به نام پروردگار مهربان

مهروماه

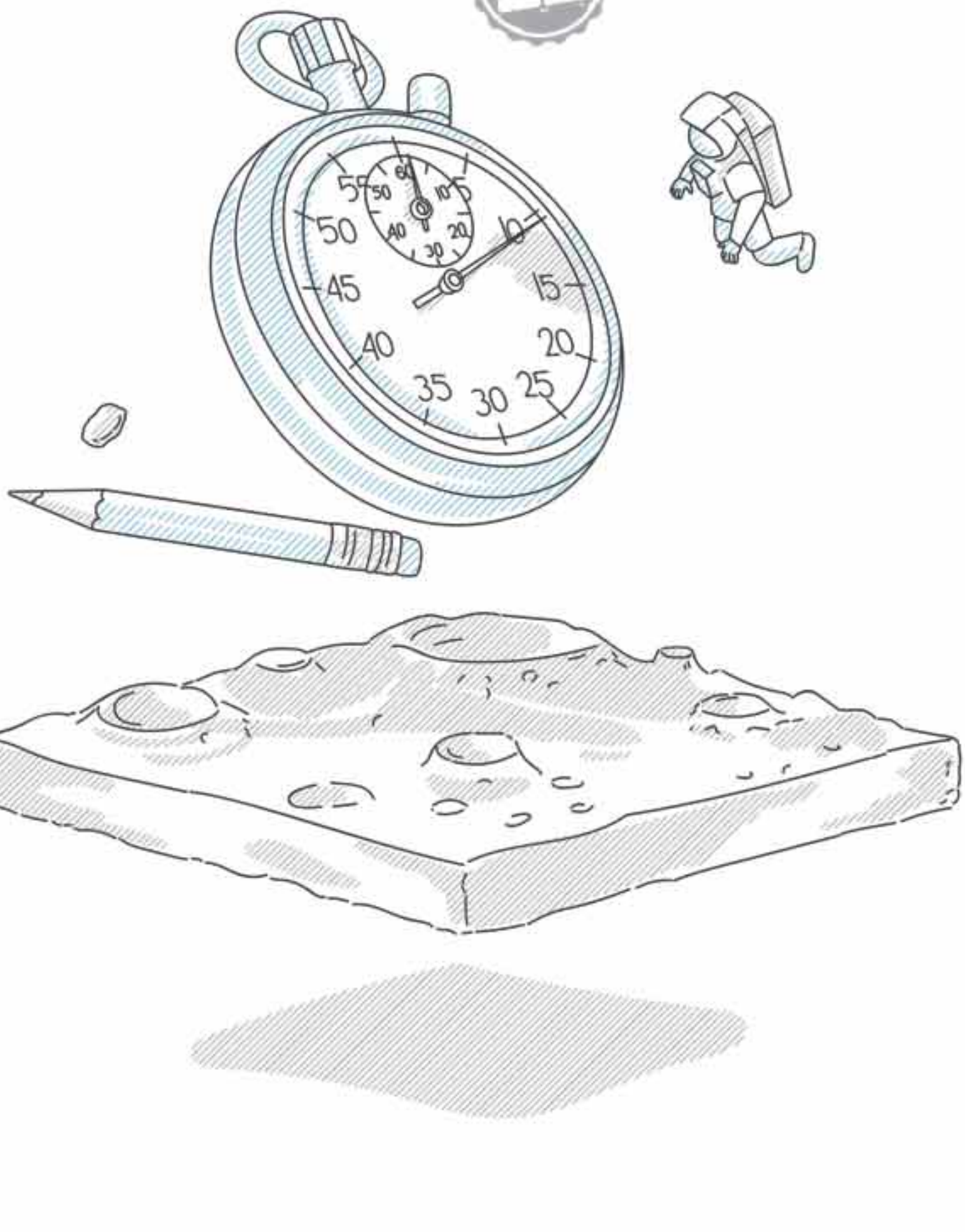
آزمون
+PLUS

ریاضیات تجربی

۱۰۰ آزمون برای ۱۰۰٪

• دکتر محمدرضا میرجلیلی • دکتر مهدی امیریان

ویرایش جدید



زندگی مجذور اینه است
زندگی حل به توان ابیت...
زندگی ضرب زمین در ضربان دل ما
زندگی هندسه‌ی ساده و یکسان نفس هاست...!

تقدیم به او...
که عهدش وفاست
به آن
خلوتِ پیدا نشده توی بهشت ...

مقدمه

دوست خوب کنکوری من، همراه عزیزم و دکترِ آینده، سلام به روی ماهت...
اول کار برایت آرزوی موفقیت و رتبه‌ی خوب در کنکورِ پیش رو می‌کنیم و البته درصدی بالا و شایسته برای ریاضی‌ات، بعدش بابت اعتماد مجدد به مؤلفین کتاب ریاضیات تجربی جامع مهروماه و انتخاب کتاب آزمون‌مان ازت ممنونیم؛ حالا که چنین انتخاب فاخری داری، واجب است که حرف‌های ما را درباره‌ی استفاده‌ی درست و کامل از این کتاب بشنوی...

آزمون دادن، فرایندی لازم و جدایی‌ناپذیر برای موفقیت

همه ی دانش‌آموزان و اساتید محترم کنکور می‌دانند آزمون دادن چقدر به فرآیند یادگیری، تسلط و سنجش کمک می‌کند؛ آزمون یعنی **حل تعداد مشخصی تست استاندارد در زمان محدود**، برای روشن شدن وضعیت و سطح دانش‌آموز در آن مبحث. خب بعد از خواندنِ درس و حل تست‌های آخر فصل، این مهم باعث می‌شود ضعف خود را بشناسی و به موقع برای جبران اقدام کنی...
آزمون دادن نیازمند مرور، تمرکز و زمان‌بندی است؛ تمام چیزهایی که در کنکور به دادتان می‌رسد...!

ساختار کتاب ریاضی تجربی+ مهروماه

این کتاب چهار بخش دارد؛ **بخش اول** «**آزمون‌های تفکیکی**» است به همراه درسنامه‌ی مختصر. **بخش دوم** «**آزمون‌های ترکیبی**» است مطابق با برنامه‌ی آزمون‌های آزمایشی مرحله‌ای کشوری، بخش سوم «**آزمون‌های جامع استاندارد**»،مطابق با کنکور سراسری و **بخش چهارم** هم **پاسخ تست‌های آزمون**هاست. در پایان کتاب یک **هدیه‌ی** با ارزش برایت گذاشته‌ایم؛ «**فرمول‌نامه**»! تمام فرمول‌های لازم برای ریاضی تجربی کنکورت؛ دسته‌بندی شده، کامل و آماده.

آشنایی با آزمون‌های هر بخش از کتاب

در بخش اول آزمون‌های موضوعی را می‌بینی،به‌ترتیبِ فصل‌های کتاب ریاضیات تجربی جامع خودمان و در هر فصل سه سطح آزمون: پوشش دهنده و مطابق با کتاب درسی، شبیه به کنکور سراسری و اندکی سخت‌تر و فراتر برای ۱۰۰٪ . قبل از شروع هر آزمون

نـکات، تکنیک‌هـا و مطالب مهم درسـی در قالب درسـنامه‌ای کامل ولی مختصر آمده تا وظیفه‌ی مـرور و جمع‌بندیِ فصل را ایفا کند. **زمـان پرداختـن بـه آزمون‌های بخش اول، بعـد از اتمام مطالعه‌ی فصل و حل تسـت‌های چهارگزینه‌ای کتاب اصلـی خودمان یا پایان درس دبیرتان در این فصل است...**

در بخش دوم با برنامه‌ی آزمون‌های قلم‌چی و گزینه‌ی دو همراه شده‌ایم،آزمون‌هایی از مباحث مختلف ولی مرتبطِ کتاب‌های ریاضی ۱، ریاضـی ۲ و ریاضـی ۳تـان کـه بـا هدفی خـاص و هوشـمندانه ترکیب شـده و جلو می‌رونـد طراحی کرده‌ایـم تا هم آمـاده‌ی آزمون‌های آزمایشـی مرحله‌ای بشـوی و هم در قالبی پوشـش‌دهنده جمع‌بندی کنی. **زمان پرداختن به آزمون‌های بخش دوم قبل از آزمون‌های آزمایشی مرحله‌ای** و در طیِ سال تحصیلی است، برنامه‌ی ترکیبی هر آزمون در جدولی بالای آزمون آمده است...

در بخش سـوم برای روزهای آخرِ درس خواندنت، کنکور طرح کرده‌ایم! آزمون‌هایی که از لحاظ تعداد تسـت، زمان، چیدمان و سـطح سؤالات کاملاً مشابه کنکور نظام جدید باشد؛ این ها بهترین وسیله برای سنجش و ارزیابی ریاضی ات در دوران جمع‌بندی هستند. **زمان پرداختن به بخش سوم بعد از امتحانات نهایی خرداد است.** در پاسخ‌ها سعی شده بهترین،کوتاه‌ترین و خلاقانه‌ترین راه حل برای تست‌ها ارائه شود تا هم ایرادات را برطرف کند و هم شاید کمکی کند برای یادگیری راه‌حل هاو روش‌های جالب و سریع...

ویژگی‌های منحصر به فرد کتاب ریاضی تجربی+

اکثر دبیران محترم برای آزمون‌های کلاسی یا ارزیابی دانش‌آموزان خود از منابع موجود استفاده می‌کنند که یا مطابقتی با کتاب درسی جدیـد نـدارد یـا هدفمند و منسـجم نیسـت! **طرح آزمون‌هـای منطبق بر کتاب درسـی جدید، خلاقانـه و هدفمند و البته سـطح‌بندی شـده** از مهم‌ترین شـاخصه‌های این کتاب اسـت. به این مطلب اضافه کنید **درسنامه‌های مختصر** برای بستن هر فصل در ذهنتان، **فرمول‌هـای لازم کنکورتـان** و از همـه مهم‌تـر **آزمون‌های ترکیبی** کتـاب که قدم به قدم فصل‌های کتاب‌های ریاضـی را می‌بندد و دوباره برای پوشش برمی‌گردد و تو را جلو می‌برد...

و در آخـر بـه یـک ویژگـی منحصر به فرد اشـاره کنیـم: **آزمون‌های جامع اسـتاندارد!** که نقطه‌ی قـوت کتاب مهروماه بـوده و الان هم با تجربه‌ی سال‌ها طرح تست مؤلفان برای کنکورهای آزمایشی کشوری، در اختیار توست...

راه‌کار استفاده‌ی بهینه از کتاب ریاضی تجربی+

خـوب اسـت اول درس را در کلاس یـاد بگیـری، کتاب درسـی را بخوانی و بروی سـراغ ریاضیـات تجربی جامع‌مان. درسـنامه‌های کتاب اصلـی را بخوانـی و تسـت‌های چهارگزینـه‌ای آخـر هـر فصـل را متناسـب بـا سـطح خـودت حـل کنـی و پاسـخ‌ها را خوانـده و نکته‌ها را یادداشـت‌برداری کنی، بعدش موقع مراجعه به این کتاب می‌شـود!! برای هر فصل مطابق زمان پیشـنهادی، از خودت آزمون بگیر و درصدت را بالای آزمون یادداشـت کن برای مقایسـه‌ی رشـد خودت در درس... هر بار که آزمون‌های آزمایشـی مرحله‌ای از راه رسـیدند قبلش آزمون ترکیبی ما را بزن و اگر هم در آزمون‌های آزمایشی شرکت نمی‌کنی، از اول مهرماه هر دو هفته از خودت آزمون‌ها را بگیر...!

آزمون پلاس ریاضیات تجربی مناسب است، برای تو...

این کتاب موجودیتی مستقل دارد؛ یعنی وابسته به کتاب ریاضیات تجربی جامع مهروماه نیست و برای هر دانش‌آموز مستعدی که بخواهد آزمون ریاضی درست و حسابی از خودش بگیرد مفید خواهد بود؛ هرچند بهترین نتیجه زمانی به دست می‌آید که این کتاب را به همراه مرجع اصلی ریاضی تجربی کنکور، یعنی جامع خودمان توأم کنید...

این کتاب فقط یک کتابِ آزمون نیست؛ کتابی برای مرور، همراهی، یادگیری و تسلط هم هست. کتابی **با حجم کم و با همه چیزا** کتابی که مکمل خوبی برای هر کتاب کمک درسی ریاضی تجربی است...

توصیه‌ای به دانش‌آموزان عزیز

قبول شدن در رشته‌های پزشکی، سخت و هدفی رویایی نیست، اگر در مسیر درست و با ابزاری مناسب درس بخوانید قبول شدن در رشته‌ی دلخواه‌تان هوشمندی هم می‌خواهد! کتاب‌های متعدد کمک درسی نخرید و از شاخه‌ای به دیگری نپرید...! بدانید برای هر درس، بسته‌ی موفقیت این است: **آموزش، تست و آزمون. پس نگران ریاضی‌ات نباش ما درستش می‌کنیم**... با کتاب ریاضیات تجربی جامع و البته آزمون پلاس ریاضیات تجربی؛ فقط برای خودِ خودت...! برای ارتباط با ما سر بزن به... @dr.mehdiamirian

سخنی با اساتید محترم و همکارانِ جان ...

این کتاب می‌تواند به عنوان تک کتابی باشد که برای ریاضی تجربی به دانش‌آموزتان معرفی می‌کنید؛ بیش از ۱۰۰۰ تست خلاقانه، هدفمند و کافی با درسنامه و فرمولنامه! اگر زمان محدودی برای ارائه‌ی تکلیف دارید یا دوره‌های فشرده را تدریس می‌کنید هم همینطور و البته می‌تواند مکمل هر کتاب کمک آموزشیِ مناسبی باشد که صلاح دانسته‌اید؛ **خیالتان را بابت آزمون‌ها راحت کرده‌ایم**. کتاب ریاضی تجربی جامع مهروماه به لطف حمایت، استفاده و معرفی همکاران فرهیخته و حرفه‌ای ریاضی تجربی، بهترین منبع مطالعاتی دانش‌آموزان برتر کشور است و حالا آزمون پلاس ریاضیات تجربی، آن را کامل می‌کند. با **آزمون دانش‌آموز را مسلح می‌کند** برای کسب بهترین درصد ریاضی...

مانند قبل نظرات ارزشمند، راه‌های خلاقانه، ایرادات احتمالی و رهنمودهای ارزشمندتان را به نشانی الکترونیکی mr-mirjalili@yahoo.com بفرستید.

صد آزمون برای صددرصد ...

این کتاب مشتمل بر صد آزمون است، از سه نوع مختلف و برای سه زمان مختلف، هدف این است با این صد آزمون **پرواز کنی از نقطه‌ی شروع تا درصد ۱۰۰ ...**

پس با هر سطحی و در هر مدرسه‌ای که هستی برنامه‌ی آزمونت را با کتاب ما تنظیم کن و آماده‌ی بهترین‌ها شو...

جدای از ایده‌پردازیِ منحصربه فرد و زحمات شبانه‌روزی در زمان محدود که برای ما اتفاق افتاد، این اثر مدیون است به همراهی و صبر خانواده‌هایمان، حمایت‌های آقای احمد اختیاری و دلسوزی‌های ویراستاران، زحمات گروه تولید و هنریِ مهروماه و...

رسم ادب این است که متواضعانه دست همگی گروه همراهمان را فشرده و صمیمانه از همگی تشکر کنیم؛ همان‌هایی که دلشان به موفقیت شما دانش‌آموزِ عزیز گرم است...

خدا پشت و پناهت و مراقب درصد ریاضی‌ات باش!

میرجلیلی. امیریان

فهرست

بخش ۱: آزمون‌های تفکیکی ۷

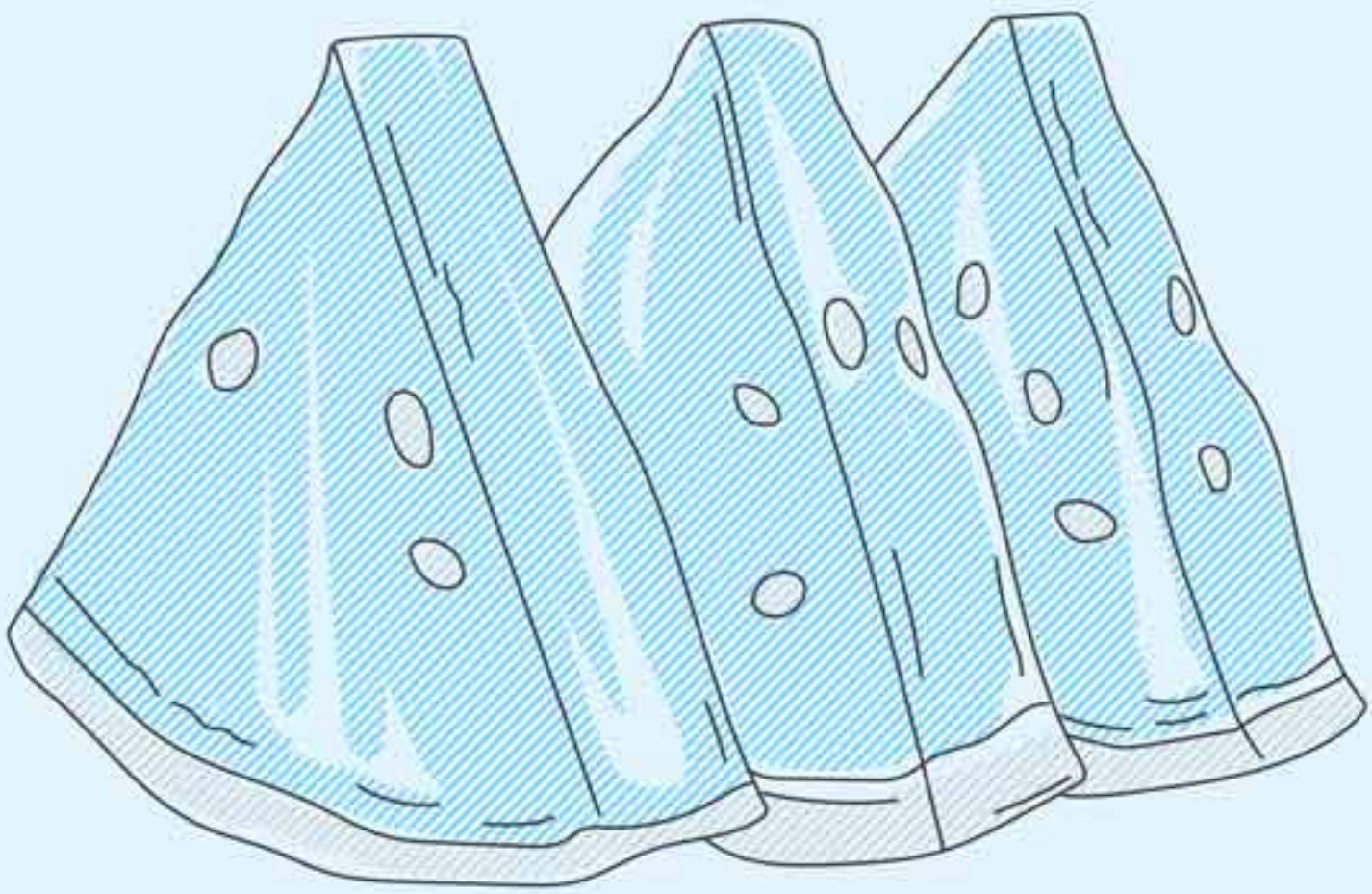
بخش ۲: آزمون‌های ترکیبی ۹۹

بخش ۳: آزمون‌های جامع ۱۵۵

بخش ۴: پاسخ‌نامه تشریحی ۱۸۵

بخش ۵: فرمولنامه ۳۷۱

بخش ۱



آزمون‌های تفکیکی

در این بخش، آزمون‌هایی دارید که هرکدام فقط از یکی از فصل‌های ریاضی‌تان طرح شده‌اند؛ آزمون‌هایی که هرکدام وظیفه‌ی سنجش شما و البته مرور آن فصل را به عهده دارند.
در این بخش و برای هر فصل، سه آزمون با سطح‌های مختلف طراحی کرده‌ایم: آزمونی در سطح مطالب کتاب درسی، آزمونی مشابه کنکور سراسری از آن فصل و در آخر آزمونی با سطح بالاتر برای تسلط بیشتر و آزمون‌های دشوارتر ... . یادتان باشد زمان زدن تست‌های این بخش، بعد از اتمامِ فصل در کلاس درسی یا مطالعه‌ی کاملِ خودتان از فصل موردنظر در کتاب ریاضی تجربی جامع و حل و تحلیل تست‌های آن فصل است؛ در ضمن اگر قرار است در آزمونی کلاسی از فصل شرکت کنید هم حتماً این بخشِ کتاب را حل کنید ...
برای هر فصل درسنامه‌ای مختصر ولی کامل، برای مرور مطالب و جمع‌بندیِ ایده‌ها گذاشته‌ایم که شما را آماده می‌کند برای آزمون دادنِ بهتر ...
هر فصل سه آزمون، با سه سطح متفاوت ولی مرحله‌ای؛ بستنِ فصل به فصل ریاضیِ کنکورتان ...

فصل هشتم: تابع و انواع آن

۱ مفاهیم ابتدایی و انواع

تعریف: یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای است بین این دو مجموعه که در آن **به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B** نسبت داده می‌شود.

◄ هر خط موازی با محور y ها، نمودار تابع را **حداکثر** در یک نقطه قطع می‌کند.

◄ عضوهای تابع، زوج مرتب‌هایی هستند که اگر به آن‌ها نگاه کنید **هیچ دو زوجی با مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متفاوت ندارید!**

مدل ریاضی این تابع نیست: $f=\{(a,b),(a,c),\dots\}$، مگر $b=c$ شود.

