیمی که از این فصل در کنکورهای ۹۸ و ۹۹ رشتهٔ تجربی آمده است را آورده‌ایم.

سال	مستقیم	غیرمستقیم
۹۸ داخل	صفر	۵
۹۸ خارج	صفر	۶
۹۹ داخل	۱	۷
۹۹ خارج	۱	۶

سؤال مستقیم این فصل در کنکور ۹۹ مسئله‌ای ترکیبی و دشوار بود. مسائل غیرمستقیم مربوط به این فصل ساده‌تر بودند. در جدول بالا، صرفاً مسائلی را به‌عنوان مسائل غیرمستقیم آورده‌ایم که وابستگی آن‌ها به این فصل خیلی جدی است. احتمالاً قانع شده‌اید که فصل مهمی را در پیش رو داریم. تعداد آزمون‌های این فصل ۴ آزمون ۱۰ سؤالی است که با حل آن‌ها بر همهٔ مطالب فصل مسلط می‌شوید. یک آزمون جانانهٔ ۱۰سؤالی هم برای دانش‌آموزان ممتاز طراحی کرده‌ایم (هایپرتست) که استاندارد بالایی دارد. با هم شروع می‌کنیم.



۱ توان و قواعد آن

ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایهٔ یکسان

نکته اگر دو عدد توان‌دار که پایهٔ یکسانی دارند در هم ضرب شوند، پایه را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

قاعدهٔ مشابهی در تقسیم داریم:

۲) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \;;\; a \neq ۰$

روابط دیگری که همراه با دو رابطهٔ بالا مدام مورد استفاده قرار می‌گیرد، روابط مهم زیر هستند:

۳) $(a^m)^n = a^{mn}$

۴) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \;;\; a > ۰$

مثال عبارت‌های زیر به کمک قاعده‌های بالا محاسبه شده‌اند. به نحوهٔ محاسبه‌ها دقت کنید. عددهای بالای علامت تساوی، شمارهٔ قاعده‌ای هستند که در آن مرحله استفاده کرده‌ایم.

۱) $۲^۵ \times ۴^۷ \overset{(۳)}{=} ۲^۵ \times (۲^۲)^۷ \overset{(۳)}{=} ۲^۵ \times ۲^{۱۴} \overset{(۱)}{=} ۲^{۱۹}$

۲) $x^۳ \sqrt[۵]{x^۲} \overset{(۴)}{=} x^۳ \times x^{\frac{۲}{۵}} \overset{(۱)}{=} x^{۳+\frac{۲}{۵}} = x^{\frac{۱۷}{۵}}$

۳) $a^۳ \sqrt{\frac{۱}{a}} \overset{(۴)}{=} a^۳ \times \dfrac{۱}{a^{\frac{۱}{۲}}} = \dfrac{a^۳}{a^{\frac{۱}{۲}}} \overset{(۲)}{=} a^{۳-\frac{۱}{۲}} = a^{\frac{۵}{۲}}$

۴) $۸^۳ \times ۱۶^۵ \overset{(۳)}{=} (۲^۳)^۳ \times (۲^۴)^۵ = ۲^۹ \times ۲^{۲۰} \overset{(۱)}{=} ۲^{۲۹}$

۵) $\sqrt[۳]{a\sqrt{a}} \overset{(۴)}{=} \sqrt[۳]{a \times a^{\frac{۱}{۲}}} \overset{(۱)}{=} \sqrt[۳]{a^{۱+\frac{۱}{۲}}} = \sqrt[۳]{a^{\frac{۳}{۲}}} \overset{(۴)}{=} a^{\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}} = a^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{a}$

توان‌های منفی

اگر a عددی حقیقی و مخالف صفر باشد، داریم:

۱) $a^{۰} = ۱$ ۲) $a^{-n} = \dfrac{۱}{a^n}$ (۲ ۳) $(\frac{۱}{a})^{-n} = \dfrac{۱}{a^{-n}} = a^n$

مثال به نحوهٔ محاسبهٔ عبارت‌های توانی زیر دقت کنید.

۱) $(۲+\sin x)^{۰} = ۱$

۲) $\sqrt[۳]{\dfrac{۱}{۲\sqrt{۲}}} = \sqrt[۳]{\dfrac{۱}{۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}}} = \sqrt[۳]{\dfrac{۱}{۲^{\frac{۳}{۲}}}} = \sqrt[۳]{۲^{-\frac{۳}{۲}}} = ۲^{\frac{-\frac{۳}{۲}}{۳}} = ۲^{-\frac{۱}{۲}} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}}$

۳) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}\times(\frac{1}{a})^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[5]{a\times a^{\frac{2}{3}}}\times a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[5]{a^{1+\frac{2}{3}}}\times a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[5]{a^{\frac{5}{3}}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{\frac{5}{3}}{5}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=a^1=a$

۴) $\sqrt[5]{a\sqrt[6]{\frac{1}{a}}}=\sqrt[5]{a\times(\frac{1}{a})^{\frac{1}{6}}}=\sqrt[5]{a\times a^{-\frac{1}{6}}}=\sqrt[5]{a^{1-\frac{1}{6}}}=\sqrt[5]{a^{\frac{5}{6}}}=a^{\frac{\frac{5}{6}}{5}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$

در مسائل مربوط به این قسمت، طراحان کنکور به محاسبه‌های دومرحله‌ای خیلی علاقه‌مندند.

