به نام پروردگار مهربان

ویرایش جدید

هندسه کنکور

دهم | یازدهم | دوازدهم

حامد شفیعی

لقمه طلایی | مهروماه

تقدیم به همسرم عزیزم

مقدمه

کنکوری‌های عزیز سلام؛

خیلی از بچه‌ها بی‌خیال هندسه تو کنکور میشن، ولی تو سعی کن که روی این درس اختصاصی وقت کافی رو بذاری، چون باعث میشه که از رقیبات خیلی خیلی جلو بیفتی 🙂 بعداً نگی که نگفتی 😉

درسته که این کتاب لقمهٔ ما که قربونش بشم خیلی کوچیک و ریزه میزه است، اما وقتی که بازش می‌کنی، می‌بینی که نه!! انگار یه خبرایی هست. از ویژگی‌های کتاب بگم براتون، که یه کتاب خلاصه و جمع و جوره اما کامل و مرتبه که خیلی تند و سریع می‌تونی کل هندسه رو باهاش مرور کنی و با خیال راحت همه جا ببریش 🙂

تشکر و سپاس

بر خود لازم می‌دانم که از همهٔ کسانی که در به ثمر رساندن این کتاب صمیمانه تلاش کرده‌اند، قدردانی کنم:

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم و توانمند انتشارات
- جناب آقای عباس اشرفی مدیر محترم گروه ریاضی
- سرکار خانم دنیا سلیمی مسئول ویراستاری گروه ریاضی
- سرکار خانم مهرنوش رضوی و آزاده فلاح‌زاده ویراستاران علمی
- سرکار خانم سمیرا سیاوشی مدیر تولید
- جناب آقای محسن فرهادی مدیر هنری

و همهٔ عزیزانی که در تهیهٔ این کتاب ما را همراهی کردند.

ارادتمند شما
حامد شفیعی

فهرست

وعدهٔ ۱

نسبت و تناسب در هندسه

تعریف: به تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(d,b\neq 0)$ یک **تناسب** می‌گویند.

چاشنی: (ویژگی‌های تناسب)

۱ طرفین وسطین کردن:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc \quad (b,d\neq 0)$$

۲ معکوس کردن طرفین تناسب:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad (a,b,c,d\neq 0)$$

۳ تعویض‌های طرفین یا وسطین:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ یا } \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \text{ یا } \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \qquad (a,b,c,d\neq 0)$$

۴ ترکیب نسبت در صورت یا مخرج: $(b,d\neq 0)$

الف $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

ب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

۵ تفضیل نسبت در صورت یا مخرج: $(b,d\neq 0)$

الف $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

ب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

۶

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad(b,d\neq ۰)$$

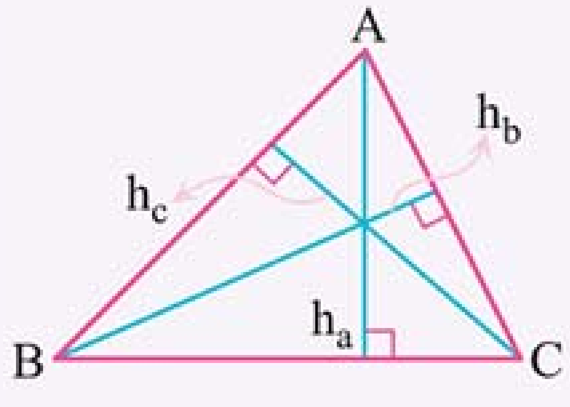
۷ (تعمیم ۶)

$$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\quad(b_۱,b_۲,\ldots,b_n\neq ۰)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}=\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

تعریف: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد، یعنی $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$، داریم $b^۲=ac$، در این صورت b را **واسطهٔ هندسی** a و c می‌نامیم.

نکته: ◂ در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع برابر است:

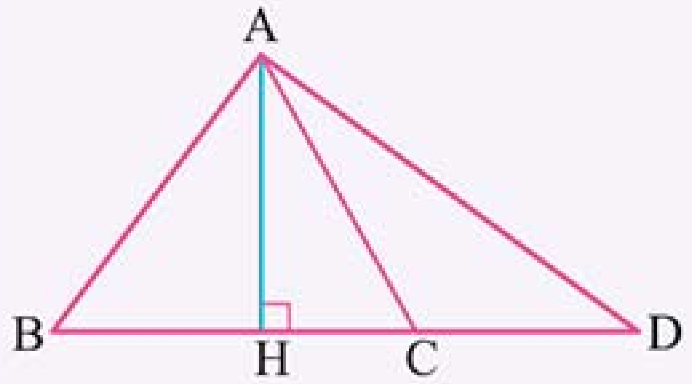


$$\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a},\ \frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a},\ \frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}$$

◂ در هر مثلث قائم‌الزاویه به وتر a داریم:

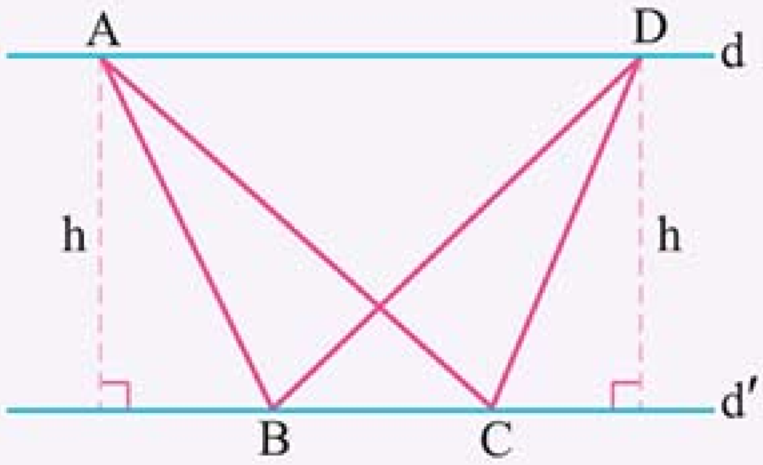
$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow\frac{۱}{{h_a}^۲}=\frac{۱}{{h_b}^۲}+\frac{۱}{{h_c}^۲}$$