◄ برای این‌که نشان دهید ضابطه‌ی داده‌شده توسط تست، تابع نیست، کافی است یک x به آن بدهید که دو تا y (یا بیشتر) تحویل بدهد...

الف) ضابطه‌ی تابع: $f(x)=\underbrace{\text{(عبارتی برحسب } x\text{)}}_{\text{ضابطه}}$، یعنی ضابطه‌ی تابع داده شده و برای پیدا کردن $f(a)$ به جای تمام x های ضابطه می‌گذاریم a. راستی $f(x)$ را گاهی y هم می‌نویسند.

ببین:

$$f(x)=\underbrace{\frac{x^2+x+1}{x-2}}_{\text{ضابطه‌ی تابع}} \xrightarrow{x=1} f(1)=\frac{1^2+1+1}{1-2}=-3$$

◄ **این سه جمله معادل همدیگرند:** نقطه‌ی (a,b) روی نمودار تابع f است

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow f(a)=b \Leftrightarrow$$

ب) برخورد تابع با محورها و تابعی دیگر

◄ اگر بخواهید نقطه‌ی برخورد تابع با محور y ها را پیدا کنید به جای x های ضابطه‌ی آن بگذارید صفر؛ **در واقع $f(0)$ را پیدا کن...**

◄ اگر بخواهید نقطه‌ی برخورد تابع با محور x ها را پیدا کنید به جای $f(x)$ یا همان y تابع بگذارید صفر و معادله‌ی حاصل را حل کنید تا x ها به دست بیایند؛ **در واقع ضابطه‌ی تابع را مساوی صفر بذار...**

◄ اگر بخواهید نقطه‌ی تلاقی دو تابع f و g را پیدا کنید، **ضابطه‌های آن‌ها را مساوی هم بگذارید: $f(x)=g(x)$ و معادله‌ی حاصل را حل کنید...**

مدل ریاضی دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a متقاطع‌اند، نتیجه می‌دهد: $f(a)=g(a)$

پ) تابع‌های خاص

۱	تابع ثابت	$f(x)=c$، (c عددی ثابت است)
۲	تابع همانی	$f(x)=x$
۳	تابع خطی	$f(x)=ax+b$
۴	تابع قطعه‌ای (چند ضابطه‌ای)	$f(x)=\begin{cases}g(x) & \text{(عبارت)}\\ h(x) & \text{(عبارت)}\end{cases}$، دوتا (عبارت)، محدوده برای x است.
۵	تابع گویا	تابع کسری که صورت و مخرجش، هر دو چندجمله‌ای هستند: $f(x)=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{cx^m+dx^{m-1}+\cdots}$ (مخرج $\neq 0$)

◄ برای پیدا کردن $f(a)$ در تابع چند ضابطه‌ای، اول ببینید a در کدام محدوده‌ی x صدق می‌کند، بعد a را به همان ضابطه‌ی نظیر آن محدوده بدهید.

۲ دامنه، برد و تساوی تابع‌ها

الف) دامنه‌ی تابع و پیداکردن آن: دامنه‌ی تابع همان مؤلفه‌های اول در زوج مرتب‌های تابع است؛ تمام x هایی که تابع به ازای آن‌ها تعریف شده است...

◄ در **تابع کسری گویا**، مخرج را مخالف صفر بگذارید، در **تابع رادیکالی فرجه‌ی زوج**، زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهید.

مدل ریاضی $f(x)=\frac{\square}{u}$، دامنه‌اش می‌شود $u\neq 0$ (□ و u هر دو چندجمله‌ای هستند) و $f(x)=\sqrt[2k]{u}$، دامنه‌اش عبارت است از $u\geq 0$.

◄ برای پیدا کردن دامنه‌ی تابع از روی نمودار آن، تابع را روی محور x ها تصویر کنید و محدوده‌ای را که تشکیل می‌دهد، اعلام کنید.

ب) برد تابع و پیداکردن آن: برد تابع همان مؤلفه‌های دوم در زوج مرتب‌های تابع است؛ تمام y هایی که تابع به ازای مقادیر دامنه‌ی خود تحویل می‌دهد...

◄ معمولاً اولین قدم برای پیدا کردن برد، به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع است. بعد ببینیم ضابطه در چه محدوده‌ای (به ازای این x ها) قرار می‌گیرد. (مثلاً ضابطه را از روی دامنه بسازیم...)

◄ **برد چند جمله‌ای‌ها:** برد تابع چند جمله‌ای درجه‌ی سه، برابر $\mathbb{R}$ و برای تابع درجه‌ی دو اینطوری است:

$$y=ax^2+bx+c \begin{cases} a>0 \rightarrow \text{برد}=[-\frac{\Delta}{4a},+\infty) \\ a<0 \rightarrow \text{برد}=(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}] \end{cases}$$

◄ برد تابع‌هایی به فرم $y=u^2\pm$□، $\sqrt{u}\pm$□ و $y=|u|\pm$□ متناظر است با فکر کردن به کمترین و بیشترین مقدار□ها، آخه u^2، $|u|$ و $\sqrt{u}$ همگی نامنفی‌اند...

◄ در تابع‌هایی که sin و cos حضور دارد از محدود بودن آن‌ها کمک بگیرید، آخه $\sin x\leq 1$ و $\cos x\leq 1-$. **ببین:** $y=2\sin x-1 \xrightarrow{\text{برد}} [-3,1]$

◄ برد تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ می‌شود $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$.

◄ یادتان باشد برد تابع، مجموعه‌ی حاصل از تصویر تابع روی محور y هاست.

پ) دو تابع f و g مساوی‌اند هرگاه وقتی دامنه‌شان را پیدا کردید **(بدون ساده کردن ضابطه)**، دامنه‌ی مساوی هم داشته باشند و **(در صورت ساده‌کردن ضابطه‌ها)** ضابطه‌های آن‌ها هم یکی باشد...

۳ تابع یک‌به‌یک

در مجموعه‌ی زوج مرتب‌های این تابع، نه x ای تکراری وجود دارد و نه y ای تکراری، مگر این‌که زوج مرتبی را تکراری نوشته باشید!

◄ هر خط موازی محور x ها و همچنین هر خط موازی محور y ها، نمودار تابع یک‌به‌یک را یا قطع نمی‌کند یا فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

◄ یکی از مطمئن‌ترین روش‌های بررسی یک‌به‌یک بودن تابع، رسم نمودار آن است...

◄ تابع چند ضابطه‌ای، درصورتی یک‌به‌یک است که هر ضابطه‌اش جداگانه یک‌به‌یک باشد و بُردهای ضابطه‌ها هم، اشتراک نداشته باشند.

الف) توابع یک‌به‌یک معروف: $y=ax+b$ ، $y=\sqrt{ax+b}$ ، $y=ax^2+b$ ، $y=\log_a(ax+b)$ با شرط $a\neq 0$ و تابع نمایی $y=a^{mx+b}$ با شرط $m\neq 0$.

ب) توابع غیریک‌به‌یک معروف: $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$، تابع ثابت $y=c$ ، $y=|ax+b|$ ، تابع جزءصحیح $y=[ax+b]$ و توابع مثلثاتی $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ و $y=\tan x$.

◄ برای تابع‌های غیریک‌به‌یک می‌توانید با ارائه‌ی محدوده‌ای برای x، کاری کنید که تابع در آن بازه یک‌به‌یک گردد؛ بهترین شیوه برای به‌دست آوردنِ این بازه معمولاً رسم تابع است...

۴ وارون تابع و ویژگی‌هایش

الف) مفاهیم مقدماتی تابع وارون: اگر جای مولفه‌ها را در زوج مرتب‌های تابع f عوض کنیم به وارون تابع می‌رسیم و چنانچه این وارون،خودش تابع باشد به آن تابع وارون می‌گوییم و نمادش هم f^{-1} است، پس **شرط وارون‌پذیری تابع f، یک‌به‌یک بودن آن است.**

◄ برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار f، کافی است نمودار تابع را نسبت به $y=x$ (نیمساز ناحیه‌های اول و سوم) قرینه کنید.

◄ اگر جای دامنه و برد را در f عوض کنید، دامنه و برد f^{-1} به‌دست می‌آید.

مدل ریاضی $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_{f^{-1}}=D_f$

ب) پیداکردن ضابطه‌ی تابع وارون:

در ضابطه‌ی تابع ابتدا جای x و y را عوض کنید و بعد سعی کنید y را بر حسب x پیدا کنید. **ببین:**

$$y=\frac{x+1}{x}\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=\frac{y+1}{y}\Rightarrow y+1=xy$$

$$\Rightarrow y(1-x)=-1\Rightarrow \underbrace{y=\frac{1}{x-1}}_{\text{ضابطه‌ی تابع وارون}}$$

◄ اگر برد تابع f محدود باشد، بعد از پیدا کردن ضابطه تابع وارون، در کنارش محدوده‌ی برد f را هم بنویسید...

نگاه‌کن: $y=1-\sqrt{x}\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=1-\sqrt{y}\xrightarrow{\text{توان ۲}}y=(x-1)^2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2\ ,\ \underbrace{x\leq 1}_{\text{برد f}}$$

روش تستی: اگر ضابطه‌ی تابع وارونِ f را خواسته باشند، در تابع f خودتان (که دارید) مقداری دلخواه به x داده و y را پیدا کنید؛ مثلاً $f(a)=b$ حالا گزینه‌ای درست است که اگر به x آن بدهیم b حاصل تابع بشود a؛ درست برعکس!

پ) وارون تابع درجه دو:

تابع $y=ax^2+bx+c$ وارون‌پذیر نیست. (چون یک‌به‌یک نیست) پس با ارائه محدوده‌ای مناسب وارون‌پذیر می‌شود که عبارت است از:

یک بازه‌ای قبل از $-\frac{b}{2a}$ یا بازه‌ای بعد از آن: بعد با روش مربع کامل کردن وارونش را پیدا کنید:

نگاه‌کن:

$$y=x^2-4x+1\ ,\ x>2\xrightarrow{\text{مربع کامل}}y=(x-2)^2-4+1=(x-2)^2-3$$

$$\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=(y-2)^2-3$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=x+3\xrightarrow{\text{جذر}}|y-2|=\sqrt{x+3}\xrightarrow[\text{برد وارون می‌شود } y>2]{x>2}$$

$$y-2=\sqrt{x+3}\Rightarrow y=\sqrt{x+3}+2$$

۵ عملیات جبری و ترکیب روی دو تابع

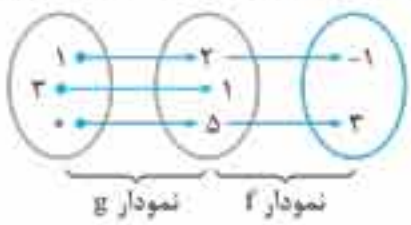
الف) دامنه و ضابطه:

$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D=D_f\cap D_g$
$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	
$f\cdot g$	$(fg)(x)=f(x)g(x)$	
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D=D_f\cap D_g\ ,\ g(x)\neq 0$
fog	$(fog)(x)=f(g(x))$	$D=\{x\mid x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$

◄ اگر دو تابع را به‌صورت زوج مرتب‌هایشان داشتید و خواستید عملیاتی روی آن‌ها انجام دهید، حواستان باشد اول دامنه‌ی تابع مطلوب را پیدا کنید و بعد روی x هایی که قابل قبول‌اند، فرمول ضابطه را اجرا کنید...

ب) fog: برای پیدا کردن fog، از روی اعضای f و g، تابع g را با نمایش پیکانی بنویسید، حالا نوبت f شده، آن را هم پیکانی می‌کشید ولی با این توجه که از مؤلفه‌های اول f فقط آن‌هایی را که در دایره‌ی دوم g هستند تصویر کنید و مابقی را بیخیال شوید! حالا مجموعه‌ی وسطی را نادیده بگیرید و هر فلش $b\to 0\to a$ را به‌صورت زوج (a,b) پیاده کنید. خودتان برای gof مدلسازی کنید...

ببین: $f=\{(2,-1),(5,3)\}$ ، $g=\{(1,2),(3,1),(0,5)\}$



$$\xrightarrow{\text{وسطی رو بیخیال شو}}fog=\{(1,-1),(0,3)\}$$

پ) از روی نمودار: اگر f و g را به‌صورت نمودارهایشان دارید، معمولاً بهتر است ضابطه‌ی f و g را (که معمولاً خط هستند یا خط شکسته) بنویسید و بعد عملیات خواسته‌شده را روی آن‌ها پیاده کنید...

◄ هر نمودار خط شکسته، حتماً تابعی چند ضابطه‌ای است که هر ضابطه‌اش معادله‌ی یک خط است...

ت) درباره‌ی تابع مرکب:

◄ **مقداریابی:** $(fog)(a)=f(g(a))$ و $(gof)(a)=g(f(a))$

از داخل حساب کن بیا بیرون!

◄ **اگر بدانیم عضوی در تابع مرکب وجود دارد:**

$$(a,b)\in fog\xrightarrow{\text{m را وارد کن}}(a,m)\in g\ ,\ (m,b)\in f$$

◄ **کار با ماشین تابع مرکب:**

خروجی را مساوی ضابطه‌ی دومی بگذارید و x قابل قبول را درآورید، حالا آن x را مساوی ضابطه‌ی اولی گذاشته و حل کنید، این‌طوری ورودی درمی‌آید...

◄ برای دامنه‌ی fog، دامنه‌ی f و g را پیدا کنید و بعد g(x) را در محدوده‌ی دامنه‌ی f بگذارید هرچه درآمد با دامنه‌ی g اشتراک بگیرید: $D_{fog} = \{x \mid x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$، برای gof خودت مدلسازی کن...

◄ اگر ضابطه‌ی f و fog را داشتید، f(g(x)) را تشکیل دهید (به جای تمام x ها در تابع f بنویسید g(x)) بعدش آن را مساوی داده‌ی سؤال قرار دهید، تنها مجهول، g(x) است که درمی‌آید.

◄ اگر ضابطه‌ی f و gof را داشتید، g(f(x)) را تشکیل دهید (جلوی g، ضابطه‌ی f را بنویسید) حالا عبارت داخل پرانتز را t بگیرید و x را بر حسب t پیدا کنید، در آخر در ضابطه‌ی gof به جای تمام x ها، عبارتی را که بر حسب t پیدا کرده‌اید، قرار دهید تا ضابطه‌ی g را بیابید.

ببین: $f(x) = 2x + 1$ و $(gof)(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g(2x+1) = x^2 - 1$

$\xrightarrow[x=\frac{t-1}{2}]{2x+1=t} g(t) = (\frac{t-1}{2})^2 - 1$

۶ ترکیب تابع با وارون خودش

الف) ضابطه‌ی هر دو تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$، همانی است، یعنی $(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$ اما دامنه‌ی متفاوت دارند:

$D_{fof^{-1}} = R_f$ ، $D_{f^{-1}of} = D_f$

◄ شرط تساوی $f^{-1}of = fof^{-1}$، این است که $D_f = R_f$ شود.

تابع‌های f و g وارون همدیگرند هرگاه $(fog)(x) = x$ و $(gof)(x) = x$ شود.

ب) **پخش شدن $^{-1}$ روی ترکیب:**

$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ ، $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

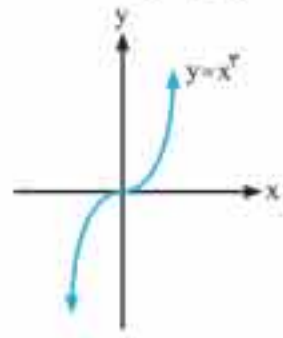
یعنی اگر نماد وارون روی پرانتزی که دو تابع ترکیب شده بودند، قرار داشت، به‌ترتیب برعکس روی هر دوی آن‌ها تأثیر می‌گذارد...

۷ توابع چندجمله‌ای

تابع‌هایی هستند که ضابطه‌شان یک چندجمله‌ای بر حسب x است، مثل $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$

الف) **شکل و ویژگی‌های $y = x^3$**، نمودار این تابع شبیه کلمه‌ی «لُر» است که روی مبدأ مختصات نشسته است!

◄ $y = x^3$، اکیداً صعودی، وارون‌پذیر (با تابع وارون $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$)، دامنه و بردش $\mathbb{R}$ بوده و نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.



◄ هر تابع درجه‌ی سه به فرم کلی $y = a(bx+c)^3 + d$ $(a,b \neq 0)$ با انتقال و کشش $y = x^3$ قابل رسم و بررسی است.

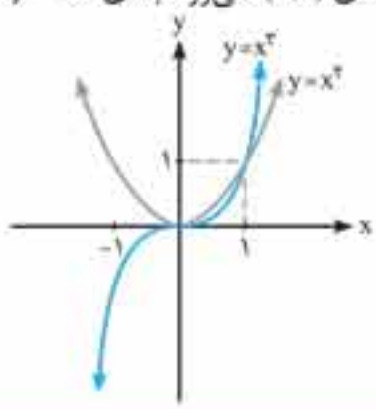
◄ اگر تابع درجه سومی داشتید که اتحاد مکعب دوجمله‌ای در آن دیده نمی‌شد، اول با اتحاد $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$، به فرم خانواده‌ی $y = x^3$ تبدیلش کنید (غیر از این در کنکور شما نمی‌آیدا)

ببین: $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 1 = (x+2)^3 - 7$

◄ اگر خواستید از روی نمودار تابع درجه سومی، پارامترهای ضابطه‌ی آن را پیدا کنید به نقطه‌های حساس تابع توجه کنید: **نقطه‌های برخورد با محورها، مرکز تقارن و نقطه‌ای داده شده توسط تست.**

ب) **ارتباط $y = x^3$ و $y = x^2$**

هر دو در نقطه‌ی (۱،۱) متقاطع و در مبدا مختصات (۰،۰) برهم مماس‌اند، اما $y = x^3$ در سمت راست مبدأ از زیر $y = x^2$ شروع به حرکت می‌کند و پس از رسیدن به نقطه‌ی (۱،۱) می‌رود بالای $y = x^2$...



۸ رسم تابع با انتقال و کشش

فرض می‌کنیم نمودار $y = f(x)$ را بلد باشید، خب حالا می‌توانید تابع‌های زیر را هم رسم کنید:

الف) $y = f(x) + a$ $(a > 0)$، نمودار f را a واحد بِبَر بالا. $y = f(x) + b$ $(b < 0)$، یعنی f را b واحد در راستای محور y ها بیار پایین.

ب) $y = f(x+a)$ $(a > 0)$، یعنی نمودار $y = f(x)$ را a واحد منتقل کن به چپ و $y = f(x+b)$ $(b < 0)$ به معنای انتقال دادن f در راستای محور x ها و به اندازه‌ی b واحد به راست است.

پ) $y = -f(x)$، نمودار تابع $y = f(x)$ را **نسبت به محور x ها** کلاً قرینه کن.

ت) $y = kf(x)$، بدون تغییر در دامنه‌ی $y = f(x)$، تابع در راستای محور y ها کشیده یا فشرده می‌شود $(k > 0)$: یادتان باشد همواره **نقطه‌ی (a , b) روی $y = f(x)$ بشود (a , kb)، یعنی در این حالت برد تابع k برابر می‌شود.**

ث) $y = f(kx)$، بدون تغییر در برد تابع، تابع در راستای محور x ها کشیده یا فشرده می‌شود $(k > 0)$: یادتان باشد همواره **نقطه‌ی (a , b) روی تابع $y = f(x)$ بشود $(\frac{a}{k}, b)$، یعنی در این حالت دامنه‌ی تابع بر k تقسیم می‌شود.**

ج) $y = |f(x)|$، یعنی قسمت‌های بالای محور x ها از تابع $y = f(x)$ را نگه‌دارید و قسمت‌های پایین محور x ها را (نسبت به محور x ها) قرینه کنید...

۹ توابع صعودی و نزولی

اگر I زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع f باشد و همچنین $x_1, x_2 \in I$ باشند، آن‌وقت:

الف)

f اکیداً صعودی	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$	رفتار زیاد شونده
f اکیداً نزولی	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$	رفتار کم شونده
f صعودی	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	زیاد می‌شود ولی نقاط هم عرض هم دارد
f نزولی	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	کم می‌شود ولی نقاط هم عرض هم دارد

ب) **ویژگی‌ها:**

◄ اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، به آن **اکیداً یکنوا** می‌گوییم و چنانچه صعودی یا نزولی باشد هم **یکنوا**.

◄ اگـر تابعی در فواصلی از دامنه‌ی خود صعودی و در فواصلی دیگر نزولی باشد، **غیریکنوا** نامیده می‌شود.

◄ معمولاً از راه رسـم تابع می‌توانید در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع‌ها اظهار نظر کنید: از سمت چپ شروع کنید به حرکت روی نمودار تابع؛ اگر همواره در حال بالا رفتن باشید اکیداً صعودی است و در حال پایین آمدن هم یعنی اکیداً نزولی و اگر جایی نقطه‌های هم عرض دیدید کلمه‌ی اکیداً را بردارید؛ اما اگر گاهی بالا می‌رود و گاهی پایین، این یعنی غیریکنوا، مثل $y=\sin x$.

◄ از بین تابع‌های معروف، $y=ax+b$، $y=a(x+b)^2+c$ و $y=\sqrt{ax+b}$ بـا شـرط $a>0$ **اکیـداً صعـودی** و $y=ax+b$، $y=a(x+b)^2+c$ و $y=\sqrt{ax+b}$ با شرط $a<0$ **اکیداً نزولی** هستند.

◄ تابـع $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ قبل از $x=-\frac{b}{2a}$ اکیداً نزولی و بعد از آن اکیداً صعودی است و برای حالت $a<0$ برعکس.