تست اگر $A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا مقدار A را تا جایی که می‌توانیم ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[5]{4\times 4^{\frac{2}{3}}}\times 2^{\frac{4}{3}}=\sqrt[5]{4^{\frac{5}{3}}}\times 2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{\frac{5}{3}}{5}}\times 2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}$$

$$=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$$

حالا $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ را حساب می‌کنیم:

$$(2A)^{-\frac{1}{3}}=(2\times 4)^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{-\frac{1}{3}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

■ کمی که تجربه‌مان بالاتر برود، می‌توانیم بعضی از مراحل محاسبات را ساده‌تر انجام دهیم و بعضی مراحل را هم در ذهن انجام دهیم. قاعده‌ای که بسیار استفاده می‌شود، ساده‌کردن توان و فرجهٔ یک عبارت رادیکالی است.

ساده کردن توان و فرجه

اگر $a>0$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$$

مثال به نحوهٔ انجام محاسبه‌های زیر دقت کنید:

۱) $\sqrt[10]{4^5}=\sqrt{4}=2$

۲) $\sqrt[5]{a^{\frac{5}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

۳) $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$ ($a>0$ است.)

◄ ادغام رادیکال‌ها

اگر $a\geq 0$ باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

این قانون برای چند رادیکال متوالی هم برقرار است.

مثال با استفاده از نکات قبل، عبارت‌های زیر را ساده می‌کنیم.

۱) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=\sqrt[3]{a\times a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

۲) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}=\sqrt[30]{a}$

۳) $(\sqrt{a})^3=(a^{\frac{1}{2}})^3=a^{\frac{3}{2}}=a^{1+\frac{1}{2}}=a^1\times a^{\frac{1}{2}}=a\sqrt{a}$

همهٔ ما بارها $a^m \times a^n = a^{m+n}$ را مشـــاهده کرده‌ایم. اما در بعضی مسائل باید برعکس نگاه کنیم. یعنی از $a^{m+n} = a^m \times a^n$ یا $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ استفاده کنیم. این مسائل تیپ مشخصی دارند که در مثال‌های زیر آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

مثال اگر $۶ = ۲^{x+۱}$ باشد، آن‌گاه حاصل ۸^x را به‌دست آورید.

پاسخ توجه می‌کنیم که $۲^{x+۱} = ۲^x \times ۲^۱$ است و همین، کلید حل این مسئله است:

$$۲^x \times ۲ = ۶ \Rightarrow ۲^x = ۳ \xrightarrow{\text{توان ۳}} (۲^x)^۳ = ۳^۳ \Rightarrow ۸^x = ۲۷$$

تست اگر $۳ = ۲^x$ و $۵ = ۳^y$ و $۸ = ۵^z$ باشد، آن‌گاه xyz کدام است؟ **(مفهومی)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** به‌جای xyz می‌خواهیم ۲^{xyz} را حساب کنیم.پس z و y و x را در توان نگه می‌داریم.

$$۲^{xyz} = (۲^x)^{yz} = ۳^{yz} = (۳^y)^z = ۵^z = ۸ = ۲^۳ \Rightarrow ۲^{xyz} = ۲^۳ \Rightarrow xyz = ۳$$

تمرین در روش بالا توانســـتیم با محاسبهٔ ۲^{xyz} مسئله را حل کنیم. شما همین مسئله را با محاسبهٔ ۳^{xyz} حل کنید.

- حالا مثال و تست بالا را با هم ترکیب می‌کنیم. تست زیر از هر جهت جالب است.

تست اگر $۱۸ = ۲^{x+۱}$ و $۱۲ = ۳^{y+۱}$ باشد، آن‌گاه xy کدام است؟ **(مفهومی)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۴»** می‌دانیم که:

$$\begin{cases} ۲^{x+۱} = ۱۸ \\ ۳^{y+۱} = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲^x \times ۲ = ۱۸ \\ ۳^y \times ۳ = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲^x = ۹ \\ ۳^y = ۴ \end{cases}$$

و حالا از تجربهٔ تست قبل می‌دانیم که بهتر است ۲^{xy} را حساب کنیم:

$$۲^{xy} = (۲^x)^y = ۹^y = (۳^۲)^y = (۳^y)^۲ = ۴^۲ = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow ۲^{xy} = ۲^۴ \Rightarrow xy = ۴$$

- در رابطه با این فصل، خیلی مهم است که بتوانیم به محاسبات توانی و رادیکالی سروسامان دهیم. برای این منظور، اغلب با اعدادی سروکار خواهیم داشت که باید به نحو مناسبی تجزیه شوند. در جدول زیر، همهٔ اعداد توان‌دار مهمی که باید بلد باشید را آورده‌ایم.

توان‌های ۲	$۴ = ۲^۲$	$۸ = ۲^۳$	$۱۶ = ۲^۴$	$۳۲ = ۲^۵$	$۶۴ = ۲^۶$	$۱۲۸ = ۲^۷$	$۲۵۶ = ۲^۸$
	$۵۱۲ = ۲^۹$	$۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$					
توان‌های ۳	$۹ = ۳^۲$	$۲۷ = ۳^۳$	$۸۱ = ۳^۴$	$۲۴۳ = ۳^۵$			
توان‌های ۵	$۲۵ = ۵^۲$	$۱۲۵ = ۵^۳$	$۶۲۵ = ۵^۴$				
مربع‌های کامل	$۳۶ = ۶^۲$	$۴۹ = ۷^۲$	$۱۰۰ = ۱۰^۲$	$۱۲۱ = ۱۱^۲$	$۱۴۴ = ۱۲^۲$	$۱۶۹ = ۱۳^۲$	$۱۹۶ = ۱۴^۲$
	$۲۲۵ = ۱۵^۲$						