◂ فرض کنید اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، در این صورت:



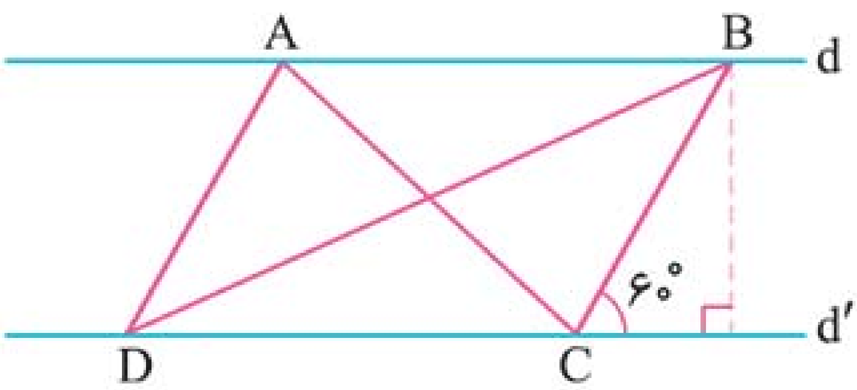
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}}=\frac{BC}{CD}$$

◂ اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده روی یک خط و موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{DBC}}$$

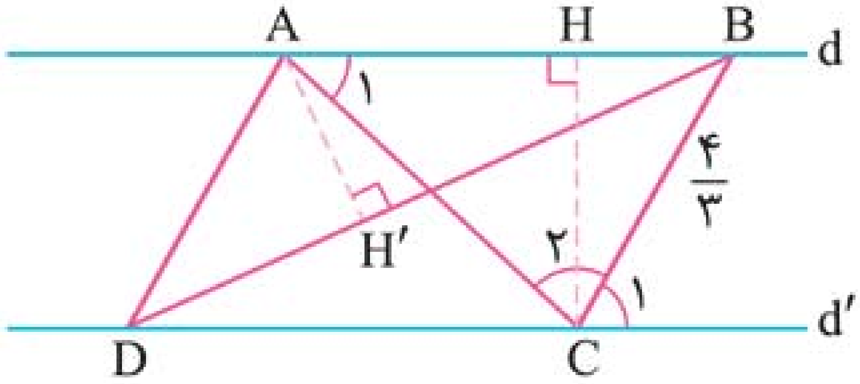
تست: در شکل زیر خط‌های d و d' موازی هستند، اگر $B\widehat{C}A=B\widehat{A}C$ و $BC=\frac{۴}{۳}\,cm$ و $DB=۳AB$ باشد، در این صورت ارتفاع وارد بر ضلع DB در مثلث ABD کدام است؟



۱) $\frac{۷\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

چون $d \parallel d'$ و BC مورب است، پس $A\hat{B}C = \hat{C}_1 = ۶۰^\circ$. از طرفی طبق فرض $\hat{A}_1 = \hat{C}_2 = ۶۰^\circ$ پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است:



از طرفی می‌دانیم که اندازهٔ ارتفاع در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است، پس:

$$CH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times BC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۴}{۳} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

طبق نکتهٔ گفته شده داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{ABD}} \Rightarrow \frac{CH \times AB}{\cancel{۲}} = \frac{AH' \times DB}{\cancel{۲}}$$

$$\xrightarrow{DB=۳AB} \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times \cancel{AB} = AH' \times (۳\cancel{AB})$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$$

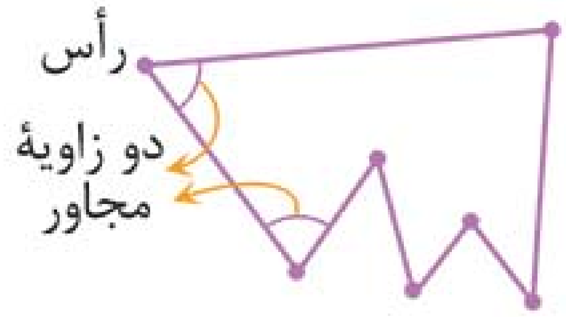
وعدهٔ ۱

چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن

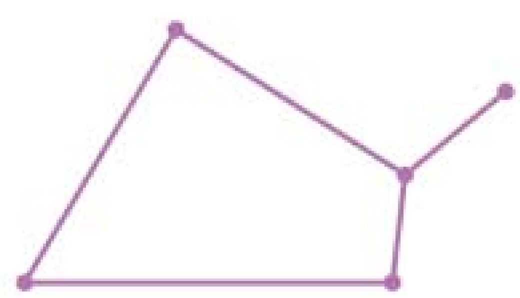
تعریف: n ضلعی یک شکل بسته‌ای است شامل n $(n \geq ۳)$ پاره‌خط متوالی که در آن:

الف هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط را در نقاط انتهایی خودش (رأس‌ها) قطع کند.