پ) عملیات روی تابع‌های صعودی و نزولی

اگر r عددی مثبت و s عددی منفی بوده و o هم علامت ترکیب توابع، آن‌وقت:

◄
- rf صعودی $\Rightarrow f$ صعودی
- rf نزولی $\Rightarrow f$ نزولی

◄
- sf نزولی $\Rightarrow f$ صعودی
- sf صعودی $\Rightarrow f$ نزولی

◄
- صعودی + صعودی = صعودی
- نزولی + نزولی = نزولی

◄
- صعودی o صعودی = صعودی
- نزولی o نزولی = صعودی
- نزولی o صعودی = نزولی

ت) کاربردهای تابع وارون و صعودی، نزولی

◄ برخورد f و f^{-1}: اگر تابع f اکیداً صعودی باشـد محل برخورد f، f^{-1} (در صورت وجود) روی خط $y=x$ است، پس به جای قطع دادنِ f و f^{-1} در این حالت، f را با $y=x$ قطع دهید...

◄ در توابع اکیداً یکنوا، کافی است اول و آخر دامنه را به تابع بدهید تا اول و آخر برد در بیاید...

◄
- اگر f اکیداً صعودی باشد، f^{-1} هم اکیداً صعودی است.
- اگر f اکیداً نزولی باشد، f^{-1} هم اکیداً نزولی است.

آزمون ۲۲ منطبق بر کتاب درسی

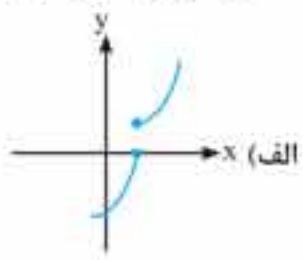
⏱ ۲۰ دقیقه — %

تابع	ریاضی ۱	ریاضی ۲	ریاضی ۳
	صفحه‌های ۹۴ تا ۱۱۷	صفحه‌های ۴۷ تا ۷۰	صفحه‌های ۱ تا ۳۰

۱. اگر $f(x)=3x^2+x-1$ و $g(x)=1-2x$ باشد، معادله‌ی $(gof)(x)=-5$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲. چند مورد از موارد زیر نشان‌دهنده‌ی یک تابع است؟

الف)


ب) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

پ) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز دوستان او را نسبت می‌دهد.

ت) رابطه‌ای که به هر عدد ریشه‌ی دوم آن را نسبت می‌دهد.

ث) رابطه‌ای که به هر عدد ریشه‌ی سوم آن را نسبت می‌دهد.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۳. تابع $f(x)=x^2+4x+3$ درچه بازه‌ای یک‌به‌یک است و ضابطه‌ی تابع وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}-2, [-2,+\infty)$
۲) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2, [2,+\infty)$
۳) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}-2, (-\infty,-2]$
۴) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2, (-\infty,2]$

۴. نمودار تابع خطی $f(x)$ از نقاط $(3,4)$ و $(1,0)$ می‌گذرد. $(f(-1))^2+2f(-4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{-7}{4}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵. اگر تابع f در بازه‌ی اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{f(|x+1|)-f(|x-2|)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-2]$ ۲) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۳) $[-2,+\infty)$ ۴) $[-\frac{1}{2},+\infty)$

۶. یک تانکر گاز از یک اسـتوانه و دو نیم‌کره به شـعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد و حجم تانکر را بر حسب r به‌صورت $V(r)=2\pi r^2 f(r)$ بنویسیم، $f(3)$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۵ ۳) ۳۳ ۴) ۱۷

۷. تابع $f(x)=۲-\frac{۱}{x-۱}$ با کدام‌یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $y=\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲-x}$ ۲) $y=\frac{۴x^۲-۹}{۲x^۲+x-۳}$ ۳) $y=\frac{۲x^۲+x-۳}{(x-۱)^۲}$ ۴) $y=\frac{۲x^۲-۵x+۳}{(x-۱)^۲}$

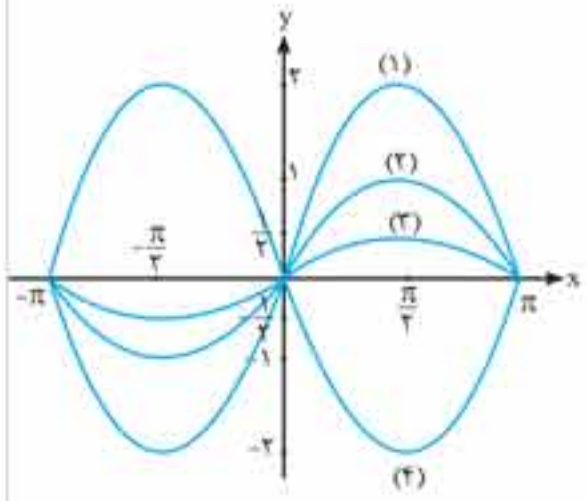
۸. اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\sin x$ باشد، آن‌گاه D_{gof} کدام است؟

۱) $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ ۲) $[-۲\pi,-\pi]$ ۳) $[\pi,۲\pi]$ ۴) $[-۲\pi,-\frac{\pi}{۲}]$

۹. اگر $D_f=[-۴,۲]$ و $R_f=[-۳,۰]$ باشد، مساحت ناحیه‌ی محدود به $y=fof^{-۱}(x)$ و محور xها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۱۰. در شکل روبه‌رو نمودار توابع $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودارهای $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ به‌ترتیب در کدام گزینه آمده است؟



۱) (۴)، (۲)
۲) (۳)، (۲)
۳) (۴)، (۳)
۴) (۲)، (۱)

آزمون ۲۳ شبیه‌ساز کنکور

۲۰ دقیقه — %

۱. اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد به‌طوری که $f(۴)=g(۱)-f(۳)g(۱)$ و $f(۱)g^۲(۱)$ باشد، آن‌گاه $g(۵)$ کدام است؟

۱) -۱ یا ۴ ۲) ۱ یا -۴ ۳) -۱ یا ۱ ۴) ۴ یا -۴

۲. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۳. نمودار تابع $y=x^۲$ را ۳ واحد به سمت xهای منفی و ۲ واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. معادله‌ی منحنی حاصل کدام است؟

۱) $y=x^۲+۶x+۱۱$ ۲) $y=x^۲-۶x+۱۱$ ۳) $y=x^۲+۶x+۷$ ۴) $y=x^۲-۶x+۷$

۴. اگر جزء صحیح عبارت $x^۲+x$ برابر ۱- باشد، حاصل $[x^۲]+[x]^۲-[x]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۵. هرگاه تابع $f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x<a\\ x^۳+۱ & x\geq a\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $[-۲,+\infty)$ ۲) $[-۲,+\infty)-\{۱\}$ ۳) $(-۲,+\infty)$ ۴) $(-۲,+\infty)-\{۱\}$

۶. اگر $f=\{(-۱,۱),(۱,-۲),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۱,-۱),(-۲,۱),(۰,۴)\}$، تابع $f^۲og$ کدام است؟

۱) $\{(۱,۱),(۲,۴)\}$ ۲) $\{(۱,۱),(-۲,۴)\}$ ۳) $\{(۱,۱),(-۲,۴),(۴,۲)\}$ ۴) $\{(۱,۱),(۲,۴),(-۲,۴)\}$

۷. اگر $f(x)=۳x^۲-x-۲$ و $g(\frac{۱}{x})=\frac{۲-۳x}{x}$، آن‌گاه ریشه یا ریشه‌های معادله‌ی $(fog)(x)=۰$ کدام است؟

۱) ۲ و $\frac{۷}{۶}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۸. اگر تابع $f=\{(-۲,m^۲-۴),(۵,۴m-۱),(۳,۳m)\}$ صعودی باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-۱\leq m\leq ۴$ ۲) $۱\leq m\leq ۴$ ۳) $m\leq ۱$ ۴) $m\geq ۴$

۹. اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$ و $(fog)(x)=x^۲-۴x+۵$ باشد، در اینصورت $(gof)(-۲)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۹ ۳) ۷ ۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۱۰. تابع با ضابطه‌ی $y=x|x-۲|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟ (کنکور ۹۴)

۱) $x<۰$; $۱-\sqrt{۱+x}$ ۲) $x<۱$; $۱-\sqrt{۱-x}$ ۳) $۰<x<۱$; $۱+\sqrt{۱-x}$ ۴) $۰<x<۱$; $۱-\sqrt{۱-x}$

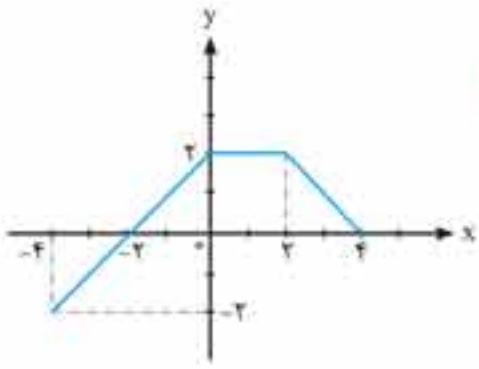
آزمون ۲۴ شبیه‌ساز کنکور

۲۰ دقیقه

۱. اگر f تابعی ثابت بوده و $f(۲)=۵$ و تابع $g=\{(۵,a-۱),(-۱,-۱),(\frac{b}{۳},۲)\}$، همانی باشد، حاصل $f(b-۲)+g(\frac{a}{۳})$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۸

۲. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و $g(x)=۲f(\frac{۱}{۲}x)$. اگر دامنه و برد تابع g را به‌ترتیب با D_g و R_g نشان دهیم، آن‌گاه مجموعه‌ی D_g-R_g شامل چند عدد صحیح است؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۴
۴) ۸

۳. به ازای چند مقدار a دو تابع $f(x)=a^۳-a+۲$ و $g(x)=\frac{۲x^۲+۲x-۲a}{x^۲+x-a}$ با هم مساوی هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴. اگر $f(x)=۳\sqrt{۴-x}$ و $g(x)=\log_{\sqrt{۳}}(x^۲+۸x)$، دامنه‌ی تعریف تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۵. اگر $f(x)=۲x+۲a$، $g(x)=x^۲+bx+c$ و $(fog)(x)=۲x^۲+x+۱$ باشند، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۳-

۶. اگر f تابعی اکیداً صعودی روی $\mathbb{R}$ و $f(a)=۰$ و $f(b)=۱$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $g(x)=\sqrt{\log_{\frac{۱}{۲}}f(x)}$ کدام گزینه خواهد بود؟ (a کوچک‌تر از b است.)

۱) $(۰,b]$ ۲) $(a,b]$ ۳) $(a,+\infty)$ ۴) $[a,b)$

۷. اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})$ باشد، حاصل $f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})$ کدام است؟ (کنکور ۹۵)

۱) $۲x$ ۲) $\frac{۲}{x}$ ۳) $x^۲-۱$ ۴) صفر

۸. دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟ (کنکور ۹۰)

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$ ۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$ ۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$ ۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

۹. اگر $f(x)=g(۲x+۵)$ و $g^{-۱}(x)=\sqrt[۵]{۸x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۰. اگر $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، تابع $f(\sqrt{x})^۲-f(x)$ چگونه است؟ (خارج ۹۱)

۱) ثابت ۲) همانی ۳) یک‌به‌یک ۴) خطی

آزمون ۲۵ یک گام فراتر از کنکور

۲۰ دقیقه

۱. اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}$، $g(x)=\sqrt{x^۲+۴}$ و $۰<a<۱$ باشد، حاصل $f(a+\frac{۱}{a})+g(a-\frac{۱}{a})$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $\frac{۲}{a}$ ۳) $\frac{a}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{a}$

۲. منحنی تابع وارون تابع $f(x)=-(x+۲)^۴-۲$، آن را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) قطع نمی‌کند. ۴) ۳

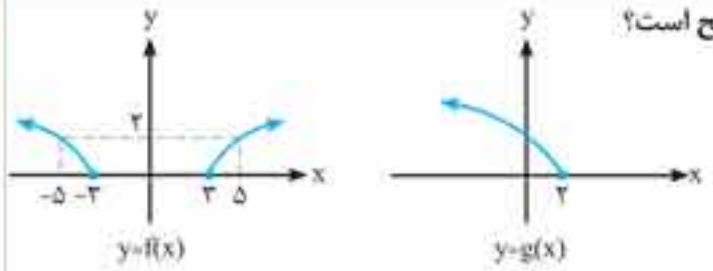
۳. ضابطه‌ی معکوس تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$، به کدام صورت است؟

۱) $y=x\sqrt{|x|}\ ;\ x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=x\sqrt{|x|}\ ;\ x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$

۴. کدام تابع یک‌به‌یک است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=x-[\frac{x}{۳}]$ ۲) $y=x+[-\frac{x}{۳}]$ ۳) $y=x-[-\frac{x}{۳}]$ ۴) $y=x-\sqrt{x}$

۵. اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع gof ، شامل چند عدد صحیح است؟

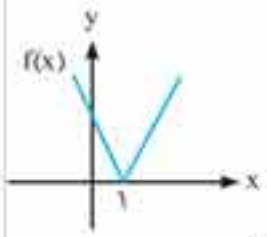


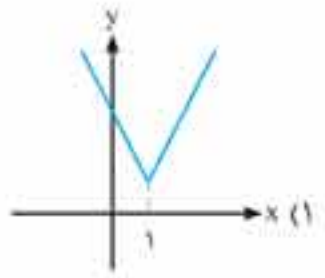
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

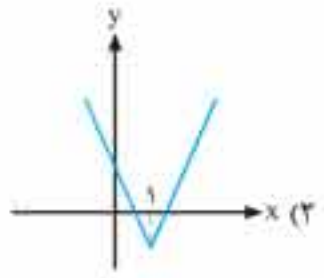
۶. اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{f(|x-۲|)-f(|۲x-۱|)}$ کدام است؟

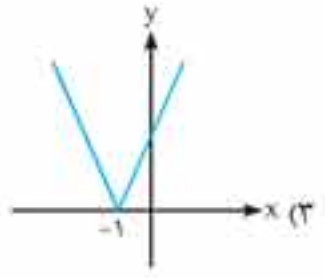
۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$

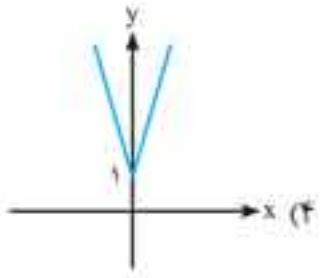
۷. شکل روبه‌رو نمایش هندسی تابع $f(x)$ است. هرگاه $g(x)=۲x+۱$ باشد، آن‌گاه نمایش تابع $y=۱+(fog)(x)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۸. هرگاه $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و داشته باشیم $gof=fo(\frac{۱}{f})$ ، آن‌گاه ضابطه‌ی $g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳+x}{۳-x}$ ۲) $\frac{۲+x}{۱-x}$ ۳) $\frac{۱+x}{۱-x}$ ۴) $\frac{۲+x}{۳-x}$

۹. توابع $f(x)=۵-\sqrt{۲x-۶}$ و $g(x)=(fof^{-۱})(x)+(f^{-۱}of)(x)$ مفروض‌اند. نمودار تابع $g(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ به شکل یک پاره‌خط است. بیشترین مقدار طول این پاره‌خط کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۰. اگر f تابعی پیوسته و اکیداً نزولی روی $\mathbb{R}$ ، g تابعی پیوسته و اکیداً صعودی روی $\mathbb{R}$ و $f(۱)=g(-۱)=۰$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{\frac{(x+۲)g(x)}{(x-۲)f(x)}}$ کدام است؟

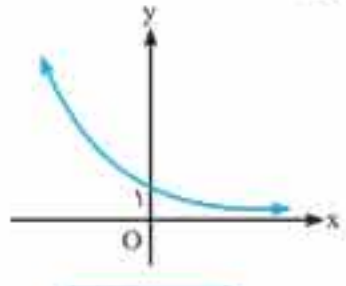
۱) $[-۲,۲]-(-۱,۱)$ ۲) $[-۲,۲)-(-۱,۱]$ ۳) $(-۲,۲)-(-۱,۱)$ ۴) $[-۲,۲)-[-۱,۱)$

فصل نهم: توابع نمایی و لگاریتمی

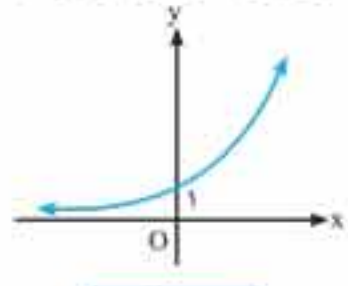
۱ تابع نمایی و ویژگی‌هایش

الف) تابع با ضابطه‌ی کلی $y=a^x$ که در آن a، عددی مثبت و مخالف ۱ باشد را تابع نمایی می‌گوییم؛ دامنه‌ی تابع، $\mathbb{R}$ و بُردش اعداد حقیقی مثبت است.

◂ تابع نمایی $y=a^x$ ، اگر $a>۱$ باشد تابع اکیداً صعودی و با شرط $۰<a<۱$، اکیداً نزولی بوده و نمودارشان هم این‌طوری است:



$y=a^x$ ، $۰<a<۱$



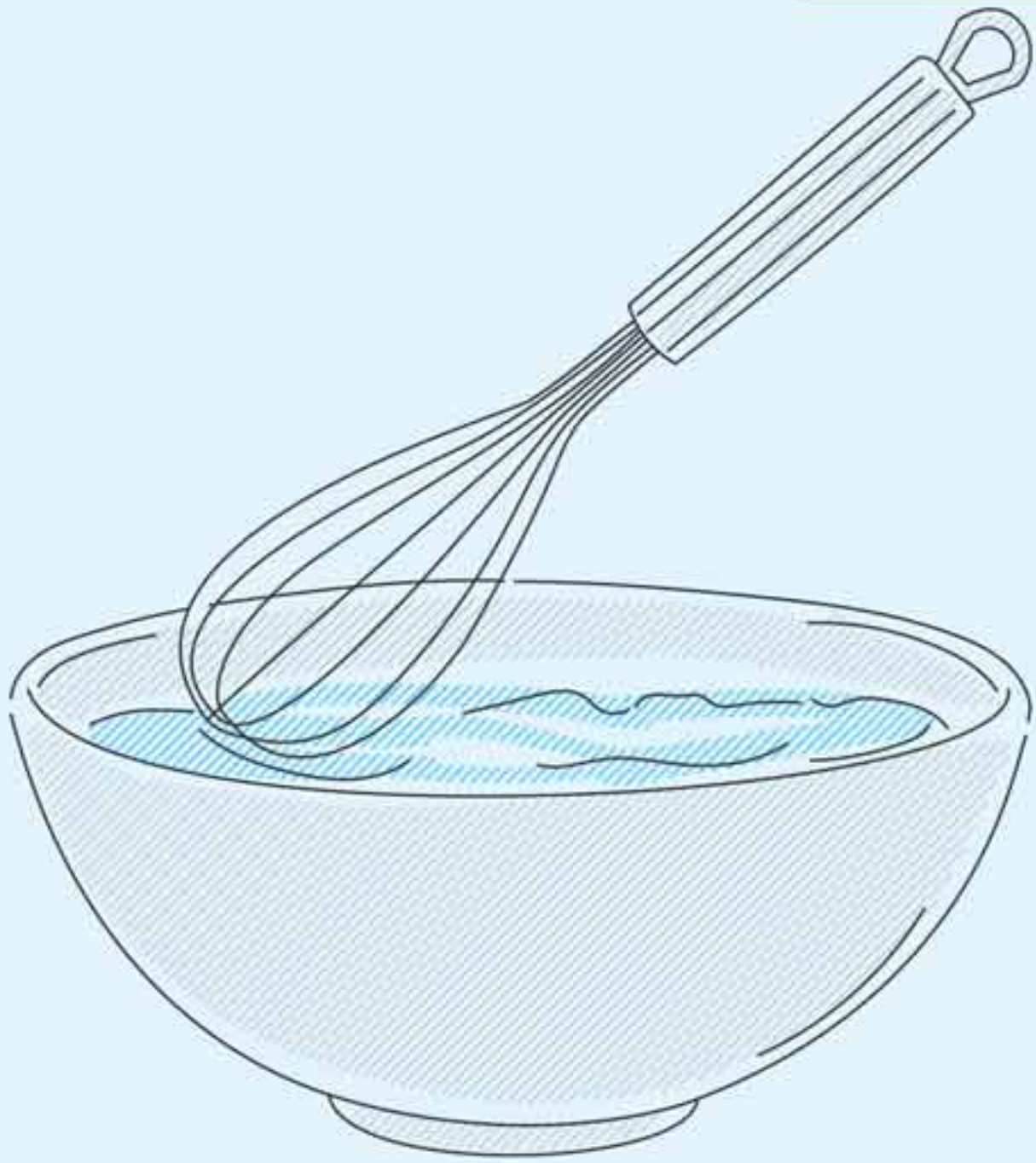
$y=a^x$ ، $a>۱$

◂ تابع $y=a^x$ محور x ها را قطع نمی‌کند و منفی هم نمی‌شود، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هم هست؛ $a^x>۰$ $(a>۰, a\neq ۱)$

ب) **مقایسه‌ی رشد تابع‌های نمایی با هم:** فرض کنید بخواهیم $y=a^x$ و $y=b^x$ را مقایسه کنیم، به‌طوری که $(a,b>۱)$ و یا (a و b هر دو بین صفر و یک) باشند، خب در سمت راست محور y ها (برای x های مثبت) تابعی که پایه‌ی بزرگ‌تری دارد در بالاتر قرار می‌گیرد و در سمت چپ محور y ها (برای x های منفی) تابع با پایه‌ی بزرگ‌تر می‌رود پایین‌تر و البته هر دو در نقطه‌ی $(۰,۱)$ متقاطع‌اند...

ب) **مقایسه‌ی عددهای هم‌پایه:** برای $a>۱$، همواره: $x>y \Leftrightarrow a^x>a^y$ و برای $۰<b<۱$ هم: $x>y \Leftrightarrow b^x<b^y$ وقتی پایه از ۱ بیشتر است؛ توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد و برای پایه‌ی بین صفر و ۱ برعکسه...!

بخش ۲



آزمون‌های ترکیبی

در این بخش شما را آماده می‌کنیم برای آزمون‌های آزمایشی کشوری!
ما مطابق با برنامه‌ی آزمون‌های قلم‌چی و گزینه دو (که بیشترین جامعه‌ی آماری شرکت‌کننده را در مجموع به خود اختصاص می‌دهند)، آزمون‌هایی طراحی کرده‌ایم برای جمع‌بندی و یادگیری‌تان... کافی است تمام آزمون‌های ترکیبی را حل کنید تا هم آماده‌ی آزمون‌های آزمایشی‌تان باشید و هم در آخرِ کار، تمام ریاضیِ کنکورتان را با برنامه‌ی منطقی پوشش داده باشید.
آزمون‌های موجود در این بخش از موضوعاتی تشکیل شده‌اند که برنامه‌شان را در بالای آزمون می‌بینید؛ از ریاضی ۱، ۲ و ۳. مهم‌ترین بخش این کتاب، جمع‌بندی مطالب ریاضی تجربی در قالب آزمون‌های ترکیبی است...
زمان حل تست‌های این آزمون‌ها قبل از آزمون‌های آزمایشیِ مرحله‌ای است و خب البته اگر زمانی بخواهید در قالب جمع‌بندیِ کل ریاضی‌تان آزمون‌هایی را حل کنید...
آزمون‌هایی با برنامه، پوشش‌دهنده، ترکیبی، منظم و پویا مطابق آزمون‌های آزمایشی کشوری؛ جمع‌بندیِ حرفه‌ای...

مهروماه

آزمون ۶۱ منطبق بر آزمون اول قلم‌چی

۳۰ دقیقه

مبحث	ریاضی ۱	ریاضی ۲	ریاضی ۳
	صفحه‌های ۲ تا ۲۷ و صفحه‌های ۹۴ تا ۱۱۷	صفحه‌های ۴۷ تا ۵۶	صفحه‌های ۱ تا ۱۰

۱. هرگاه تابع $f=\{(۰,۴),(۳,m^۲-۳m),(-۱,m^۲),(۵,۱۰)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-۲<m<-۱$ ۲) $-۲<m<۲$ ۳) $-۲<m<۵$ ۴) $۴<m<۵$

۲. نمودار تابع $y=x^۳+۳x^۲+۳x$ از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) دوم و چهارم ۲) اول و سوم ۳) چهارم ۴) دوم

۳. کدام گزینه در مورد $x^۳-۲=\frac{۱}{x}$ درست است؟

۱) فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد. ۲) فقط یک ریشه‌ی منفی دارد. ۳) دو ریشه‌ی مثبت دارد. ۴) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

۴. تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۴}+m & x\geq ۰\\ ۲x-۱ & x<۰\end{cases}$، به ازای چه مقادیری از m صعودی است؟

۱) $m\geq ۰$ ۲) $m\geq -۳$ ۳) $m\geq -۲$ ۴) $m\geq -۱$

۵. اگر f تابعی نزولی و دامنه‌ی آن $[۰,+\infty)$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x^۲-x)-f(۳x+۵)}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۵]$ ۲) $[۰,۵]$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[-۵,۱]$

۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۲(x^{n+۱}-۳)+۴$، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی ۶ است. اگر $f(-۱)=۲$ باشد، حاصل $f(۲)$ کدام است؟

۱) -۴۸ ۲) ۸۰ ۳) ۵۶ ۴) -۳۸

۷. تابع $f(x)=|x+a|-۱$ در بازه‌ی $[-۳,۲]$ یکنواست، حدود a کدام است؟

۱) $[-۲,۳]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-(-۲,۳)$ ۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۸. چه تعداد از جملات زیر درست است؟

الف) نمودار تابع $y=x^۲$ در بازه‌ی $(-\infty,۱)$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^۳$ است.

ب) نمودار تابع $y=x^۳$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^۲$ است.

پ) توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$ در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ هر دو اکیداً صعودی هستند.

ت) توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$ هر دو یک‌به‌یک هستند.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۹. تابع $f(x)=۲x^۲-۴x+۵$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[-۲,۲)$ ۳) $(-\infty,-۱]$ ۴) $(-\infty,۲]$

۱۰. کدام تابع زیر در دامنه‌ی خود، تابعی نزولی است؟

۱) $y=۲^{x+۱}$ ۲) $y=x^۳-۱$ ۳) $y=\log_۲ x$ ۴) $y=-\sqrt{x+۱}$

۱۱. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{W}\subseteq\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{W}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{۰\}$ ۴) $(\mathbb{Q}-\mathbb{Q}')\cap\mathbb{R}=\mathbb{Q}$

۱۲. در کلاسی ۱۸ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۰ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند. اگر ۳ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ تیمی نباشند، کدام نادرست است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۱۱ نفر فقط عضو تیم فوتبال‌اند. ۲) ۲۴ نفر فقط عضو یک تیم هستند.

۳) ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال نیستند. ۴) ۲۷ نفر حداکثر عضو یک تیم هستند.

۱۳. جمله‌ی هشتم یک دنباله‌ی حسابی ۶ واحد از جمله‌ی چهارم آن بیشتر است و مجذور جمله‌ی نهم، ۱۷۱ واحد از مجذور جمله‌ی سوم بیشتر است. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۱۴. در یک دنباله‌ی حسابی، نسبت جمله‌ی ششم به جمله‌ی سوم $-\frac{۱}{۲}$ است. جمله‌ی چندم این دنباله برابر صفر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

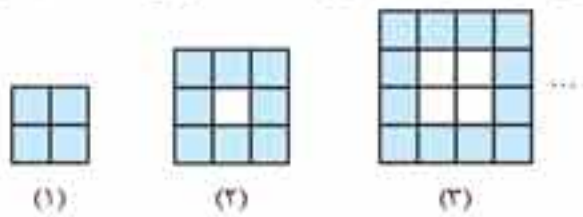
۱۵. در یک دنباله‌ی هندسی صعودی، جمله‌ی نهم، ۹ برابر جمله‌ی پنجم است. اگر تفاضل این جمله‌ها ۱۴۴ باشد، جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۱۶. اعداد ۳^a، $۳\sqrt{۳}$، ۹ و b جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند. واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $a\sqrt{۳}$ و b کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۹

۱۷. در الگوی شکل زیر، جملات دنباله‌ی a_n، تعداد مربع‌های رنگی را در هر مرحله نمایش می‌دهد. کدام گزینه در مورد دنباله‌ی a_n درست است؟

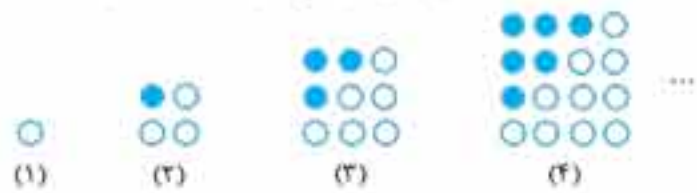


۱) a_n یک دنباله‌ی خطی و $a_{۲۵۰} = ۱۰۰۰$ است.
۲) a_n یک دنباله‌ی غیرخطی و $a_{۲۵۰} = ۱۰۰۰$ است.
۳) a_n یک دنباله‌ی خطی و $a_{۱۵۰} = ۵۰۰$ است.
۴) a_n یک دنباله‌ی غیرخطی و $a_{۱۵۰} = ۵۰۰$ است.

۱۸. در یک دنباله‌ی حسابی غیرثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند به‌ترتیب سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی صفر است؟

۱) نهم ۲) دهم ۳) یازدهم ۴) دوازدهم

۱۹. در الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های توپر شکل دوازدهم از تعداد دایره‌های توخالی آن چندتا کمتر است؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) ۱۲ ۲) ۶۶ ۳) ۳۶ ۴) ۷۸

۲۰. اگر $a_n = (m-۲)n^۲ + mn + ۷$ جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $b_n = a_۴n - ۱۴m$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۶۲ منطبق بر آزمون اول گزینه دو

۴۰ دقیقه

منابع	ریاضی ۱	ریاضی ۲	ریاضی ۳
	فصل‌های ۴ و ۵	فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳	فصل ۱، درس ۱ و ۲ تا ابتدای تبدیل نمودار توابع (صفحه‌ی ۱۵)

۱. هرگاه رابطه‌ی $f = \{(۱,-۱), (۲,۴), (۲, a^۲ - ۳a), (a+۲, ۳), (a-۱, ۵), (۳, b)\}$ یک تابع را مشخص کند، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

۱) $(-۱, ۳)$ ۲) $(۴, ۵)$ ۳) $(-۴, ۵)$ ۴) $(۱, ۳)$

۲. اگر نمودار تابع $y = (m-۲)x^۲ - ۴x + m + ۱$ همواره زیر محور xها قرار داشته باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $m < ۲$ ۲) $m < -۲$ ۳) $-۲ < m < ۳$ ۴) $-۲ < m < ۲$

۳. اگر f یک تابع خطی باشد، به‌طوری که $f(-۱) + f(۲) = ۸$ و $f(۱) = ۳$، آن‌گاه نمودار تابع f با محورهای مختصات چه سطحی را تشکیل می‌دهد؟

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۴. اگر f تابع همانی و g تابعی ثابت باشد و داشته باشیم $\frac{۳f^۲(۱) - ۴g(۳)}{۲f(۲)+۱} = ۳$، آن‌گاه مقدار $g(۰)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۵. در یک لوزی مجموع طول قطر بزرگ و کوچک آن ۶ واحد است. اگر مساحت لوزی $\frac{۲۷}{۸}$ واحد مربع باشد، اندازه‌ی محیط آن کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۱۰}$ ۳) $۳\sqrt{۱۰}$ ۴) $۶\sqrt{۵}$

۶. اگر تابع $f = \{(-۱,۳), (۰,۵), (۱,a)\}$، تابعی خطی و $g = \{(-۱, b), (c, ۴), (۲, ۲)\}$ تابع همانی باشد، دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{ax + bc}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -\frac{۳}{۲}]$ ۲) $(-\infty, -\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[\frac{۷}{۴}, +\infty)$ ۴) $[\frac{۴}{۷}, +\infty)$

۷. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۳x^۲ - x - ۱ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha\beta^۳ + \alpha^۳\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۱۰۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۷}$ ۳) $-\frac{۷}{۲۷}$ ۴) $-\frac{۲۵}{۱۰۸}$

۸. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{۱}{x-۲} = \frac{۵}{x^۲+۲x+۴} - \frac{۶}{x^۳-۸}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۷ ۳) -۷ ۴) -۱۲

۹. معادله‌ی $x^۲ - ۲x + \sqrt{x-۱} = ۱-$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰. به ازای چند مقدار صحیح m، معادله‌ی $(m-۳)x^۴ - ۴x^۲ + m = ۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱. به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $f(x) = (m-۴)x^۲ - ۶x + m + ۷$ هیچ‌گاه بالاتر از خط $y = ۳$ قرار نمی‌گیرد؟

۱) $m < ۴$ ۲) $-۵ \le m < ۴$ ۳) $m \le -۵$ ۴) $۴ < m \le ۵$

۱۲. کدام گزینه در مورد تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|x| = x^۳ - ۱$ درست است؟

۱) فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد. ۲) فقط یک ریشه‌ی منفی دارد.

۳) دو ریشه‌ی مثبت دارد. ۴) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

۱۳. نمودار تابع $y = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۱۰$ از کدام ناحیه‌های دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) فقط دوم ۲) فقط چهارم ۳) دوم و چهارم ۴) اول و سوم

۱۴. هرگاه $f(x) = \sqrt{x-۲}$ و $g(x) = |\frac{۲x-۴}{x+۳}|$ باشند، دامنه‌ی تابع $fog(x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ ۳) $(-\infty, -\frac{۱}{۲}] - \{-۳\}$ ۴) $(-\infty, -۲]$

۱۵. هرگاه $f = \{(۲,۶), (-۱,۴), (۳,۳), (-۲,۵)\}$ و $g = \{(-۲,۳), (۲,-۱), (۴,-۲), (۱,۰)\}$ باشند، آن‌گاه تابع $\frac{f+g}{fog}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶. توابع $f(x) = x^۲ - x + ۵$ و $g(x) = \frac{۲x}{x^۲+۱}$ مفروض است. معادله‌ی $gof(x) = ۱$ چند ریشه دارد؟

۱) فاقد ریشه است. ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷. هرگاه $f(x) = \sqrt[۳]{x+۱}$ و $gof(x) = \frac{۲x}{x^۳+۱}$ باشند، آن‌گاه تابع $g(x+۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۳}{x^۶+۱}$ ۲) $\frac{۲x^۳}{x^۹+۱}$ ۳) $\frac{x^۳}{x^۹+۱}$ ۴) $\frac{۲x^۳}{x^۶+۱}$

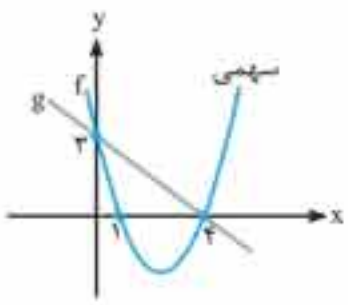
۱۸. تابع $y = \cos x$ در کدام بازه‌ی زیر صعودی است؟

۱) $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ ۲) $(۰, \pi)$ ۳) $(\pi, \frac{۷\pi}{۴})$ ۴) $(-\frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳})$

۱۹. اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[۰, ۳۲]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = f(۲x^۲)$ کدام است؟

۱) $[۰, ۴]$ ۲) $[-۴, ۴]$ ۳) $[۰, ۲۰۴۸]$ ۴) $[-۴, ۰]$

۲۰. شکل مقابل نمودار تابع f و g را نمایش می‌دهد. حاصل $fog(۶)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۱۶۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶۵}{۱۶}$

۲۱. کدام گزینه‌ی زیر نادرست است؟

۱) در بازه‌ی $(۰, ۱)$ نمودار تابع $y = x^۲$ از نمودار تابع $y = x^۳$ بالاتر است.

۲) تابع $y = \sqrt{-x} - \sqrt{x+۱}$ نزولی است.

۳) تابع $f(x) = \begin{cases} ۲ & ۰ \le x < ۲ \\ ۳x-۴ & x \ge ۲ \end{cases}$، در بازه‌ی $[۰, ۲]$ ثابت است.

۴) هرگاه f و g توابعی نزولی باشند، تابع fog نیز نزولی است.

۲۲. اگر تابع $y = -۲x^۲ + ۸x - ۳$ در بازه‌ی $(-\infty, a)$ اکیداً صعودی باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

۲۳. به ازای چه مقادیری از m، تابع $f = \{(۳,۸), (۱,m+۶), (-۱,m^۲), (۱۰,m^۲-۳m-۲)\}$ اکیداً نزولی است؟

۱) $m > ۳$ ۲) $-۲ < m < ۳$ ۳) $۳ < m < ۵$ ۴) $-۲ < m < ۵$

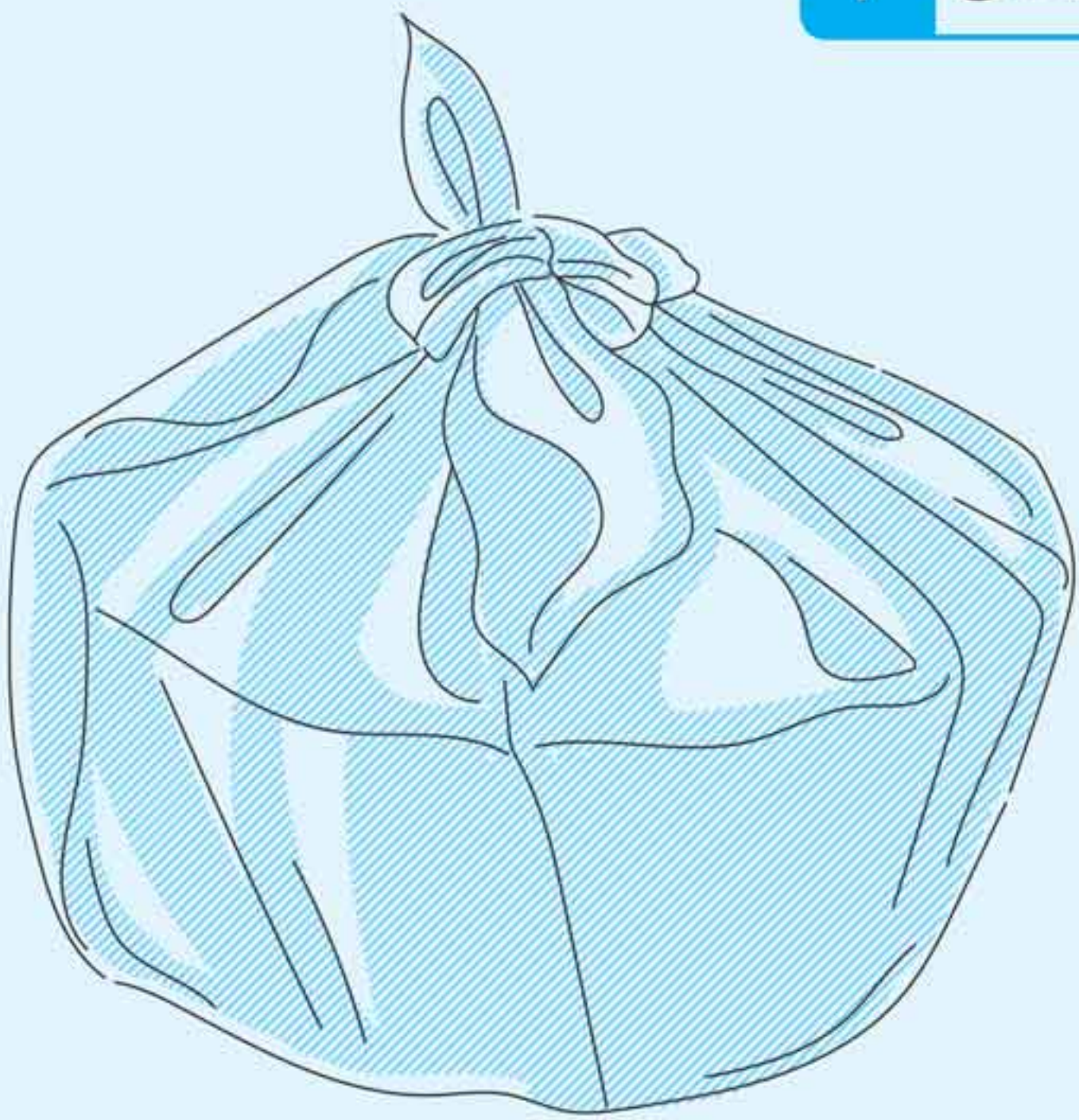
۲۴. هرگاه f تابعی اکیداً صعودی و دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{f(x^۲-۲x) - f(۳x-x^۲-۲)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵. ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۳x - ۷ = ۰$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲ - x - ۱۶ = ۰$ ۲) $x^۲ + x - ۱۶ = ۰$ ۳) $x^۲ + ۵x - ۱۰ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۵x - ۱۰ = ۰$

بخش ۳



آزمون‌های جامع

در این بخش آزمون‌هایی کلی خواهید داشت از تمام مباحث و فصل‌های ریاضیِ تجربی کنکور! کاملاً مشابهِ کنکور سراسری؛ چه از لحاظ تعداد سؤال و زمان پاسخ‌گویی و چه از لحاظ ترتیب، سطح و استاندارد بودنِ تست‌ها...

ما مؤلفان کتاب بر مبنای سال‌ها تجربه‌ی طرح سؤال برای آزمون‌های آزمایشی کشور، آزمون‌هایی جامع برایتان طرح کرده‌ایم مطابق با نظام و کتاب درسی جدید و با دیدگاه طراحان کنکور سراسری...

زمان حل این تست‌ها در دوران جمع‌بندی و نزدیک به زمانِ کنکور سراسری است. توصیه می‌کنیم زمانی سراغ این بخش بیایید که حتماً آزمون‌های ترکیبی و تفکیکی را پشت سر گذاشته باشید، هم حل و هم تحلیلِ پاسخ‌هایتان...

آزمون‌هایی کلی، شبیه‌ساز کنکور سراسری برای دوران طلایی جمع‌بندی و روزهای آخر، پیش‌بینی تست‌های کنکورتان...