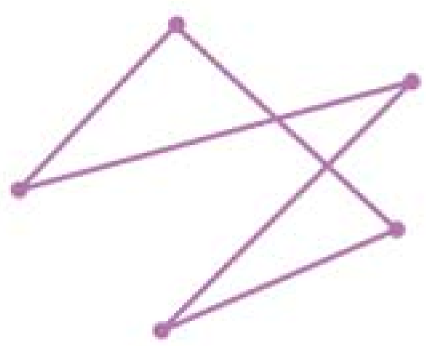
ب هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشد.



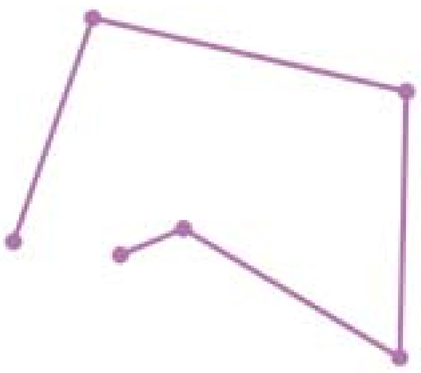
۷ ضلعی است.



چندضلعی نیست.



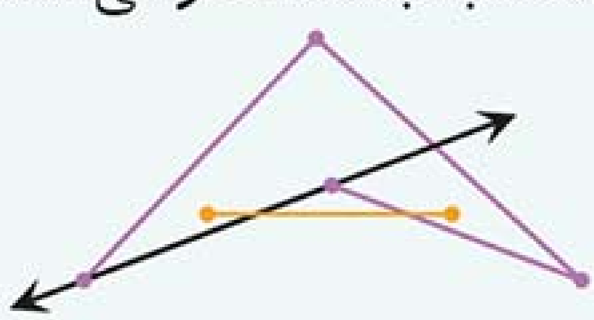
چندضلعی نیست.



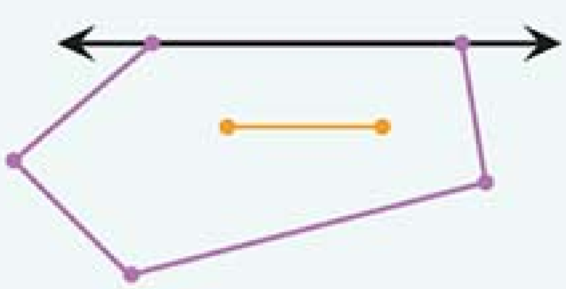
چندضلعی نیست.

چاشنی: (n ضلعی‌های محدب و مقعر)

n ضلعی را **محدب** گوییم، هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیهٔ نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند. چندضلعی که محدب نباشد، **مقعر** می‌نامند.



چندضلعی مقعر



چندضلعی محدب

نکته: ◂ در چندضلعی محدب تمام زاویه‌های داخلی کمتر از 180° می‌باشند، اما در چندضلعی مقعر حداقل یک زاویهٔ داخلی بزرگ‌تر از 180° وجود دارد.
◂ در چندضلعی محدب هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواه درون چندضلعی را به هم وصل کند تمام آن درون چندضلعی قرار دارد، اما در چندضلعی مقعر چنین نیست.

تعریف: در هر چندضلعی، پاره‌خطی که دو رأس غیرمجاور را به هم وصل می‌کند، **قطر** می‌نامند.

چاشنی: در هر n ضلعی داریم:

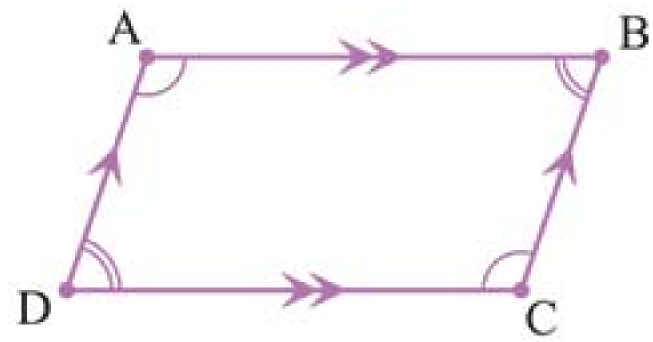
$$\begin{cases} \text{تعداد قطرها} = \dfrac{n(n-3)}{2} \\ \text{مجموع زوایای داخلی} = (n-2)\times 180^\circ \\ \text{مجموع زوایای خارجی} = 360^\circ \end{cases}$$

نکته: هر n ضلعی محدب حداکثر ۳ زاویهٔ داخلی حاده دارد.

وعدهٔ ۲

متوازی‌الاضلاع

تعریف: **متوازی‌الاضلاع**، چهارضلعی است که هر دو ضلع مقابل آن موازی هستند.



$ABCD \Leftrightarrow AB \parallel CD \;,\; AD \parallel BC$ متوازی‌الاضلاع است

چاشنی: **(ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع)**

۱ یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه باشند:

$ABCD \Leftrightarrow (AB = DC \,,\, AD = BC)$ متوازی‌الاضلاع است

۲ یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو زاویهٔ مقابل آن هم‌اندازه باشند.

$ABCD \Leftrightarrow (\hat{A} = \hat{C} \,,\, \hat{B} = \hat{D})$ متوازی‌الاضلاع است.