مهروماه

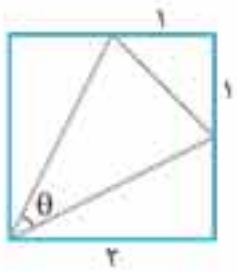
آزمون ۹۷ آزمون جامع مطابق با کنکور سراسری

۵۰ دقیقه — %

۱. در یک دنباله‌ی هندسی حاصل‌ضرب جملات اول و پنجم برابر $\frac{۶۴}{۹}$ و مجموع جملات سوم و چهارم برابر ۱۶ است. اگر جمله‌ی اول این دنباله منفی باشد، قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) -۶

۲. با توجه به مربع بودن شکل مقابل، حاصل $\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳. حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۶]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $۳\le\left|۲-\frac{۲x^۲+۱۱x+۵}{x+۵}\right|$ به‌صورت بازه‌ی $[a,b]$ است. نقطه‌ی وسط این بازه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

۵. اگر $۱=|x-۲|$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-۳|+|x-۴|$ و $g(x)=۲x^۲+x-۱۷$، در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

۶. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که مجموع ارقام آن مضرب ۴ باشند؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۶

۷. دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد روشده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۸. اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a برابر ۱۳ باشد، میانه‌ی آن‌ها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۹. سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: ۲y-x=۳$، $AC: y-۲x=۵$ و $BC: ۲y+۳x=۶$ مفروض‌اند. خط گذرنده از ارتفاع AH در این مثلث محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۶}$

۱۰. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+(m-۲)x+m+۱=۰$، دو ریشه‌ی حقیقی مثبت دارد؟

۱) $-۱<m<۰$ ۲) $m<۰$ ۳) $۲<m<۸$ ۴) $m>۸$

۱۱. در ذوزنقه‌ی ABCD، قاعده‌ی بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعده‌ی کوچک است و $AF=\frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۲. هرگاه $f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۲-۳x+۲}$ و $g(x)=\frac{۴-x^۲}{|x+۱|}$ باشند، آن‌گاه دامنه‌ی تابع h با ضابطه‌ی $h(x)=(\frac{۲}{g}+\frac{۱}{f})$ چند نقطه از $\mathbb{R}$ را شامل نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳. حاصل عبارت $\frac{\sin۲\alpha}{\cos۳\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos۴\alpha}$، به ازای $\alpha=\frac{\pi}{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) صفر

۱۴. کدام‌یک از توابع زیر، با تابع $y=\log x^۲$ برابر است؟

۱) $y=۲\log x$ ۲) $y=۲\log|x|$ ۳) $y=۴\log\sqrt{x}$ ۴) $y=\log\sqrt{x^۲}$

۱۵. حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۶. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+3} & x<1\\ x^2+ax & x\geq 1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۱۷. قرینه‌ی نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲− ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

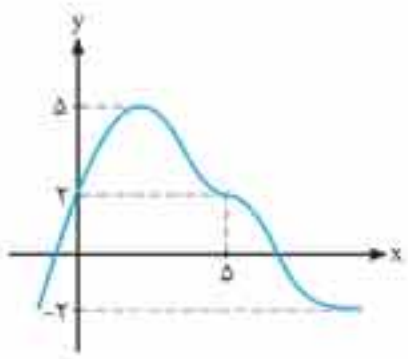
۱۸. اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$ باشند، جواب معادله‌ی $(fog)(x)=(gof)(x)$ کدام است؟

۱) ۱۰،۷− ۲) ۱۰،۷ ۳) ۱۰،۷− ۴) ۱۰،۷

۱۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x+\sin 2x}{1+\cos x}=0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{5}$ ۲) $\frac{2k\pi}{5}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{5}$ ۴) $\frac{(2k+1)}{5}\pi$

۲۰. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ را نمایش می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{2x}{f(x)-2}$ کدام است؟



۱) $+\infty$

۲) $-\infty$

۳) صفر

۴) ۲−

۲۱. به ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y=5x+a$، بر نمودار تابع $y=2x^2-3x+6$ مماس است؟

۱) ۳− ۲) ۲− ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲. مشتق چپ تابع $f(x)=\frac{x^2}{12}|-x|+|9-x^2|$ در $x=3$ کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۱۵− ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{51}{4}$

۲۳. هرگاه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{3}{2}$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$، آن‌گاه آهنگ لحظه‌ای تابع fog در $x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۴. به ازای کدام مقدار b، نقطه‌ی $(-1،6)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^2+\frac{b}{x}$ است؟

۱) ۴ ۲) ۴− ۳) ۲ ۴) ۲−

۲۵. می‌خواهیم یک مخزن استوانه‌ای با حجم 200π بسازیم. هزینه‌ی ساخت هر واحد سطح درپوش و کف مخزن ۸ واحد قیمت و هر واحد سطح دیوار مخزن ۱۰ واحد قیمت است. ارتفاع استوانه را چه مقدار انتخاب کنیم تا هزینه‌ی ساخت حداقل شود؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۲۶. اگر تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$ فقط در بازه‌ی $(1،3)$ نزولی باشد، آن‌گاه طول نقطه‌ی بحرانی تابع $g(x)=x^2-(a+b)x+1$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۲۷. دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی $(-2،1)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۱) ۱،۴ ۲) ۱،۵ ۳) ۲،۴ ۴) ۲،۵

۲۸. در یک مستطیل طلایی به عرض ۲، یک بیضی محاط شده است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-2}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-1}$ ۳) $\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}-1}$ ۴) $\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}-2}$

۲۹. در یک شهر ۱۰ درصد افراد فارغ‌التحصیل دانشگاه هستند که ۲ درصد آن‌ها بیکارند و درصد بیکاری بقیه افراد جامعه ۲۰ درصد است. اگر به‌طور تصادفی یک نفر از افراد بیکار این شهر انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد فارغ‌التحصیل دانشگاه است؟

۱) $\frac{۱}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲}{۹۱}$ ۳) $\frac{۳}{۹۱}$ ۴) $\frac{۴}{۹۱}$

۳۰. نقطه‌ی M خارج از خط d و به فاصله‌ی ۶ واحد از آن قرار دارد. چند مثلث متساوی‌الساقین به مساحت ۳۶ واحد می‌توان رسم کرد که یک ضلع آن روی خط d و نقطه‌ی موردنظر رأس آن باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

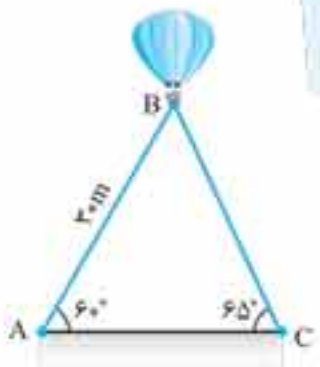
آزمون ۹۸ آزمون جامع مطابق با کنکور سراسری

۵۰ دقیقه

۱. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آن‌ها عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۲. یک بالون تبلیغاتی مطابق شکل، توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب BC چند متر است؟ ($\sin ۶۵^\circ \simeq ۰/۹$)



۱) $\frac{۵۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) ۲۵ ۴) $\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۳}$

۳. اگر $A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۴. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(۲m-۱)x^۲ + ۶mx + m - ۲ = ۰$، دو ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) $(-۱, +\infty) - \{\frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\begin{cases} m < -۱ \text{ یا } m > \frac{۲}{۷} \\ m \neq \frac{۱}{۲} \end{cases}$ ۳) $-۱ < m < \frac{۲}{۷}$ ۴) $\begin{cases} -۱ < m < ۳/۵ \\ m \neq \frac{۱}{۲} \end{cases}$

۵. نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) (۳, ۴) ۲) (۲, ۵) ۳) (۳, ۵) ۴) (۲, ۶)

۶. ۴ پسر و ۳ دختر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند، به‌طوری که پسرها کنار هم باشند ولی هر ۳ دختر کنار هم نباشند؟

۱) $۴ \times ۴!$ ۲) $۱۲ \times ۴!$ ۳) $۱۶ \times ۴!$ ۴) $۲۴ \times ۴!$

۷. رنگ اتومبیل‌های موجود در یک پارکینگ عمومی، کدام نوع متغیر است؟

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته ۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

۸. در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز و ۶ مهره‌ی آبی موجود است. اگر ۳ مهره از این جعبه بیرون آوریم، با کدام احتمال دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ هستند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

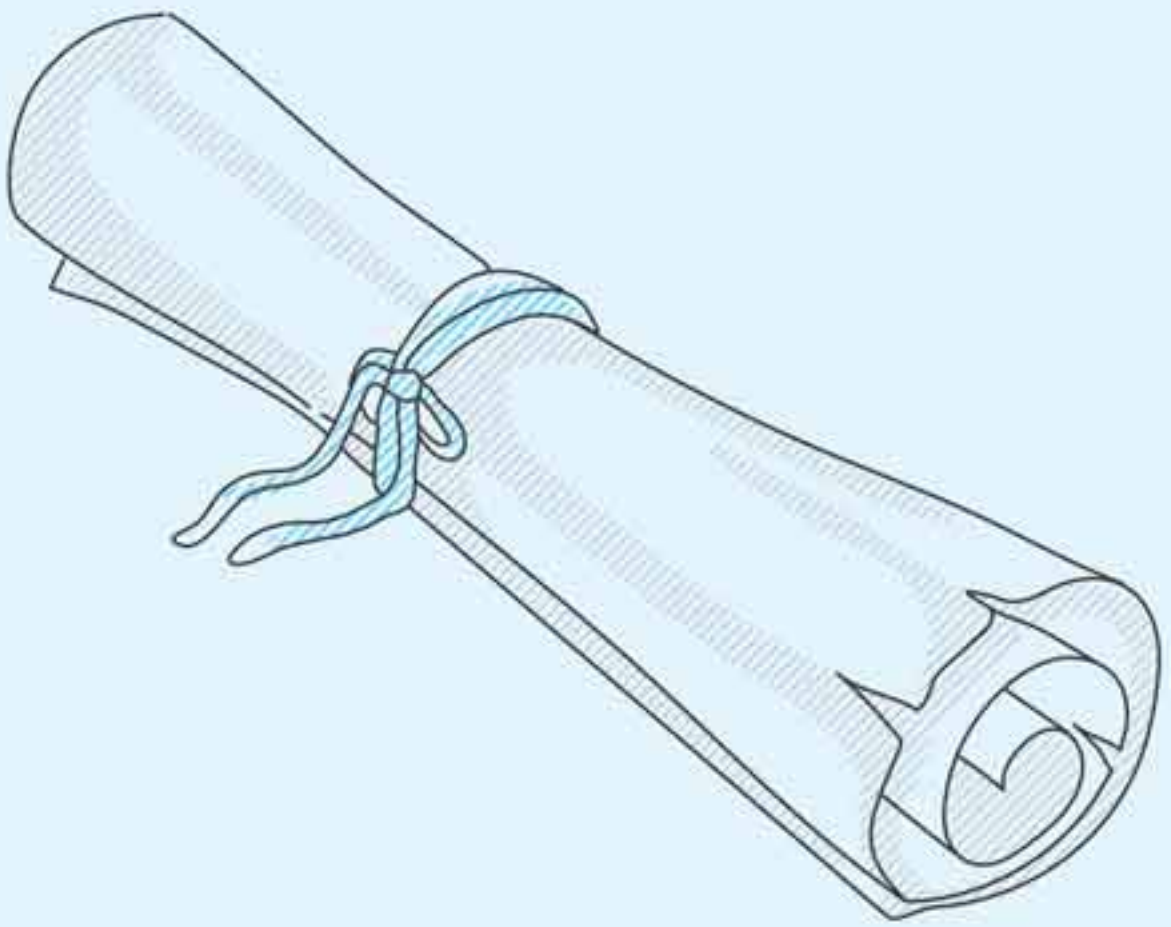
۹. دو نقطه بر خط D به معادله‌ی $y = x - ۲$ قرار دارند، به‌طوری که فاصله‌ی این نقاط از خط $۲x + ۵y = ۳$ برابر $\sqrt{۲۹}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟

۱) ۳, ۱ ۲) ۳-, ۱ ۳) $-\frac{۱۶}{۷}$, ۶ ۴) $\frac{۱۶}{۷}$, ۶-

۱۰. بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۴۵ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

بخش ۴



پاسخ‌نامه تشریحی

در این بخش حلِ تشریحی و کاملِ تمام تست‌های موجود در بخش‌های مختلف کتاب را خواهید دید... سعی کرده‌ایم برای هر تست، ساده‌ترین، کوتاه‌ترین و خلاقانه‌ترین راهِ ممکن را بنویسیم و از آوردن جملات اضافی و راه‌های متعددِ طولانی، پرهیز کرده‌ایم! دیدنِ پاسخ‌های تست‌ها، فرایند تثبیتِ مطالب، آمادگی و تسلط شما را چند برابر می‌کند. چراکه می‌توانید دیدگاه‌های میان‌بُر و راه‌های خلاق هم یاد بگیرید.

پیشنهاد می‌کنیم پس از حل هر آزمون در زمانِ خودش، به سراغ پاسخ‌نامه بیایید و مطالبی که برایتان جدید جلوه کرد برای مرور نهایی، های‌لایت کنید؛ در آخر درصد خود را در هر آزمون بالای آن یادداشت کنید برای مقایسه‌ی پیشرفت خودتان...

حل کامل و تشریحی آزمون‌ها با راه‌های سریع و مطمئن، خلاقانه و استاندارد؛ تکمیل فرایند آمادگیِ‌تان...

چون میانگین داده‌های اولیه $\bar{x}$ بوده است، پس:

$$y=2x-1 \Rightarrow \bar{y}=\overline{2x-1}=2\bar{x}-1$$

۶. **گزینه ۲** چون انحراف معیار برابر صفر است، پس هر سه داده با هم برابرند و چون میانگین آن‌ها ۱۵ است، بنابراین هر سه داده ۱۵ هستند؛ با اضافه شدن a و b به داده‌ها میانگین تغییر نکرده است؛ بنابراین میانگین a و b نیز ۱۵ است. $(\frac{a+b}{2}=15 \Rightarrow a+b=30)$ داده‌ها $15,15,15,a,b$ هستند.

$$\sigma^2=\frac{1}{N}((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2)$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}=\frac{1}{5}((15-15)^2+(15-15)^2+(15-15)^2+(a-15)^2+(b-15)^2)$$

$$8=(a-15)^2+(b-15)^2 \xrightarrow{a+b=30 \Rightarrow b=30-a}$$

$$8=(a-15)^2+(30-a-15)^2$$

$$\Rightarrow 8=(a-15)^2+(-a+15)^2 \Rightarrow 8=(a-15)^2+(a-15)^2$$

$$\Rightarrow 2(a-15)^2=8 \Rightarrow (a-15)^2=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-15=2 \Rightarrow a=17 \Rightarrow b=30-17=13 \Rightarrow |a-b|=4 \\ a-15=-2 \Rightarrow a=13 \Rightarrow b=30-13=17 \Rightarrow |a-b|=4 \end{cases}$$

۷. **گزینه ۳**

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=0/06 \Rightarrow \sigma=0/06\bar{x} \quad (*)$$

وقتی از همه‌ی داده‌ها، ۳ واحد کم می‌کنیم، انحراف‌معیار تغییر نمی‌کند ولی میانگین به اندازه‌ی ۳ واحد کم می‌شود:

$$0/07=\frac{\sigma}{\bar{x}-3} \xrightarrow{(*)} 0/07=\frac{0/06\bar{x}}{\bar{x}-3} \Rightarrow 0/07\bar{x}-0/21=0/06\bar{x} \Rightarrow \bar{x}=21$$

۸. **گزینه ۳** برای داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ داریم:

$$\sigma^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2 \Rightarrow 2=\frac{x_1^2+\cdots+x_{10}^2}{10}-(5)^2 \Rightarrow x_1^2+\cdots+x_{10}^2=270 \quad (1)$$

همچنین: $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=5 \Rightarrow x_1+\cdots+x_{10}=50$ (2)

میانگین داده‌های جدید، برابر است با:

$$\bar{X}=\frac{(x_1^2+4x_1)+\cdots+(x_{10}^2+4x_{10})}{10}=\frac{(x_1^2+\cdots+x_{10}^2)+4(x_1+\cdots+x_{10})}{10}$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \bar{X}=\frac{270+4\times 50}{10}=\frac{470}{10}=47$$

۹. **گزینه ۴** برای داده‌های اولیه داریم:

$$\bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_8}{8}=15 \Rightarrow x_1+\cdots+x_8=120 \quad (1)$$

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_8-\bar{x})^2}{8}=4$$

$$\xrightarrow{\bar{x}=15} (x_1-15)^2+\cdots+(x_8-15)^2=32 \quad (2)$$

با اضافه شدن دو داده‌ی ۱۸ و ۱۲، میانگین کل داده‌ها تغییری نمی‌کند، زیرا:

$$\bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_8+18+12}{10} \overset{(1)}{=} \frac{120+30}{10}=15$$

برای محاسبه‌ی واریانس ۱۰ داده‌ی جدید، داریم:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-15)^2+\cdots+(x_8-15)^2+(18-15)^2+(12-15)^2}{10}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{32+9+9}{10}=\frac{50}{10}=5$$

۱۰. **گزینه ۲** میانگین ۲۰ داده‌ی جدید برابر است با:

$$\bar{x}_t=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}=\frac{10\times 5+10\times 6}{10+10}=\frac{110}{20}=\frac{11}{2} \quad (1)$$

اگر داده‌های گروه اول را با $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ و داده‌های گروه دوم را با $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ نمایش دهیم، داریم:

$$\sigma_a^2=\frac{a_1^2+\cdots+a_{10}^2}{10}-\bar{a}^2 \Rightarrow 1=\frac{a_1^2+\cdots+a_{10}^2}{10}-25$$

$$\Rightarrow a_1^2+\cdots+a_{10}^2=260 \quad (2)$$

$$\sigma_b^2=\frac{b_1^2+\cdots+b_{10}^2}{10}-\bar{b}^2 \Rightarrow 4=\frac{b_1^2+\cdots+b_{10}^2}{10}-36$$

$$\Rightarrow b_1^2+\cdots+b_{10}^2=400 \quad (3)$$

اما واریانس ۲۰ داده برابر است با:

$$\sigma_t^2=\frac{a_1^2+\cdots+a_{10}^2+b_1^2+\cdots+b_{10}^2}{20}-\bar{x}_t^2$$

$$\xrightarrow{(3),(2),(1)} \sigma_t^2=\frac{260+400}{20}-\frac{121}{4}=33-\frac{121}{4}=\frac{11}{4} \Rightarrow \sigma_t=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\Rightarrow cv_1=\frac{\sigma_t}{\bar{x}_1}=\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\frac{11}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{11}=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

آزمون شماره ۶۱

۱. **گزینه ۱** ابتدا زوج مرتب‌ها را به‌گونه‌ای می‌نویسیم که مؤلفه‌های اول به‌صورت صعودی مرتب شوند $f=\{(-1,m^2),(0,4),(3,m^2-3m),(5,10)\}$

حال شرط اکیداً صعودی را اعمال می‌کنیم، یعنی:

$$-1<0<3<5 \Rightarrow f(-1)<f(0)<f(3)<f(5)$$

$$\Rightarrow m^2<4<m^2-3m<10 \Rightarrow \begin{cases} m^2<4 \\ m^2-3m>4 \\ m^2-3m<10 \end{cases}$$

از حل سه نامعادله‌ی فوق و اشتراک جواب‌ها، جواب نهایی به‌دست می‌آید:

(1) $m^2<4 \Rightarrow -2<m<2$

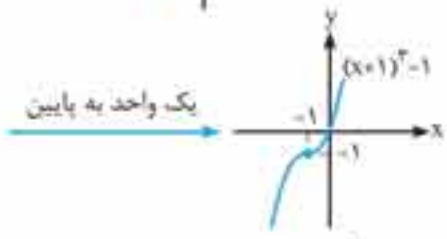
(2) $m^2-3m-4>0 \Rightarrow (m-4)(m+1)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-1 \text{ یا } m>4$

(3) $m^2-3m-10<0 \Rightarrow (m-5)(m+2)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2<m<5$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)} -2<m<-1$$

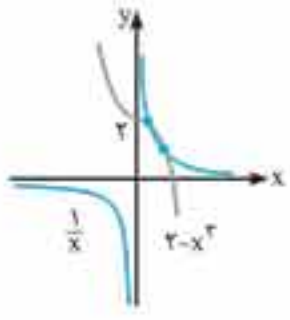
۲. **گزینه ۱** با توجه به اتحاد $(x+1)^3$ داریم:

$$y=x^3+3x^2+3x=(x+1)^3-1 \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$$



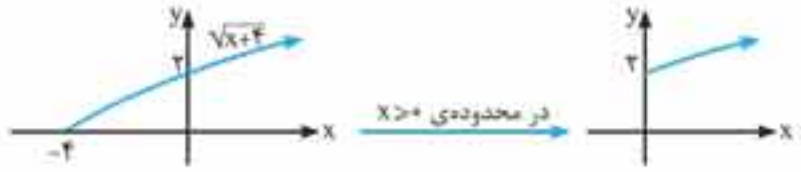
پس نمودار تابع از نواحی دوم و چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

۳. **گزینه ۳** کافی است نمودار دو تابع $\frac{1}{x}$ و $2-x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:

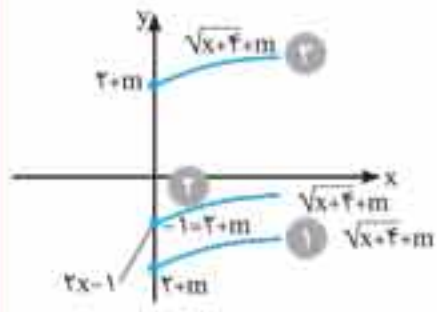


همان‌طور که از شکل پیداست، این دو تابع در دو نقطه در سمت راست مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی معادله‌ی $\frac{1}{x}=2-x^3$ دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۴. **گزینه ۲** کافی است نمودار تابع f را با فرض مقادیر مختلف برای m رسم کنیم.
ابتدا بدون در نظر گرفتن m ، نمودار ضابطه اول را رسم می‌کنیم:



حالا باید نمودار را در راستای y ، به اندازه‌ی m واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، بنابراین برای رسم $\sqrt{x+۴}+m$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل مقابل در حالت‌های ۲ و ۳ ، تابع صعودی و در حالت ۱ تابع غیریکنواست؛ چون ابتدا صعود کرده، سپس نزول و دوباره صعود می‌کند. بنابراین:



$۲+m\geq -۱\Rightarrow m\geq -۳$

۵. **گزینه ۱** در تابع نزولی می‌دانیم که: $f(x_۱)\geq f(x_۲)\Rightarrow x_۱\leq x_۲$

$$f(x^۲-x)-f(۳x+۵)\geq ۰\Rightarrow f(\underbrace{x^۲-x}_{x_۱})\geq f(\underbrace{۳x+۵}_{x_۲})$$

$$\xrightarrow{f\text{ نزولی است}} x^۲-x\leq ۳x+۵\Rightarrow x^۲-۴x-۵\leq ۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x+۱)\leq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱\leq x\leq ۵$$

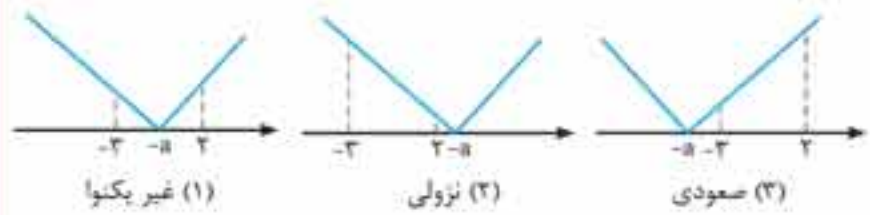
۶. **گزینه ۳**

$$f(x)=ax^۲(x^{n+۱}-۳)+۴=ax^{n+۳}-۳ax^۲+۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{درجه‌ی تابع } f=۶\Rightarrow n+۳=۶\Rightarrow n=۳ \\ f(-۱)=a(-۱)^۶-۳a(-۱)^۲+۴=۲\Rightarrow a=۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^۶-۳x^۲+۴$$

$$\Rightarrow f(۲)=۶۴-۳\times ۴+۴=۵۶$$

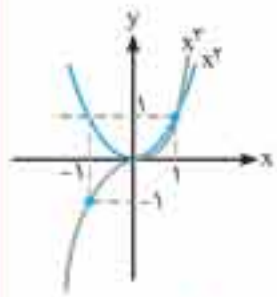
۷. **گزینه ۳** ریشه‌ی داخل قدرمطلق $x=-a$ است و عدد ثابت ۱- که به تابع اضافه شده، تأثیری در یکنوا بودن تابع ندارد، بنابراین یکنوا بودن تابع $|x+a|$ را در بازه‌ی $[۲,-۳]$ بررسی می‌کنیم. برای این کار سه شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



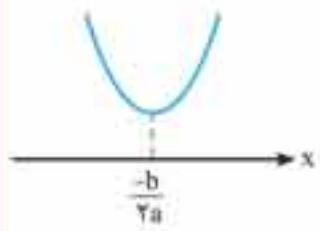
با توجه به شکل‌های رسم‌شده، نتیجه می‌گیریم که $-a$ نباید بین ۲ و ۳- باشد، پس:

$$-۳<-a<۲\Rightarrow -۲<a<۳\Rightarrow \text{جواب}=\mathbb{R}-(-۲,۳)$$

۸. **گزینه ۱** فقط مورد (پ) درست است. درباره‌ی مورد (الف) نمودار دو تابع در $x=۰$ بر هم منطبق هستند، پس در کل بازه‌ی $(-\infty,۱)$ ، $x^۲$ بالاتر از $x^۳$ نیست. برای دیگر موارد، شکل مقابل را ببینید:



۹. **گزینه ۳**

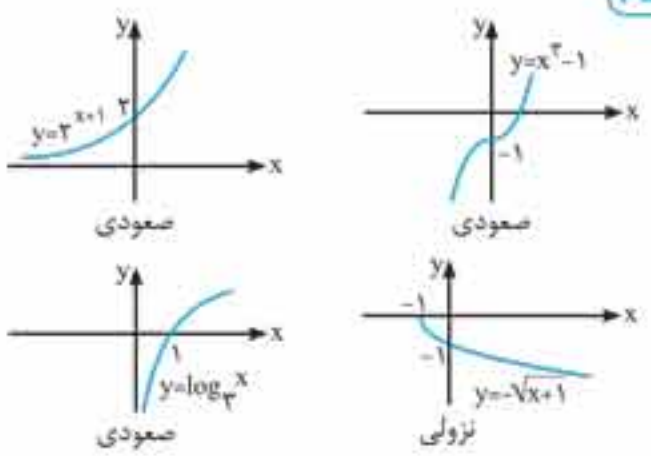


$$\xrightarrow{f\text{ نزولی است}} x\in(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$$

$$\xrightarrow{b=-۴,a=۲} x\in(-\infty,۱]$$

تابع f در بازه‌ی $(-\infty,۱]$ و هر زیرمجموعه از آن، همواره نزولی است، پس پاسخ درست، گزینه‌ی «۳» است.

۱۰. **گزینه ۴**



۱۱. **گزینه ۲**

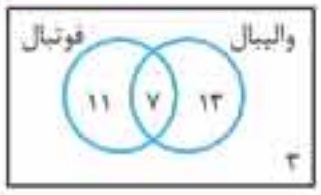
«۱» گزینه‌ی: $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{W}=\varnothing\Rightarrow\varnothing\subseteq\mathbb{N}$ ✓

«۲» گزینه‌ی: $\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\{\ldots,\sqrt{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۵},\ldots\}\neq\mathbb{Q}$

«۳» گزینه‌ی: $\mathbb{W}\cap\mathbb{Z}=\{۰,۱,۲,\ldots\}=\mathbb{N}\cup\{۰\}$ ✓

«۴» گزینه‌ی: $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}\Rightarrow\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}=\mathbb{Q}$ ✓

۱۲. **گزینه ۳** با توجه به فرضیات تست، نمودار ون روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:



با توجه به شکل ۱۶ نفر عضو تیم فوتبال نیستند.
دقت کنید: منظور از گزینه‌ی «۴»، افرادی است که یا عضو هیچ تیمی نیستند یا عضو یک تیم هستند.

۱۳. **گزینه ۲** طبق فرض تست داریم:

$$\begin{cases} t_۸=t_۴+۶\Rightarrow t_۸-t_۴=۶ \\ t_۹^۲=t_۴^۲+۱۷۱\Rightarrow t_۹^۲-t_۴^۲=۱۷۱\Rightarrow (t_۹-t_۴)(t_۹+t_۴)=۱۷۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t_n=t_۱+(n-۱)d} \begin{cases} (t_۱+۷d)-(t_۱+۳d)=۶\Rightarrow ۴d=۶\Rightarrow d=\frac{۳}{۲} & ① \\ (t_۱+۸d-t_۱-۲d)(t_۱+۸d+t_۱+۲d)=۱۷۱ & ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②}(۶d)(۲t_۱+۱۰d)=۱۷۱\xrightarrow{①}(۶\times\frac{۳}{۲})(۲t_۱+۱۰\times\frac{۳}{۲})=۱۷۱$$

$$\Rightarrow ۹(۲t_۱+۱۵)=۱۷۱\xrightarrow{\div ۹}۲t_۱+۱۵=۱۹\Rightarrow ۲t_۱=۴\Rightarrow t_۱=۲$$

۱۴. **گزینه ۲**

$$\frac{t_۶}{t_۳}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲t_۶=-t_۳\Rightarrow ۲t_۶+t_۳=۰\xrightarrow{t_n=t_۱+(n-۱)d}$$

$$۲(t_۱+۵d)+(t_۱+۲d)=۰\Rightarrow ۳t_۱+۱۲d=۰\xrightarrow{\div ۳}\underbrace{t_۱+۴d}_{t_۵}=۰\Rightarrow t_۵=۰$$

۱۵. **گزینه ۱** طبق فرضیات تست داریم:

$$\begin{cases} t_۹=۹t_۵ & ① \\ t_۹-t_۵=۱۴۴ & ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow[①]{t_n=t_۱r^{n-۱}} t_۱r^۸=۹t_۱r^۴\xrightarrow{\div t_۱r^۴} r^۴=۹ \quad ③$$

$$\xrightarrow{②} t_۱r^۸-t_۱r^۴=۱۴۴\Rightarrow t_۱r^۴(r^۴-۱)=۱۴۴$$

$$\xrightarrow{③} t_۱\times ۹(۹-۱)=۱۴۴\Rightarrow t_۱\times ۹\times ۸=۱۴۴\Rightarrow t_۱=۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۳=t_۱r^۲ \\ r^۴=۹\Rightarrow r^۲=۳ \end{cases}\Rightarrow t_۳=۲\times ۳=۶$$

۱۶. **گزینه ۱**

$$۳^a, ۳\sqrt{۳}, ۹, b$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی دنباله‌ی هندسی}} \begin{cases} (۳\sqrt{۳})^۲=۳^a\times ۹\Rightarrow ۲۷=۳^a\times ۹\Rightarrow a=۱ \\ ۹^۲=۳\sqrt{۳}\times b\Rightarrow b=\frac{۸۱}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۲۷}{\sqrt{۳}} \quad (*) \end{cases}$$

اگر واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $a\sqrt{۳}$ و b را x بنامیم، داریم:

$$x^۲ = b \times a\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} x^۲ = \frac{۲۷}{\sqrt{۳}} \times \sqrt{۳} \Rightarrow x^۲ = ۲۷ \Rightarrow x = \pm ۳\sqrt{۳}$$

۱۷. گزینه ۱

شماره‌ی شکل	n	۱	۲	۳
تعداد مربع‌های رنگی	a_n	۴	۸	۱۲

مشاهده می‌کنیم که مربع‌های رنگی، ۴ واحد ۴ واحد در حال افزایش است، یعنی یک الگوی خطی. (برای این‌که خیالتون راحت بشه شکل چهارم رو هم بکشید.)

اما جمله‌ی عمومی دنباله‌ی a_n:

$$\xrightarrow{a_n \text{ خطی است}} a_n = bn + c \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۴ \Rightarrow b + c = ۴ \\ a_۲ = ۸ \Rightarrow ۲b + c = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \\ c = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = ۴n \Rightarrow a_{۲۵۰} = ۴ \times ۲۵۰ = ۱۰۰۰$$

۱۸. گزینه ۳

$$t_۳ , t_۷ , t_۹ \xrightarrow{\text{شرط تشکیل دنباله‌ی هندسی}} t_۷^۲ = t_۳ \times t_۹ \xrightarrow{t_n = t_۱ + (n-۱)d}$$

$$(t_۱ + ۶d)^۲ = (t_۱ + ۲d)(t_۱ + ۸d) \Rightarrow t_۱^۲ + ۱۲t_۱d + ۳۶d^۲ = t_۱^۲ + ۱۰t_۱d + ۱۶d^۲$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} ۲۰d^۲ + ۲t_۱d = ۰ \Rightarrow ۲d(t_۱ + ۱۰d) = ۰$$

$$\xrightarrow{d \neq ۰} \underbrace{t_۱ + ۱۰d}_{t_{۱۱}} = ۰ \Rightarrow t_{۱۱} = ۰$$

۱۹. گزینه ۱ روش اول: هر دو دایره‌ی توخالی و توپر از الگوی مثلثی پیروی می‌کنند.

الگوی دایره‌های توخالی:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \Rightarrow a_{۱۲} = \frac{۱۲ \times ۱۳}{۲} = ۷۸$$

الگوی دایره‌های توپر:

$$b_n = \frac{(n-۱)n}{۲} \Rightarrow b_{۱۲} = \frac{۱۱ \times ۱۲}{۲} = ۶۶ \Rightarrow a_{۱۲} - b_{۱۲} = ۷۸ - ۶۶ = ۱۲$$

روش دوم: در هر مرحله اختلاف تعداد دایره‌های توپر و دایره‌های توخالی برابر شماره‌ی آن مرحله است.

۲۰. گزینه ۲ می‌دانیم که دنباله‌های خطی، همانند توابع خطی از درجه‌ی اول هستند، بنابراین:

$$m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲ \Rightarrow a_n = ۲n + ۷ \Rightarrow a_۳ = ۲ \times ۳ + ۷ = ۱۳$$

$$b_n = a_۳n - ۱۴m \xrightarrow[m=۲]{a_۳ = ۱۳} b_n = ۱۳n - ۲۸ < ۰ \Rightarrow ۱۳n < ۲۸$$

$$\Rightarrow n < \frac{۲۸}{۱۳} \simeq ۲/۱ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۱, ۲$$

پس دو جمله‌ی منفی در این دنباله وجود دارد.

آزمون شماره ۶۲

۱. گزینه ۲

$$(۲, ۴), (۲, a^۲ - ۳a) \in f \Rightarrow ۴ = a^۲ - ۳a \Rightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۴)(a+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ a = -۱ \end{cases}$$

$$(a-۱, ۵) \in f \xrightarrow{a=۴} (۳, ۵) \in f \xrightarrow{(۳, b) \in f} b = ۵$$

$$(a+۲, ۳) \in f \xrightarrow{a=-۱} (۱, ۳) \in f \xrightarrow{(۱, -۱) \in f} f \text{ تابع نمی‌شود}$$

یعنی $a = -۱$، قابل قبول نیست و دوتایی مرتب (a, b) برابر است با: $(۴, ۵)$

۲. گزینه ۲ باید نامعادله‌ی $y < ۰$ همواره برقرار باشد، پس:

$$(m-۲)x^۲ - ۴x + m + ۱ < ۰ \xrightarrow{\text{شرط‌ها}} \begin{cases} a < ۰ \\ \Delta < ۰ \end{cases}$$

$$a = m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < ۲ \quad ①$$

$$\Delta = (-۴)^۲ - ۴(m-۲)(m+۱) < ۰ \xrightarrow{\div(-۴)} (m-۲)(m+۱) - ۴ > ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - m - ۲ - ۴ > ۰ \Rightarrow m^۲ - m - ۶ > ۰ \Rightarrow (m-۳)(m+۲) > ۰$$

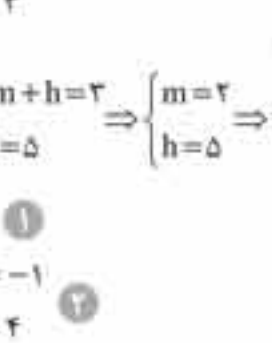
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m < -۲ \\ \text{یا} \quad ② \\ m > ۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{① \cap ②} m < -۲$$

۳. گزینه ۴ f تابعی خطی است، یعنی: $f(x) = ax + b$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \begin{cases} f(۲) + f(-۱) = ۸ \Rightarrow ۲a + b - a + b = ۸ \Rightarrow a + ۲b = ۸ \\ f(۱) = ۳ \Rightarrow a + b = ۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۵ \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(x) = -۲x + ۵ \xrightarrow{\text{رسم تابع } f}$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times \frac{۵}{۲} = \frac{۲۵}{۴}$$

۴. گزینه ۱ f تابعی همانی است، یعنی $f(x) = x$ و g تابعی ثابت است، یعنی $g(x) = k$.

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{۳f^۲(۱) - ۴g(۳)}{۲f(۲) + ۱} = ۳ \Rightarrow \frac{۳ \times ۱^۲ - ۴ \times k}{۲ \times ۲ + ۱} = ۳ \Rightarrow ۳ - ۴k = ۱۵$$

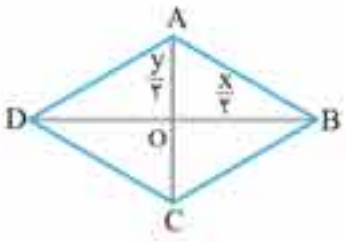
$$\Rightarrow -۴k = ۱۲ \Rightarrow k = -۳ \Rightarrow g(۰) = k = -۳$$

۵. گزینه ۳ اگر قطرهای لوزی را با x و y نمایش دهیم، طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} x + y = ۶ \Rightarrow y = ۶ - x \\ S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۲۷}{۸} \Rightarrow xy = \frac{۲۷}{۴} \end{cases} \Rightarrow x(۶-x) = \frac{۲۷}{۴} \Rightarrow x^۲ - ۶x + \frac{۲۷}{۴} = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۳۶ - ۴ \times \frac{۲۷}{۴} = ۹} x = \frac{۶ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۹}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} \\ x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۹}{۲} \end{cases}$$

حال شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} (\frac{x}{۲})^۲ + (\frac{y}{۲})^۲ = AB^۲$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۴} = AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{\frac{۸۱}{۴} + \frac{۹}{۴}}{۱۶} = \frac{۹۰}{۱۶} \Rightarrow AB = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow \text{محیط لوزی} = ۴AB = ۳\sqrt{۱۰}$$

۶. گزینه ۴

$$f(x) = mx + h \Rightarrow \begin{cases} (-۱, ۳) \in f \Rightarrow -m + h = ۳ \\ (۰, ۵) \in f \Rightarrow ۰ + h = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ h = ۵ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۲x + ۵$$

$$\xrightarrow{(۱, a) \in f} a = ۲(۱) + ۵ \Rightarrow a = ۷ \quad ①$$

$$g \text{ همانی است} \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow \begin{cases} b = -۱ \\ c = ۴ \end{cases} \quad ②$$

$$y = \sqrt{ax + bc} \xrightarrow{① \text{ و } ②} y = \sqrt{۷x - ۴} \Rightarrow ۷x - ۴ \geq ۰$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{۴}{۷} \Rightarrow D_f = [\frac{۴}{۷}, +\infty)$$

۷. گزینه ۳

$$۳x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۱}{۳} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\alpha\beta^{۳}+\alpha^{۳}\beta=\alpha\beta(\alpha^{۲}+\beta^{۲})=P(S^{۲}-۲P)=(-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۹}-۲(-\frac{۱}{۳}))$$

$$=(-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۳})=(-\frac{۱}{۳})(\frac{۷}{۹})=\frac{-۷}{۲۷}$$

۸. گزینه ۳

$$\frac{۶}{x^{۳}-۸}=\frac{۵}{x^{۲}+۲x+۴}+\frac{۱}{x-۲}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{۶}{x^{۳}-۸}=\frac{۵(x-۲)+x^{۲}+۲x+۴}{\underbrace{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}}$$

$$\frac{۶}{x^{۳}-۸}=\frac{x^{۲}+۷x-۶}{x^{۳}-۸}\Rightarrow x^{۲}+۷x-۱۲=۰\Rightarrow S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۷$$

۹. گزینه ۱

$$x^{۲}-۲x+۱+\sqrt{x-۱}=۰\Rightarrow(x-۱)^{۲}+\sqrt{x-۱}=۰$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x-۱}=t}t^{۴}+t=۰\Rightarrow t(t^{۳}+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۰\Rightarrow x=۱\\ t=-۱\Rightarrow\sqrt{x-۱}=-۱\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۰. گزینه ۴ به ازای $m=۳$ داریم:

$$-۴x^{۲}+۳=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\text{دو ریشه}$$

برای $m\neq۳$ داریم:

$$(m-۳)x^{۴}-۴x^{۲}+m=۰\ (*)\xrightarrow{x^{۲}=t}(m-۳)t^{۲}-۴t+m=۰\ (**)$$

$$x^{۲}=t\xrightarrow{t\geq۰}x=\pm\sqrt{t}$$

یعنی به ازای هر t مثبت، دو مقدار برای x به‌دست می‌آید، پس برای این‌که معادله‌ی (*) دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

حالت اول: معادله‌ی (**) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد، بنابراین باید $\frac{c}{a}$ این معادله منفی باشد:

$$\xrightarrow{(**)}\frac{c}{a}=\frac{m}{m-۳}<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۰<m<۳\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=۱,۲$$

حالت دوم: معادله‌ی (**) ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\Delta=۰\\ x=-\frac{b}{۲a}>۰\end{cases}$$

$$\Delta=۱۶-۴(m-۳)(m)=۰\xrightarrow{\div(-۴)}m^{۲}-۳m-۴=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۴\end{cases}\ ①$$

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۴}{۲(m-۳)}>۰\Rightarrow m-۳>۰\Rightarrow m>۳\ ②$$

$$\xrightarrow{②\ \text{و}\ ①}m=۴$$

پس به ازای چهار مقدار صحیح ۱، ۲، ۳ و ۴، معادله‌ی (*) دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۱۱. گزینه ۳ باید همواره $f(x)\leq۳$ باشد، پس داریم:

$$(m-۴)x^{۲}-۶x+m+۷\leq۳\Rightarrow(m-۴)x^{۲}-۶x+m+۴\leq۰$$

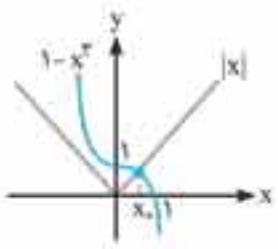
$$\xrightarrow{\text{شرط‌ها}}\begin{cases}a<۰\Rightarrow a=m-۴<۰\Rightarrow m<۴\ ①\\ \Delta\leq۰\end{cases}$$

$$\Delta=(-۶)^{۲}-۴(m-۴)(m+۴)\leq۰\xrightarrow{\div(-۴)}(m^{۲}-۱۶)-۹\geq۰$$

$$\Rightarrow m^{۲}\geq۲۵\Rightarrow m\leq-۵\ \text{یا}\ m\geq۵\ ②$$

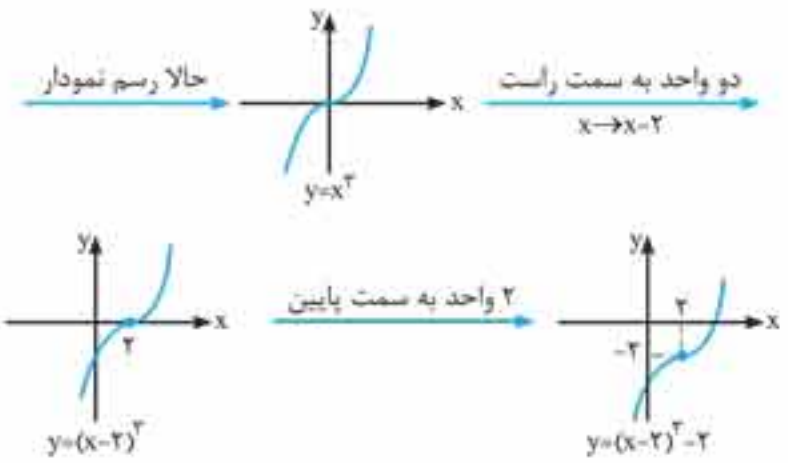
$$\xrightarrow{①\cap②}m\leq-۵$$

۱۲. گزینه ۱ کافی است نمودار تابع $y_۱=|x|$ و $y_۲=۱-x^{۳}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم؛ همان‌طور که در شکل مشخص است، این دو تابع در یک نقطه و در سمت راست مبدأ یکدیگر را قطع کرده‌اند، یعنی معادله یک ریشه‌ی مثبت دارد.