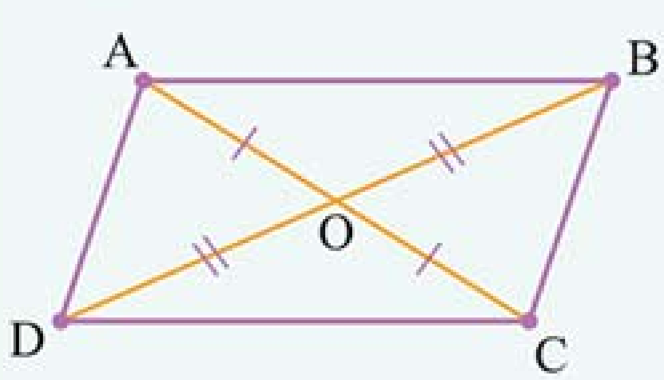
۳ یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو زاویهٔ مجاور، مکمل باشند.

$ABCD \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \hat{D}$ متوازی‌الاضلاع است.

$= \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ$

۴ یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهای آن منصّف یکدیگر باشند:

$(OA = OC \,,\, OB = OD)$

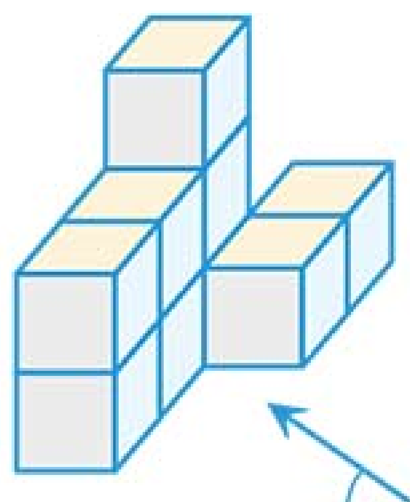


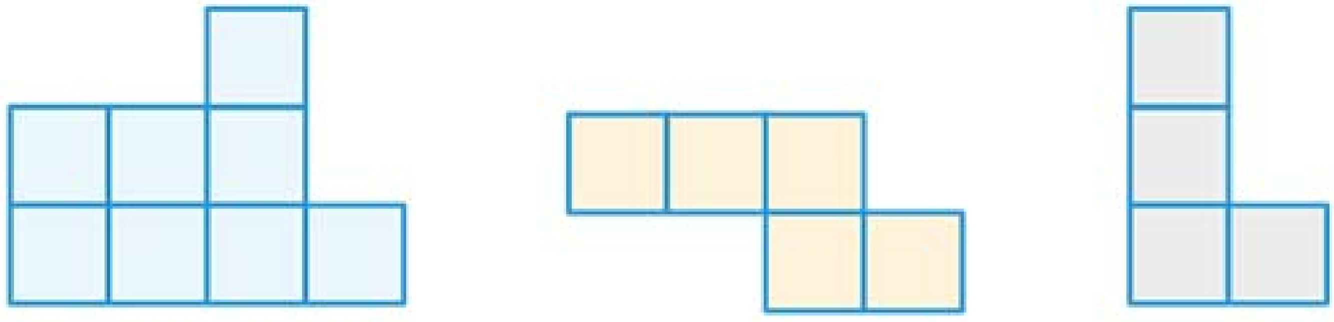
وعدهٔ ۳

تفکر تجسمی

در تفکر تجسمی از جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده **نمی‌شود**، بلکه این تصاویر هستند که در ذهن نقش می‌بندند و کمک می‌کنند دربارهٔ موضوع موردنظر فکر کنیم.

تعریف: به تصاویری که از سه نمای روبه‌رو، چپ و بالای یک جسم رسم می‌شود، **تصاویر سه نمای** آن جسم می‌گویند، به شکل زیر توجه کنید:





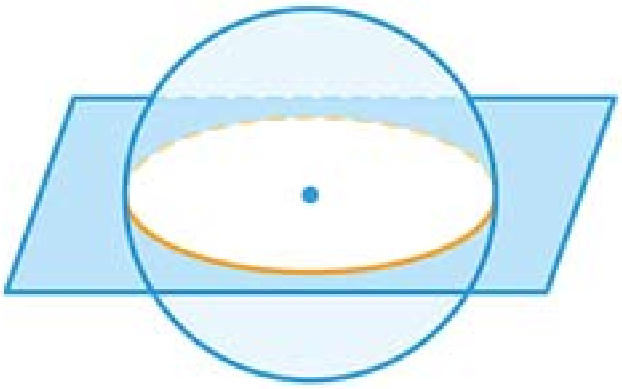
نمای روبه‌رو　　نمای بالا　　نمای روبه‌رو

وعدهٔ ۴

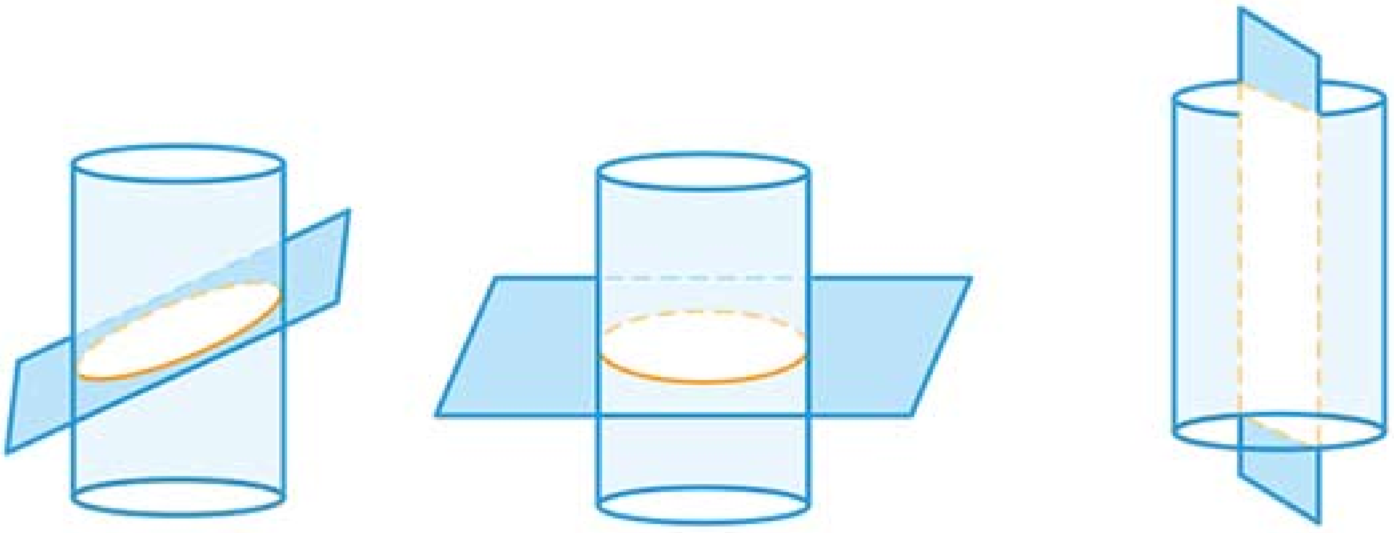
برش

تعریف: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.

۱ برش کره: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، یک **دایره** است:

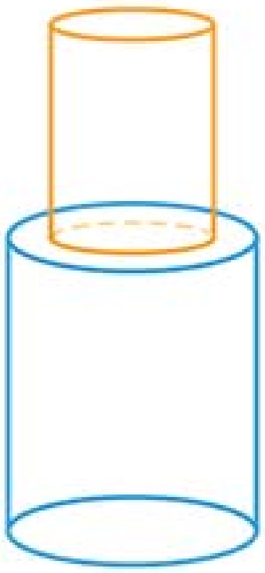


۲ برش استوانه: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک استوانه، سه حالت زیر را دارد:



مستطیل (برش عمودی) دایره (برش افقی) بیضی (برش مایل)

تست: دو استوانهٔ توپر به ارتفاع‌های ۶ و ۸ روی هم قرار گرفته‌اند. اگر شعاع قاعده‌ها به ترتیب ۲ و ۳ باشد سطح حاصل از برش عمودی و گذرا از مرکز دایرهٔ سطح مقطع چقدر است؟



۱) ۶۸

۲) ۷۴

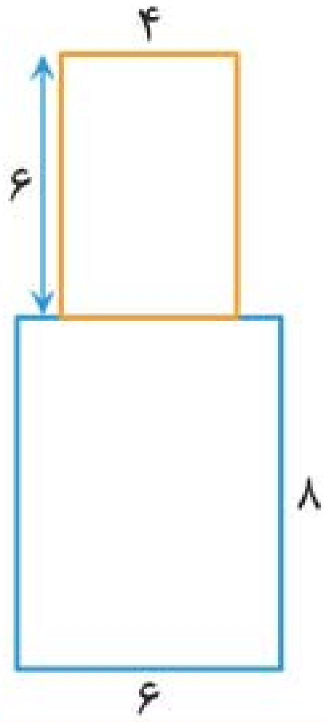
۳) ۷۲

۴) ۶۶

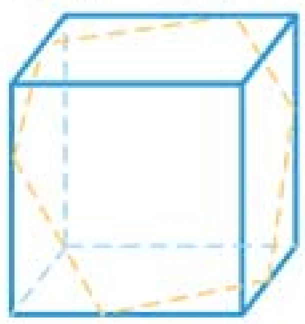
پاسخ **گزینهٔ «۳»**

سطح مقطع حاصل، دو مستطیل می‌باشند که روی هم قرار گرفته‌اند:

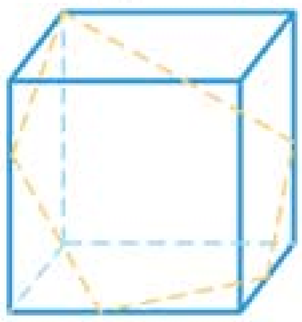
$$S = S_1 + S_2 = ۶ \times ۸ + ۶ \times ۴$$
$$= ۴۸ + ۲۴ = ۷۲$$



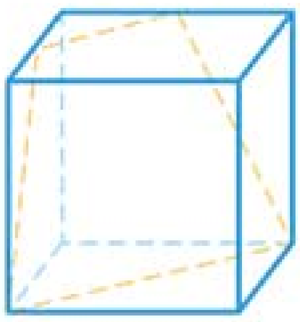
۳ برش مکعب: سطح مقطع یک مکعب می‌تواند مربع، مستطیل، مثلث، ذوزنقه، پنج‌ضلعی یا شش‌ضلعی باشد.