۱۳. گزینه ۱ سعی می‌کنیم تابع داده‌شده را به‌صورت مکعب کامل بنویسیم و سپس به کمک انتقال نمودار آن را رسم کنیم، پس داریم:

$$y=x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۱۰=\underbrace{x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸}_{(x-۲)^{۳}}-۲\Rightarrow y=(x-۲)^{۳}-۲$$



پس نمودار تابع داده‌شده، فقط از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

۱۴. گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x-۲}\xrightarrow{\text{دامنه}}x-۲\geq۰\Rightarrow x\geq۲\Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$$

$$g(x)=|\frac{۲x-۴}{x+۳}|\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{\underbrace{x\neq-۳}_{①}\mid\underbrace{\frac{۲x-۴}{x+۳}}_{②}\geq۲\}$$

$$\xrightarrow{②}|\frac{۲x-۴}{x+۳}|\geq۲\xrightarrow{\div۲}|\frac{x-۲}{x+۳}|\geq۱\Rightarrow\frac{|x-۲|}{|x+۳|}\geq۱$$

$$\Rightarrow|x-۲|\geq|x+۳|\xrightarrow{\text{توان دو}}x^{۲}-۴x+۴\geq x^{۲}+۶x+۹$$

$$\Rightarrow-۱۰x\geq۵\Rightarrow x\leq-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{①\cap②}D_{fog}=(-\infty,-\frac{۱}{۲}]-\{-۳\}$$

۱۵. گزینه ۲

$$\begin{cases}f=\{(-۲,۵),(۳,۳),(-۱,۴),(۲,۶)\}\\ g=\{(-۲,۳),(۲,-۱),(۴,-۲)\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f+g=\{(-۲,۸),(۲,۵)\}\\ fog=\{(-۲,۳),(۲,۴),(۴,۵)\}\end{cases}$$

می‌دانیم که دامنه‌ی تابع $\frac{f+g}{fog}$ اشتراک دامنه‌ی توابع $f+g$ و fog است به شرطی که $fog\neq۰$ باشد، پس:

$$\frac{f+g}{fog}=\{(-۲,\frac{۸}{۳}),(۲,\frac{۵}{۴})\}$$

۱۶. گزینه ۱

$$\begin{cases}f(x)=x^{۲}-x+۵\\ g(x)=\frac{۲x}{x^{۲}+۱}\end{cases}\Rightarrow gof(x)=g(f(x))=۱\xrightarrow{f(x)=t\ (*)}g(t)=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲t}{t^{۲}+۱}=۱\Rightarrow t^{۲}+۱=۲t\Rightarrow t^{۲}-۲t+۱=۰\Rightarrow(t-۱)^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow t=۱\xrightarrow{(*)}f(x)=۱\Rightarrow x^{۲}-x+۵=۱\Rightarrow x^{۲}-x+۴=۰$$

$$\Rightarrow\Delta=۱-۱۶<۰\Rightarrow\text{معادله فاقد ریشه است}$$

۱۷. گزینه ۲

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x}+1 \Rightarrow gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt[3]{x}+1) & ① \\ gof(x)=\dfrac{2x}{x^2+1} \text{ (فرض تست)} & ② \end{cases}$$

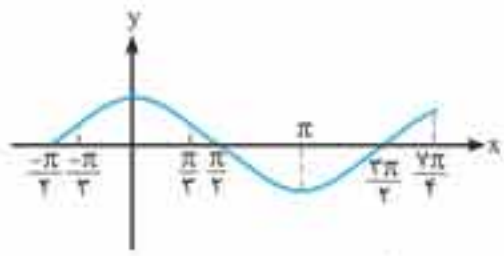
$$\xrightarrow{②\text{ و }①} g(\sqrt[3]{x}+1)=\frac{2x}{x^2+1} \quad ③$$

$$\sqrt[3]{x}+1=t \Rightarrow \sqrt[3]{x}=t-1 \Rightarrow x=(t-1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{در } ③} g(t)=\frac{2(t-1)^3}{((t-1)^3)^2+1}=\frac{2(t-1)^3}{(t-1)^6+1}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌ی تست}} g(x+1)=\frac{2(x+1-1)^3}{(x+1-1)^6+1} \Rightarrow g(x+1)=\frac{2x^3}{x^6+1}$$

۱۸. گزینه ۳ کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4})$ رسم کنیم؛ با توجه به گزینه‌های داده‌شده، تابع در بازه‌ی $(\pi,\frac{7\pi}{4})$ صعودی است.



۱۹. گزینه ۲

$$D_{f(x)}=[0,32] \Rightarrow 0\le x\le 32 \quad (*)$$

$$D_{f(2x^2)}=? \xrightarrow{(*)} 0\le 2x^2\le 32 \Rightarrow 0\le x^2\le 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2\ge 0 & \text{همواره درست} \\ x^2\le 16 \Rightarrow -4\le x\le 4 \end{cases}$$

۲۰. گزینه ۴ ابتدا ضابطه‌ی توابع f و g را به‌دست می‌آوریم. g تابعی خطی است که از دو نقطه‌ی (۰,۳) و (۴,۰) گذشته است:

$$g(x)=mx+h \Rightarrow \begin{cases} g(0)=0+h=3 \Rightarrow h=3 \\ g(4)=4m+h=0 \Rightarrow 4m+3=0 \Rightarrow m=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=-\frac{3}{4}x+3 \Rightarrow g(6)=-\frac{3}{4}\times 6+3=\frac{-3}{2} \quad (*)$$

نمودار تابع f یک سهمی است که محور x ها را در دو نقطه به‌طول‌های ۱ و ۴ قطع کرده است، پس:

$$f(x)=a(x-1)(x-4) \xrightarrow{(0,3)\in f} a(0-1)(0-4)=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{4}(x-1)(x-4)$$

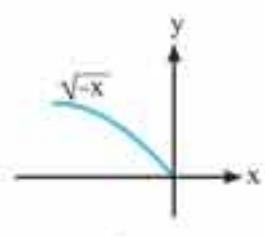
$$\Rightarrow fog(6)=f(g(6)) \overset{(*)}{=\!=} f(-\frac{3}{2})=\frac{3}{4}(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-4)$$

$$=\frac{3}{4}(-\frac{5}{2})(-\frac{11}{2})=\frac{165}{16}$$

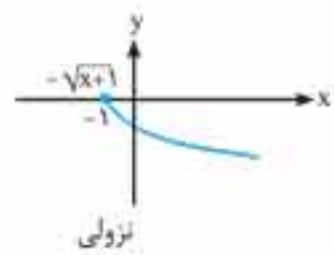
۲۱. گزینه ۴ همه‌ی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی «۱»: $0<x<1 \Rightarrow x^2>x^3$ ✓

گزینه‌ی «۲»:



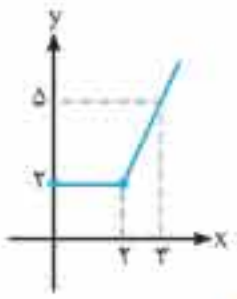
نزولی



نزولی

جمع دو تابع نزولی، نزولی است. ✓

گزینه‌ی «۳»:



تابع در $[0,2]$، ثابت است. ⇒

گزینه‌ی «۴»: ترکیب دو تابع نزولی، تابعی صعودی است. ×

۲۲. گزینه ۴

می‌دانیم در توابع درجه‌ی دو با ضریب x^2 منفی، تابع در بازه‌ی $(-\infty,x_S]$ اکیداً صعودی است، پس در این تست داریم:

$$y=-2x^2+8x-3 \Rightarrow x_S=-\frac{B}{2A}=-\frac{8}{2(-2)}=2$$

یعنی تابع در بازه‌ی $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی است و در نتیجه بیشترین مقدار a برابر ۲ است.

۲۳. گزینه ۳ در توابع اکیداً نزولی داریم:

$$-1<1<3<10 \Rightarrow f(-1)>f(1)>f(3)>f(10)$$

$$\Rightarrow m^2>m+6>8>m^2-3m-2$$

حال باید سه نامعادله‌ی زیر را حل کرده و سپس بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

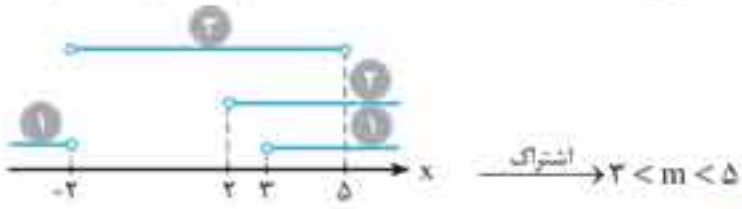
$$m^2>m+6 \Rightarrow m^2-m-6>0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+2)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-2 \text{ یا } m>3 \quad ①$$

$$m+6>8 \Rightarrow m>2 \quad ②$$

$$8>m^2-3m-2 \Rightarrow m^2-3m-10<0$$

$$\Rightarrow (m-5)(m+2)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2<m<5 \quad ③$$



$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 3<m<5$$

۲۴. گزینه ۲

$$f(x^2-2x)-f(3x-x^2-2)\ge 0 \Rightarrow f(x^2-2x)\ge f(3x-x^2-2)$$

$$\xrightarrow{\text{۲ اکیداً صعودی است}} x^2-2x\ge 3x-x^2-2 \Rightarrow 2x^2-5x+2\ge 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x-1)\ge 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\le\frac{1}{2} \text{ یا } x\ge 2$$

یعنی دامنه‌ی تابع داده‌شده، فقط شامل عدد صحیح ۱ نیست.

۲۵. گزینه ۱ اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-7=0$ را α و β فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\dfrac{3}{2} \\ P=\alpha\beta=-\dfrac{7}{2} \end{cases} \quad (*)$$

حال اگر معادله‌ی خواسته‌شده را با $x^2-S'x+P'=0$ نمایش دهیم، طبق فرض تست داریم:

$$S'=X_1+X_2=(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2 \overset{(*)}{=\!=} 2(\frac{3}{2})-2=1$$

$$P'=X_1X_2=(2\alpha-1)(2\beta-1)$$

$$=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1 \overset{(*)}{=\!=} 4(-\frac{7}{2})-2(\frac{3}{2})+1=-16$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی $x^2-S'x+P'=0$ داریم: $x^2-x-16=0$

آزمون شماره ۹۷

۱. **گزینه ۱**

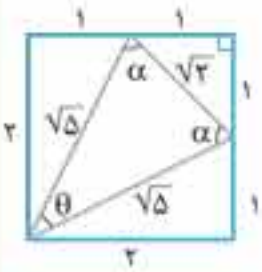
$$t_1t_5=\frac{64}{9}\xrightarrow{t_n=t_1r^{n-1}}t_1\times t_1r^4=\frac{64}{9}\Rightarrow t_1^2r^4=\frac{64}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}|t_1r^2|=\frac{8}{3}\xrightarrow{t_1<0}-t_1r^2=\frac{8}{3}\Rightarrow t_1r^2=-\frac{8}{3}\quad(*)$$

$$t_3+t_4=16\Rightarrow t_1r^2+t_1r^3=16\Rightarrow t_1r^2(1+r)=16$$

$$\xrightarrow{(*)}-\frac{8}{3}(1+r)=16\Rightarrow 1+r=-6\Rightarrow r=-7$$

۲. **گزینه ۳** ابتدا اندازه‌ی ضلع‌ها را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس پیدا می‌کنیم، سپس با توجه به شکل داریم:



$$\alpha+\alpha+\beta=180^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{180^\circ-\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\alpha=90^\circ-\frac{\theta}{2}$$

حال قضیه‌ی سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{5}}{\sin(90^\circ-\frac{\theta}{2})}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{5}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول }2\alpha}\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}}=\frac{\sqrt{5}}{\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}=2\sqrt{5}\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\xrightarrow{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1}\cos^2\frac{\theta}{2}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\Rightarrow\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول }2\alpha}\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\times\frac{9}{10}-1=\frac{8}{10}$$

$$\Rightarrow\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{64}{100}=\frac{36}{100}\Rightarrow\sin\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

۳. **گزینه ۲**

$$\frac{\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}\times\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2}\times\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}\times\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})^2}}$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت خارج کن!}]{\text{فرجه و توان را ساده کن}}\frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}{\sqrt{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}}\frac{\sqrt[3]{4-3}}{\sqrt{2}\sqrt{4-3}}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

۴. **گزینه ۱** ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را ساده می‌کنیم:

$$\left|\frac{(x+5)(2x+1)}{x+5}-2\right|\le 3\xrightarrow{x\neq-5}|2x+1-2|\le 3$$

$$\Rightarrow|2x-1|\le 3\Rightarrow-3\le 2x-1\le 3\Rightarrow-1\le x\le 2$$

$$\text{وسط بازه}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

۵. **گزینه ۲**

۱) $[x-2]=1\xrightarrow{\text{مفهوم جزء صحیح}}1\le x-2<2\xrightarrow{+2}3\le x<4$

۲) $f(x)=|x-3|+|x-4|\xrightarrow{3\le x<4}f(x)=+(x-3)-(x-4)=1$

۳) تعداد نقاط مشترک دو تابع $\xrightarrow{f(x)=g(x)}2x^2+x-17=1\Rightarrow 2x^2+x-18=0$

$$\xrightarrow[\text{دو ریشه حقیقی دارد}]{\Delta=145>0}x=\frac{-1\pm\sqrt{145}}{4}\xrightarrow{\sqrt{145}\simeq 12}x=-\frac{13}{4},\frac{11}{4}$$

دقت کنید که هیچ کدام از ریشه‌های به‌دست آمده در محدوده‌ی $3\le x<4$ نیست، بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۶. **گزینه ۴** برای این‌که مجموع سه رقم مضرب ۴ باشد باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

$$\begin{cases}\{1,2,5\}\xrightarrow{\text{تعداد حالات}}n_1=3!=6\\ \{1,3,4\}\xrightarrow{\text{تعداد حالات}}n_2=3!=6\\ \{0,5,3\}\xrightarrow{\text{تعداد حالات}}n_3=2\times2\times1=4\Rightarrow n(A)=6+6+4+4+6=26\\ \{0,1,3\}\xrightarrow{\text{تعداد حالات}}n_4=2\times2\times1=4\\ \{3,4,5\}\xrightarrow{\text{تعداد حالات}}n_5=3!=6\end{cases}$$

۷. **گزینه ۲** مجموع اعداد روشده باید ۳، ۶، ۹ و ۱۲ شود تا مضرب ۳ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}(1,2),(2,1):\text{ حالت‌های مجموع ۳}\\ (2,4),(4,2),(1,5),(5,1),(3,3):\text{ حالت‌های مجموع ۶}\\ (3,6),(6,3),(4,5),(5,4):\text{ حالت‌های مجموع ۹}\\ (6,6):\text{ حالت‌های مجموع ۱۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}2+5+4+1=12$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{12}{6\times6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

۸. **گزینه ۳**

$$\overline{x}=\frac{a+7+10+14+11+16+18+9+20}{9}=\frac{a+105}{9}\xrightarrow{\text{فرض}}13$$

$$\Rightarrow a+105=117\Rightarrow a=12$$

حالا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$7,9,10,11,\boxed{12},14,16,18,20\Rightarrow\text{میانه}=12$$

۹. **گزینه ۲** ارتفاع AH، از رأس A می‌گذرد و بر ضلع BC عمود است، پس مختصات A و شیب BC را لازم داریم تا بتوانیم معادله‌ی AH را بنویسیم. (شیب AH، عکس و قرینه‌ی شیب BC است)

$$\text{مختصات A}=\text{محل تلاقی AC و AB}\begin{cases}y-2x=5\xrightarrow{\times(-2)}-2y+4x=-10\\ 2y-x=3\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}x=\frac{-7}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow A(-\frac{7}{3},\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow x=-\frac{7}{3}\xrightarrow{y-2x=5}y=2x+5=-\frac{14}{3}+5=\frac{1}{3}\Rightarrow A(-\frac{7}{3},\frac{1}{3})$$

$$BC:2y+3x=6\xrightarrow{\text{شیب}}m_{BC}=-\frac{\text{ضریب x}}{\text{ضریب y}}=-\frac{3}{2}\Rightarrow m_{AH}=\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی AH}}y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(x+\frac{7}{3})\xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور x‌ها}}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(x+\frac{7}{3})$$

$$\xrightarrow{\times3}-1=2x+\frac{14}{3}\Rightarrow 2x=\frac{-17}{3}\Rightarrow x=-\frac{17}{6}$$

۱۰. **گزینه ۱** شرط وجود دو ریشه مثبت آن است که $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$ باشد، پس:

$$\Delta=(m-2)^2-4(m+1)>0\Rightarrow m^2-8m>0$$

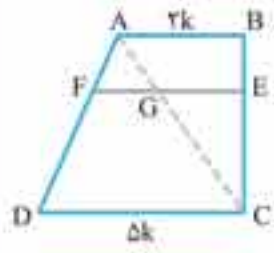
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}m<0\text{ یا }m>8\quad(1)$$

$$S=-\frac{b}{a}=-m+2>0\Rightarrow m<2\quad(2)$$

$P>0 \Rightarrow m+1>0 \Rightarrow m>-1$ ③

$\xrightarrow{① \cap ② \cap ③} -1<m<0$

۱۱. گزینه ۱



$CD=\frac{5}{2}AB \Rightarrow \frac{CD}{AB}=\frac{5}{2}$

$\xrightarrow{\text{فرض کنیم}} CD=5k, AB=2k$ ①

$AF=\frac{1}{4}AD \Rightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{1}{4}$

$\overset{\Delta}{ADC}: FG \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FG}{DC}=\frac{AF}{AD}=\frac{1}{4} \xrightarrow{DC=5k} FG=\frac{5}{4}k$ ②

$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC}: GE \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{GE}{AB}=\frac{CE}{CB} \\ FE \parallel AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس در ذوزنقه}} \frac{DF}{AD}=\frac{CE}{CB} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{GE}{AB}=\frac{DF}{AD}=\frac{3}{4} \xrightarrow{AB=2k} GE=\frac{3}{2}k$ ③

$\frac{EF}{CD}=\frac{FG+GE}{CD} \xrightarrow{①,②,③} \frac{\frac{5}{4}k+\frac{3}{2}k}{5k}=\frac{\frac{11}{4}k}{5k}=\frac{11}{20}$

۱۲. گزینه ۲

$\begin{cases} f(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1,2\} \\ g(x)=\frac{4-x^2}{|x+1|} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-1\} \end{cases}$

$D_{\frac{f}{g}}=D_g-\{x \mid \boxed{g(x)=0}\}=\mathbb{R}-\{-1\}-\{2,-2\}=\mathbb{R}-\{-1,\pm 2\}$ ①

$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$D_{\frac{f}{f}}=D_f-\{x \mid \boxed{f(x)=0}\}=\mathbb{R}-\{1,2\}-\{\frac{1}{2}\}=\mathbb{R}-\{1,2,\frac{1}{2}\}$ ②

$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$D_h=D_{\frac{g}{f}} \cap D_{\frac{f}{g}} \xrightarrow{①,②} \mathbb{R}-\{-1,2,-2,1,\frac{1}{2}\}$

$\xrightarrow{\text{تعداد نقاطی که در } \mathbb{R} \text{ نیست}}$ ۵ تا

۱۳. گزینه ۱ با کمی توجه به رابطه‌ی کمان‌ها، داریم:

$\alpha=\frac{\pi}{10} \xrightarrow[\text{کن}]{\text{جای‌گذاری}} \frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{3\pi}{10}}+\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{4\pi}{10}} \quad (*)$

$\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$

$\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{4\pi}{10}$

$\xrightarrow[(*)]{\text{جای‌گذاری در}} \frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{\sin\frac{2\pi}{10}}+\frac{\cos\frac{4\pi}{10}}{\cos\frac{4\pi}{10}}=1+1=2$

۱۴. گزینه ۲

$y=\log x^2 \xrightarrow{\text{دامنه}} x^2>0 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0\}$

در بین گزینه‌ها، فقط دامنه‌ی توابع گزینه‌های «۲» و «۴»، $\mathbb{R}-\{0\}$ است، اما گزینه‌ی «۴» با تابع داده‌شده برابر نیست، ببینید: $\log\sqrt{x^2}=\log|x| \neq \log x^2$

اما تابع گزینه‌ی «۲» با تابع داده‌شده، برابر است: $\log x^2=2\log|x|$

۱۵. گزینه ۳ با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه‌ایم!