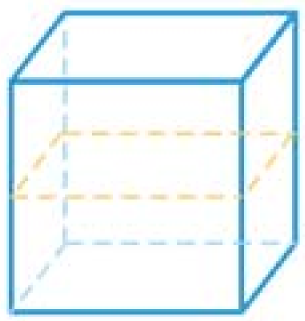
شش ضلعی (برش مایل)



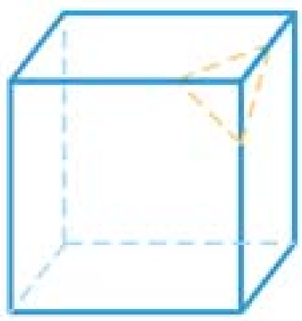
پنج ضلعی (برش مایل)



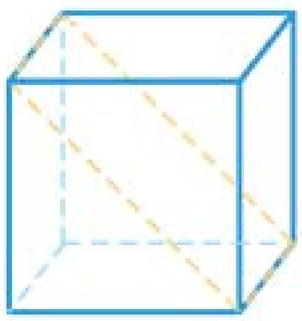
ذوزنقه (برش مایل)



مربع یا مستطیل (برش افقی)



مثلث (برش مایل)

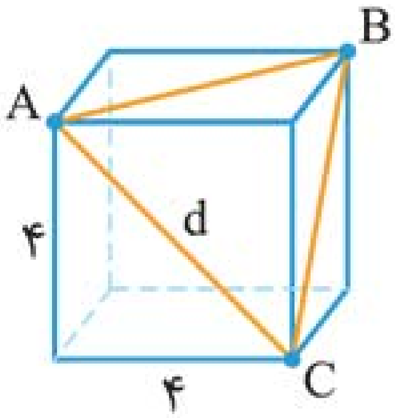


مربع یا مستطیل (برش مایل)

تست: در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۸ ۲) $۴\sqrt{۶}$ ۳) ۱۲ ۴) $۸\sqrt{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۴»



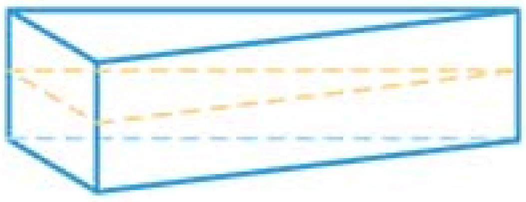
سطح مقطع حاصل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلع d است.

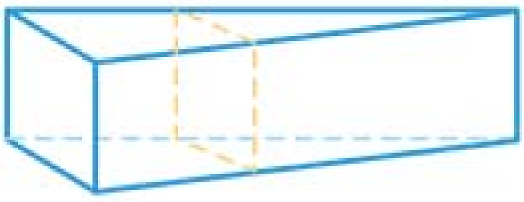
$$d^{۲} = ۴^{۲} + ۴^{۲} = ۳۲$$

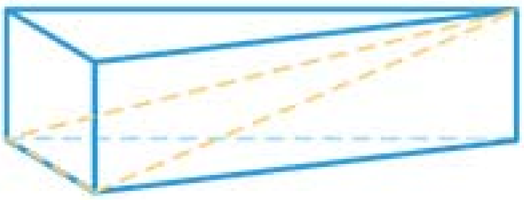
$$\Rightarrow d = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} d^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴\sqrt{۲})^{۲} = \frac{۳۲\sqrt{۳}}{۴} = ۸\sqrt{۳}$$

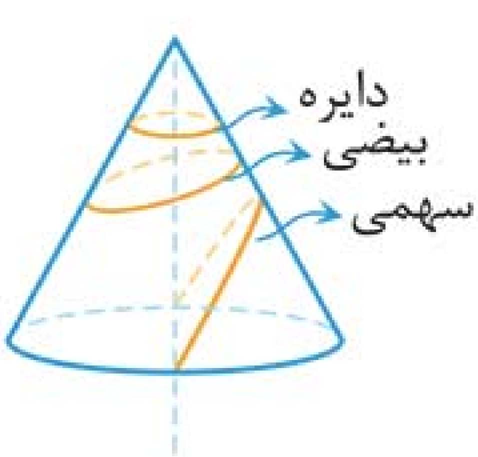
۴ برش منشور (مثلث‌القاعده): سطح مقطع یک منشور مثلث‌القاعده می‌تواند مثلث، مستطیل یا ذوزنقه باشد:


مثلث (برش افقی)


مستطیل (برش عمودی)

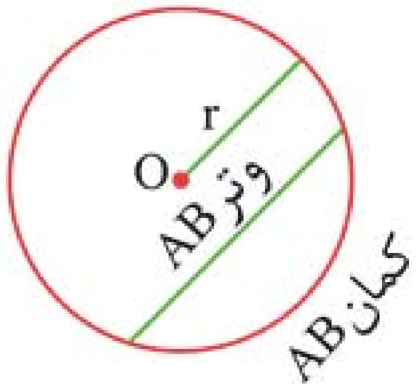

مثلث (برش مایل)

۵ برش مخروط: سطح مقطع یک مخروط می‌تواند دایره، بیضی یا سهمی باشد:



وعدهٔ ۱

مفاهیم اولیه در دایره

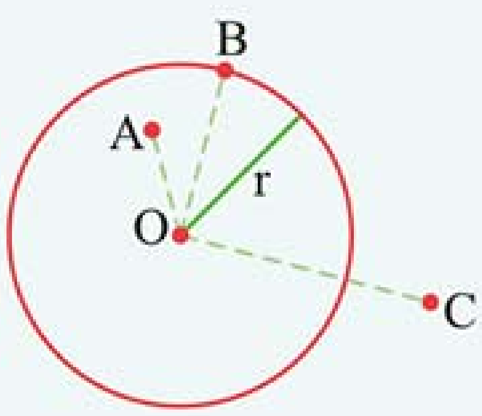


تعریف: دایره مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز (O) به فاصلهٔ ثابت r (شعاع) می‌باشد و آن را نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم.

- **وتر دایره:** پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.
- **قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.
- **کمان:** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. هر کمان دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند.

چاشنی: (وضعیت نقطه و دایره)

هر نقطه نسبت به دایره سه وضعیت زیر را دارد:

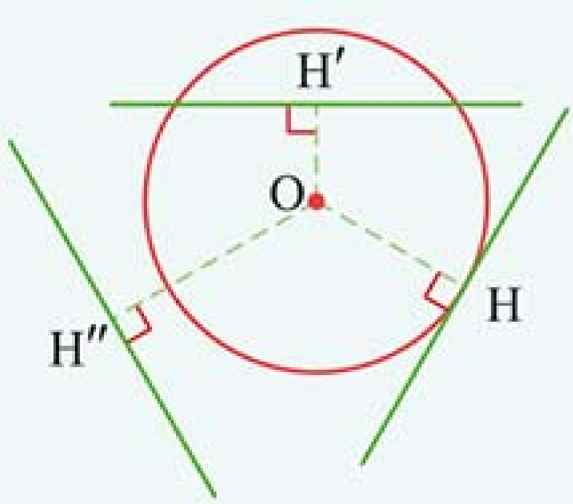


۱ درون دایره: $OA < r$

۲ روی دایره: $OB = r$

۳ بیرون دایره: $OC > r$

(اوضاع نسبی خط و دایره)



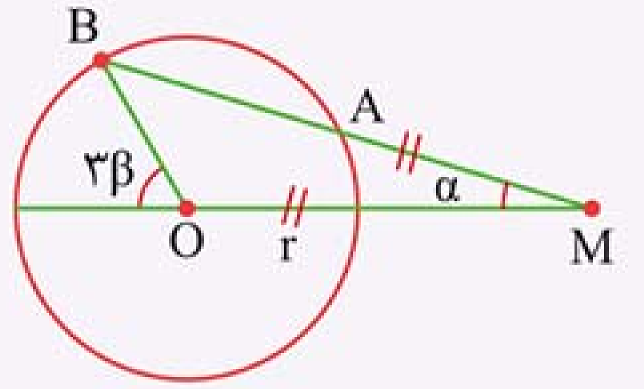
۱ **مماس:** خط و دایره در یک نقطه مشترک هستند $(OH = r)$

۲ **متقاطع:** خط و دایره در دو نقطه مشترک هستند $(OH' < r)$

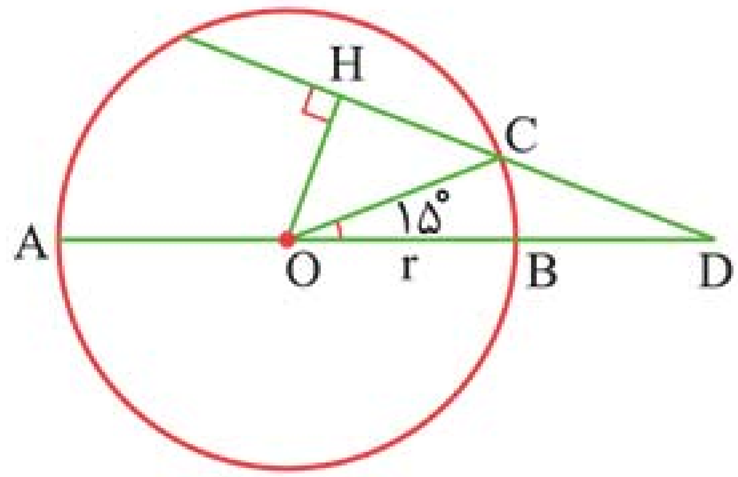
۳ **متخارج:** خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند $(OH'' > r)$

نکته: شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است.

- خط متقاطع با دایره را قاطع می‌نامیم که وتری از دایره جدا می‌کند.
- در شکل زیر اگر $MA = r$ باشد آن‌گاه $\beta = ۳\alpha$ است.



تست: در شکل زیر AB قطر دایره، $\widehat{COB} = ۱۵^\circ$ و $DC = r$ است. اندازهٔ OH چه مضربی از شعاع دایره است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

چون $DC = OC = r$، پس مثلث OCD متساوی‌الساقین است.

هم‌چنین چون که $\widehat{OCH}$ برای این مثلث زاویهٔ خارجی است، داریم، $\widehat{OCH} = ۳۰^\circ$ حال OH را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{OH}{OC} \Rightarrow OH = \frac{۱}{۲}OC = \frac{۱}{۲}r$$

پیوست

فرمول‌نامه

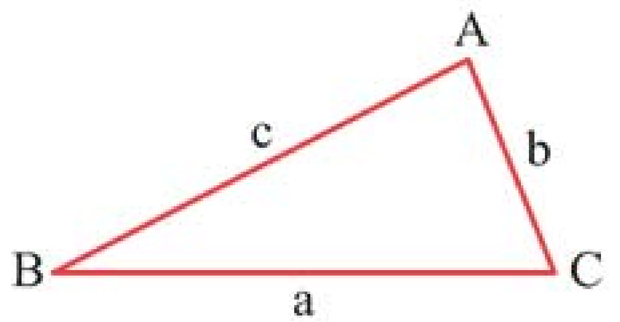
ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱ دایـره مجموعـه نقاطی از صفحه اسـت که از یک نقطـهٔ ثابت (مرکز دایره) به فاصلهٔ ثابت (شعاع دایره) باشند.

۲ هر نقطه، روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.

۳ هـر نقطـه، روی عمـود منصـف یک پاره‌خـط، از دو سـر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس.

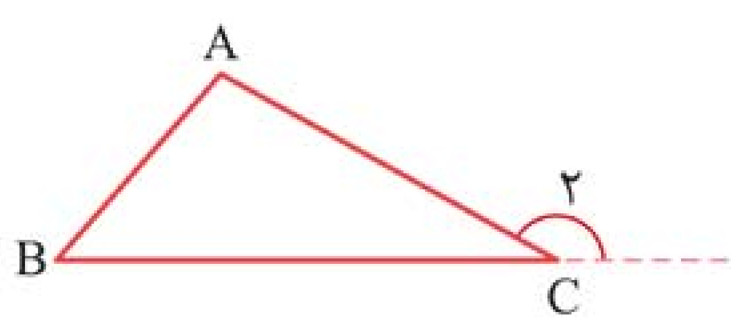
۴ یک مثلث در صورتی قابل رسم است که:



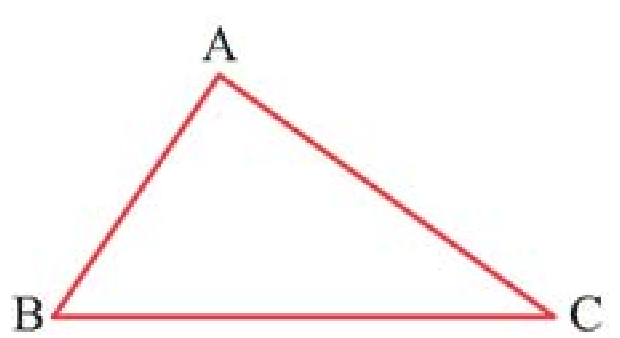
$$\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$$

یا در حالت کلی: $|b-c|<a<b+c$

۵ ارتفاع، نیمساز زاویه‌ها و عمودمنصف اضلاع یک مثلث همرس‌اند.

۶


$$\begin{cases} \hat{C}_{۲}>\hat{A}\ ,\ \hat{C}_{۲}>\hat{B} \\ \hat{C}_{۲}=\hat{A}+\hat{B} \end{cases}$$

۷


$$AC>AB \Leftrightarrow \hat{B}>\hat{C}$$

سؤالات کنکور سراسری ۹۸

۱. در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به‌هم وصل کند مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند، نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲. در مثلث ABC نقطهٔ M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطهٔ O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}BC$ ۲) AQ ۳) OA ۴) OP

۳. در چهارضلعی ABCD ، وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطر آن، رأس‌های یک لوزی است. الزاماً کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض، درست است؟

۱) دو ضلع غیرمجاور دیگر، برابرند.

۲) دو قطر عمود بر هم‌اند.

۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند.

۴) دو ضلع غیرمجاور، موازی‌اند.

۴. نقطهٔ A و خط d و صفحهٔ P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطهٔ A ، موازی خط d و عمود بر صفحهٔ P ، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟

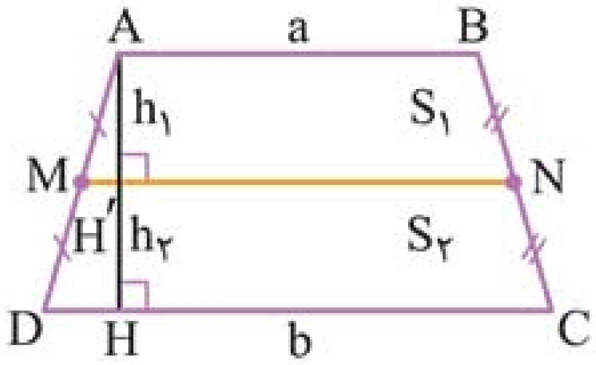
۱) $d \cap p = d$ ۲) $d \cap p \neq \phi$

۳) $d \parallel p$ ۴) $d \perp p$

پاسخ‌نامه

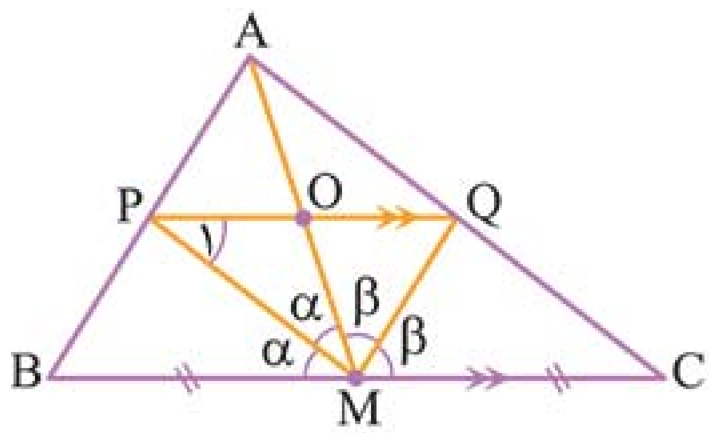
۱. **گزینهٔ «۲»**

دو ذوزنقه هم‌ارتفاع هستند.



$$\begin{cases} \text{در } \overset{\triangle}{ADH} \Rightarrow MH' \parallel DH \Rightarrow \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_1 = h_2 \\ MN = \dfrac{a+b}{2} \quad , \quad \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{a + \frac{a+b}{2}}{b + \frac{a+b}{2}} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

۲. **گزینهٔ «۴»**



$$\begin{cases} \text{نیمساز } MP \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AM}{\frac{BC}{2}} \\ \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AM}{\frac{BC}{2}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC} \Rightarrow PQ \parallel BC$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow P_1 = \alpha \Rightarrow OP = OM$$