$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\frac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to -1}\frac{4x+5}{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}=\frac{-4+5}{\frac{1}{4}}=16$

$0-\frac{-1}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$

۱۶. گزینه ۳

$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(\sqrt{ax+3})=\sqrt{a+3} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+ax)=1+a=f(1) \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \sqrt{a+3}=1+a \xrightarrow{\text{به توان دو برسون}} a+3=(a+1)^2$

$\Rightarrow a+3=a^2+2a+1 \Rightarrow a^2+a-2=0$

$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفره}} \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \quad \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$

حالا بریم سراغ خواسته‌ی تست:

$f(-\frac{3}{4})=? \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی بالا}]{-\frac{3}{4}<1} f(-\frac{3}{4})=\sqrt{a(-\frac{3}{4})+3}$

$\xrightarrow{a=1} f(-\frac{3}{4})=\sqrt{-\frac{3}{4}+3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1/5$

۱۷. گزینه ۳

$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورها}} y=\sqrt{-x}$

$\xrightarrow[y=f(x-2)]{\text{۲ واحد به طرف راست}} y=\sqrt{2-x}$

حالا باید تابع جدید را با نیمساز ناحیه‌های اول و سوم ($y=x$) قطع دهیم، بنابراین داریم: $\sqrt{2-x}=x \Rightarrow 2-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \quad \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$

۱۸. گزینه ۱

① $(fog)(x)=f(g(x))=f(x+4)=\frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{2x+7}{x+6}$

② $(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{2x-1}{x+2})=(\frac{2x-1}{x+2})+4 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{6x+7}{x+2}$

حالا شرط تساوی این دو تابع را اجرا می‌کنیم:

$\frac{2x+7}{x+6}=\frac{6x+7}{x+2} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} (2x+7)(x+2)=(x+6)(6x+7)$

$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} 2x^2+4x+7x+14=6x^2+7x+36x+42$

$\xrightarrow{\text{ساده کن}} -4x^2-32x-28=0 \xrightarrow{\div(-4)} x^2+8x+7=0$

$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=-1, -7$

۱۹. گزینه ۲ یک کسر زمانی برابر صفر است که صورت آن صفر شود، البته ریشه‌های مخرج قابل قبول نیستند!

$\sin 3x+\sin 2x=0 \Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x \Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi-2x \Rightarrow 5x=2k\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5} \\ 3x=2k\pi+\pi-(-2x) \Rightarrow x=2k\pi+\pi \end{cases}$

به ازای $x=2k\pi+\pi$ که در دایره مثلثاتی، همگی روی π می‌افتند، $\cos x=-1$ شده و مخرج صفر می‌شود، پس این دسته جواب قابل قبول نیست. بنابراین جواب نهایی $x=\frac{2k\pi}{5}$ است.

۲۰. **گزینه ۲** با توجه به شکل داریم:

$$x\to 5^- \Rightarrow f(x)\to 2^+ \Rightarrow \lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{f(x)-2}=\frac{10}{2^+-2}=\frac{10}{0^+}=+\infty=L_1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2=L_2$$

بنابراین جواب تست برابر است با: $L_1\times L_2=(+\infty)(-2)=-\infty$

۲۱. **گزینه ۲** مماس بودن دو تابع یعنی ابتدا ضابطه‌ها را تلاقی بده، سپس دلتای معادله‌ی حاصل را صفر کن؛ بنابراین:

$$2x^2-3x+6=5x+a \xrightarrow{\text{مرتب کن}} 2x^2-8x+(6-a)=0$$

$$\xrightarrow[\text{شرط مماس بودن}]{\Delta=0} (-8)^2-4(2)(6-a)=0\Rightarrow 64-8(6-a)=0$$

$$\Rightarrow 64=8(6-a)\xrightarrow{\div 8} 8=6-a\Rightarrow a=-2$$

۲۲. **گزینه ۴**

$$x\to 3^-\Rightarrow\begin{cases}[-x]=-3\\ |9-x^2|=9-x^2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{12}(-3)+9-x^2$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{x^3}{4}-x^2+9\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2-2x$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{خواسته‌ی}} f'_-(3)=-\frac{3}{4}\times 9-2\times 3=\frac{-51}{4}$$

۲۳. **گزینه ۳**

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{3}{2}$$

آهنگ لحظه‌ای fog در $x=0$ $=(fog)'(0)=g'(0)f'(g(0))$

$$\xrightarrow{g(0)=\sqrt{0+1}=1} g'(0)\times f'(1)=g'(0)\times\frac{3}{2}$$

حالا بریم سراغ محاسبه‌ی $g'(0)$

$$g(x)=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\xrightarrow{x=0} g'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

پس:

$$(fog)'(0)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

۲۴. **گزینه ۲** نقطه‌ی $(-1,6)$ اکسترمم نسبی است، پس در تابع صدق کرده و مشتق در آن صفر می‌شود.

❶ $$f(x)=ax^2+\frac{b}{x}\xrightarrow{\text{در تابع صدق بده}} 6=a(-1)^2+\frac{b}{-1}\Rightarrow 6=a-b$$

$$f'(x)=2ax-\frac{b}{x^2}\xrightarrow[f'(-1)=0]{x=-1\text{ مشتق را صفر می‌کند}}$$

❷ $$2a(-1)-\frac{b}{(-1)^2}=0\Rightarrow -2a-b=0$$

$$\xrightarrow[\text{❶ و ❷}]{\text{دستگاه بساز}}\begin{cases}a-b=6\xrightarrow{\times 2}2a-2b=12\\ -2a-b=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع کن}} -3b=12\Rightarrow b=-4$$

۲۵. **گزینه ۱** مخزن استوانه‌ای روبه‌رو، برای ساخت نیاز به دوتا درپوش دایره‌ای با مساحت πr^2 و یک ورقه‌ی مستطیلی‌شکل به طول محیط قاعده $(2\pi r)$ و عرض h دارد، پس مساحت ورقه‌هایی که روی هم نیاز است، عبارت‌اند از: $2\pi r^2+2\pi rh$

براساس قیمت ساخت داریم: $P=2\pi r^2\times 8+2\pi rh\times 10$ (*) = تابع هدف

حالا باید تابع هدف را تک‌مجهولی کنیم:

$$\text{حجم استوانه}=\pi r^2 h\xrightarrow{\text{فرض}} 200\pi\Rightarrow h=\frac{200}{r^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (*)}} P=16\pi r^2+20\pi r\times\frac{200}{r^2}=16\pi r^2+\frac{4000\pi}{r}$$

$$\Rightarrow P'=32\pi r+\frac{-4000\pi}{r^2}\xrightarrow{P'=0} 32\pi r=\frac{4000\pi}{r^2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 32r^3=4000\Rightarrow r^3=125\Rightarrow r=5$$

$$\Rightarrow h=\frac{200}{r^2}=\frac{200}{25}=8$$

۲۶. **گزینه ۱**

$$f(x)=x^3+ax^2+bx\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت فرضی}}$$

x		x_1		x_2	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

همان‌طور که می‌بینید، اگر تابع بخواهد فقط در بازه‌ی $(1,3)$ نزولی باشد، حتماً $x=1$ و $x=3$ ریشه‌های مشتق بوده‌اند! پس:

$$3x^2+2ax+b\begin{cases}\xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} S=\frac{-2a}{3}=1+3\Rightarrow a=-6\\ \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P=\frac{b}{3}=1\times 3\Rightarrow b=9\end{cases}$$

پس برای $g(x)$ داریم: $g(x)=x^2-(a+b)x+1=x^2-3x+1$

$$\xrightarrow[g'(x)=0]{\text{نقطه‌ی بحرانی}} 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

۲۷. **گزینه ۲** در دایره‌ای به مرکز (α,β) که بر هر دو محور مختصات مماس باشد، $|\alpha|=|\beta|=r$ است.

چون دایره از نقطه‌ی $(-2,1)$ گذشته (در ناحیه‌ی چهارم)، پس کل دایره در ناحیه‌ی چهارم واقع است و در نتیجه مرکزش هم در این ناحیه است، پس $\alpha>0$ و $\beta<0$ است؛ بنابراین داریم: $\alpha=-\beta=r$

معادله‌ی کلی دایره را می‌نویسیم:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\xrightarrow[\beta=-r]{\alpha=r}(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه }(-2,1)\text{ را صدق بده}}(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$\Rightarrow 1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2\Rightarrow r^2-6r+5=0$$

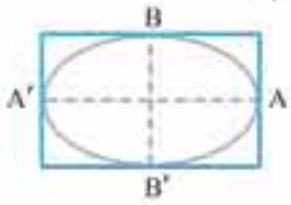
$$\xrightarrow[\text{جمع ضرایب صفره}]{\text{حل معادله}} r=1,5$$

۲۸. **گزینه ۱** برای هر مستطیل طلایی به طول x و عرض y داریم:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}\xrightarrow{y=2}\frac{x+2}{x}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2x+4=x^2\Rightarrow x^2-2x-4=0$$

$$\xrightarrow{x>0} x=\frac{2+\sqrt{4-4(-4)}}{2}=\frac{2+2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}+1$$

با توجه به شکل فرضی زیر داریم:



$$\begin{cases}BB'=2b=2\Rightarrow b=1\\ AA'=2a=\sqrt{5}+1\Rightarrow a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{6+2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-4}{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{2+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5}}=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$$

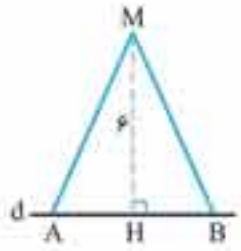
۲۹. گزینه ۱ احتمال بیکار بودن شخص، به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\xrightarrow{\text{احتمال کل}} \frac{۱۰}{۱۰۰}\times\frac{۲}{۱۰۰}+\frac{۹۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=۰/۱۸۲$$

$$P(\text{فارغ‌التحصیل دانشگاه باشد} \mid \text{بیکار باشد})=\frac{P(\text{هم فارغ‌التحصیل دانشگاه باشد و هم بیکار})}{P(\text{بیکار باشد})}$$

$$=\frac{\frac{۱۰}{۱۰۰}\times\frac{۲}{۱۰۰}}{۰/۱۸۲}=\frac{۰/۰۰۲}{۰/۱۸۲}=\frac{۲}{۱۸۲}=\frac{۱}{۹۱}$$

۳۰. گزینه ۱ شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:



$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times MH\times AB=۳۶$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۶\times AB=۳۶\Rightarrow AB=۱۲$$

$$\Rightarrow BH=۶$$

$$\overset{\triangle}{MHB}: MB^۲=MH^۲+BH^۲=۳۶+۳۶=۷۲\Rightarrow MB=۶\sqrt{۲}$$

پس اگر به مرکز M و شعاع $۶\sqrt{۲}$ کمانی بزنیم، فقط در نقاط A و B خط d را قطع می‌کند و در نتیجه فقط یک مثلث وجود دارد.

آزمون شماره ۹۸

۱. گزینه ۴ روش اول:

$$\Rightarrow ۳۹-(۹+۷+۵)=۱۸$$

روش دوم: اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامه دیواری را با B نمایش دهیم، داریم:

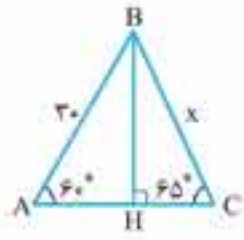
$$n(\text{فقط ورزش})=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۹=۱۶-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۷$$

$$n(\text{نه ورزش نه روزنامه})=n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))=۳۹-(۱۶+۱۲-۷)=۱۸$$

۲. گزینه ۲



$$\overset{\triangle}{ABH}: \sin ۶۰^\circ=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۳۰}\Rightarrow BH=۱۵\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{BHC}: \sin ۶۵^\circ=\frac{BH}{BC}\Rightarrow ۰/۹=\frac{BH}{x}\xrightarrow{BH=۱۵\sqrt{۳}}\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{x}$$

$$\Rightarrow ۹x=۱۵۰\sqrt{۳}\Rightarrow x=\frac{۱۵۰\sqrt{۳}}{۹}\xrightarrow{\text{ساده کن}}x=\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$$

۳. گزینه ۲

$$A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^۲\times\sqrt[۳]{۲^۴}}\times(۲^{-۱})^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^۲\times۲^{\frac{۴}{۳}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۱۰}{۳}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۶}{۳}}=۲^۲=۴$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{خواسته‌ی}}(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=(۲\times۴)^{-\frac{۱}{۳}}=۸^{-\frac{۱}{۳}}=(۲^۳)^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۴. گزینه ۲ برای این‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم، دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، باید $\Delta>۰$ باشد؛ بنابراین:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۶m)^۲-۴(۲m-۱)(m-۲)=۳۶m^۲-۴(۲m^۲-۵m+۲)$$

$$\Rightarrow \Delta=۲۸m^۲+۲۰m-۸=۴(۷m^۲+۵m-۲)$$

$$\xrightarrow{\Delta>۰}۴(۷m^۲+۵m-۲)>۰\Rightarrow ۷m^۲+۵m-۲>۰\xrightarrow[a+c=b]{\text{ریشه‌ها}}m=-۱,\frac{۲}{۷}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}\begin{array}{c|ccccc} m & & -۱ & & \frac{۲}{۷} & \\ ۷m^۲+۵m-۲ & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}\Rightarrow m<-۱ \text{ یا } m>\frac{۲}{۷}$$

از آنجایی که معادله‌ی داده‌شده، درجه‌ی دو است، باید ضریب $x^۲$ مخالف صفر باشد، پس:

$$۲m-۱\neq ۰\Rightarrow m\neq\frac{۱}{۲}$$

پس جواب نهایی تست به‌صورت زیر است:

$$m<-۱ \text{ یا } m>\frac{۲}{۷} \text{ و } m\neq\frac{۱}{۲}$$

۵. گزینه ۱

$$y=-x^۲+۲x+۵\xrightarrow[x\to x-۳]{\text{۳ واحد به راست}}y=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}}y=-x^۲+۶x-۹+۲x-۶+۵=-x^۲+۸x-۱۰$$

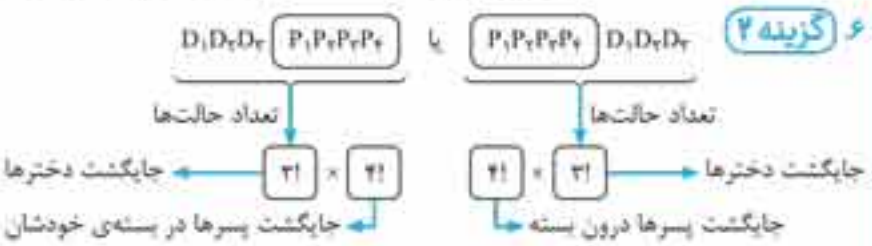
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=-x^۲+۸x-۱۲$$

حال بازه‌ای را می‌خواهیم که تابع y، بالای نیمساز ربع اول باشد؛ بنابراین:

$$-x^۲+۸x-۱۲>x\Rightarrow -x^۲+۷x-۱۲>۰\xrightarrow{\times(-۱)}x^۲-۷x+۱۲<۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)(x-۴)<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۳<x<۴$$

۶. گزینه ۲



کل حالت‌ها، جابه‌جایی افراد $\boxed{P_۱\ P_۲\ P_۳\ P_۴}$ ، $D_۱$ ، $D_۲$ ، $D_۳$ است. یعنی انگار ۴ نفر که خب می‌شود ۴! اما با در نظر گرفتن جایگشت پسرهای درون بسته می‌شود: ۴! × ۴!

بهتر است از راه متمم استفاده کنیم، بدین منظور ۴ پسر را باهم و ۳ دختر را با هم طناب‌پیچ کرده و جایگشت آن‌ها را از کل حالت‌ها کم می‌کنیم. ۳! × ۴! − ۲ × ۴! × ۴!

$$=۴!(۴!-۲\times۳!)=۴!(۲۴-۲(۶))=۴!\times۱۲$$

۷. گزینه ۴ رنگ اتومبیل‌ها را نمی‌توان با عدد معرفی کرد، پس کیفی است و چون ترتیب خاصی در بین رنگ‌ها نداریم، پس کیفی اسمی است.

۸. گزینه ۴ حالت‌های مطلوب به‌صورت ۲ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی قرمز یا ۲ مهره‌ی قرمز و ۱ مهره‌ی آبی است، پس:

$$\begin{cases} n(A)=\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۶}{۱}\binom{۳}{۲}=۱۵\times۳+۶\times۳=۶۳ \\ n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۶}=\frac{۹\times۸\times۷}{۶}=۸۴ \end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{۶۳}{۸۴}=\frac{۳}{۴}$$

۹. گزینه ۳

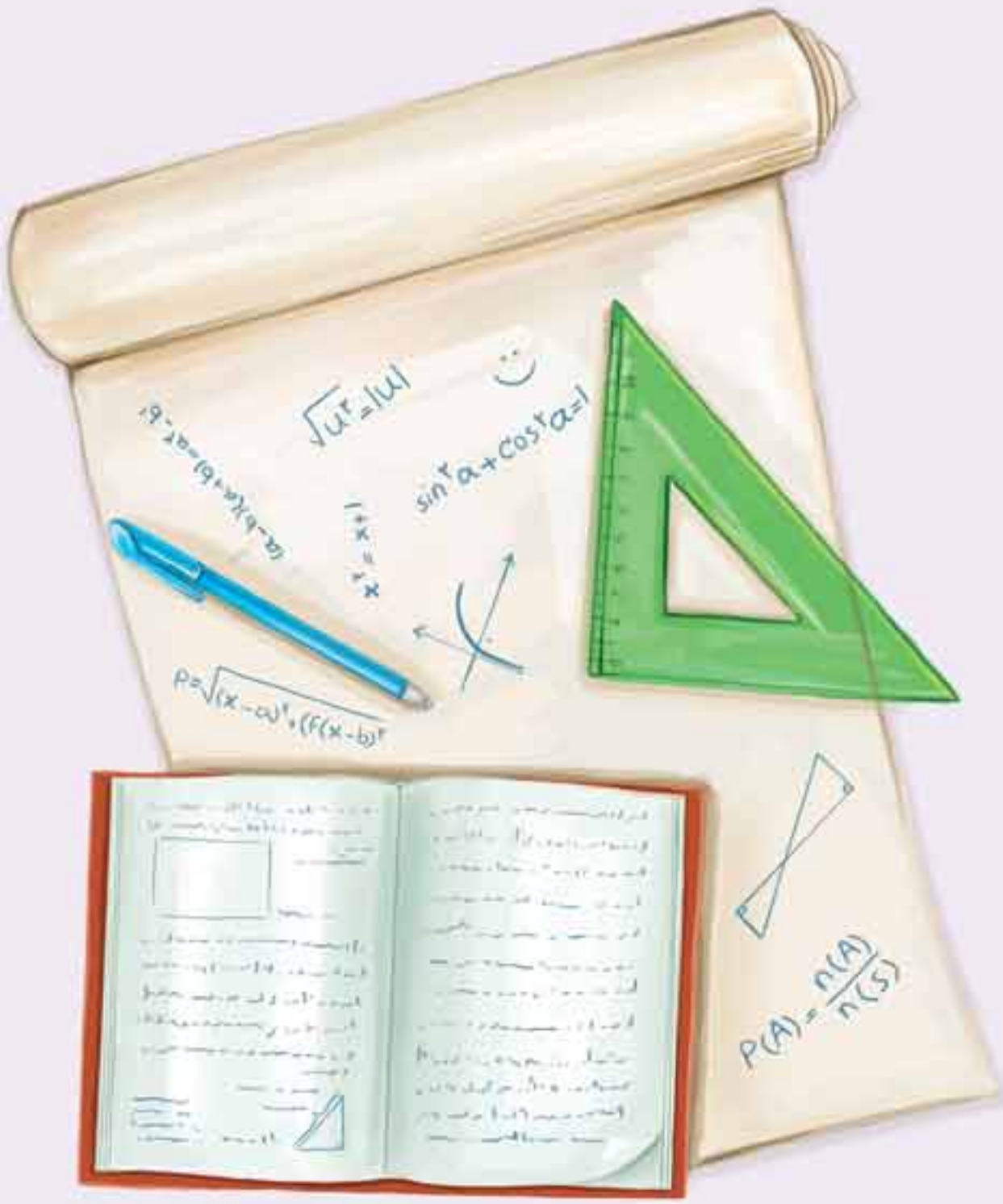
$$y=x-۲\xrightarrow{\text{نقطه‌ی A را فرض کن}}A(m\ ,\ m-۲)\xrightarrow{\text{فاصله تا }۲x+۵y-۳=۰}$$

$$h=\frac{|۲(m)+۵(m-۲)-۳|}{\sqrt{۲^۲+۵^۲}}\overset{\text{فرض}}{=\!=}\sqrt{۲۹}\Rightarrow\frac{|۷m-۱۳|}{\sqrt{۲۹}}=\sqrt{۲۹}$$

$$\Rightarrow |۷m-۱۳|=۲۹$$

$$\Rightarrow ۷m-۱۳=\pm۲۹\Rightarrow\begin{cases} ۷m-۱۳=۲۹\Rightarrow m=۶ \\ ۷m-۱۳=-۲۹\Rightarrow m=-\frac{۱۶}{۷} \end{cases}$$

بخش ۵



فرمولنامه

ریاضی، درسی مفهومی و فهمیدنی است! با این حال نمی‌توانیم از اهمیت فرمول‌ها و رابطه‌ها و البته به‌خاطر سپاریِ آن‌ها برای حل تست غفلت کنیم...

این بخش پایانی اختصاص به فرمول‌ها و رابطه‌هایی دارد که در هر فصل ریاضی کنکورتان با آن‌ها مواجه شده‌اید؛ قبل از شروع هر آزمونی می‌توانید نگاهی به فرمول‌های مرتبط آن بیندازید.

تمام فرمول‌ها و نکات مهم ریاضی تجربی کنکور، به تفکیک فصل و مناسب مرور و تثبیت...

فصل ۷: قدر مطلق و جز صحیح

۱ قدرمطلق:

$$|u| \geq 0$$

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

۲ قدرمطلق و رادیکال: $\sqrt{u^2} = |u|$

۳ معادله‌ی قدرمطلقی خاص:

$$|A| + |B| + |C| = 0 \Rightarrow A = B = C = 0$$

۴ نامعادله‌ی قدرمطلقی:

$$|u| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq u \leq k$$

$$|u| \geq k \xrightarrow{k>0} u \geq k \text{ یا } u \leq -k$$

۵ ایجاد قدرمطلق:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$x \leq a \text{ یا } x \geq b \Rightarrow |x - \frac{a+b}{2}| \geq \frac{b-a}{2}$$

۶ جزءصحیح: $[u] \in \mathbb{Z}$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

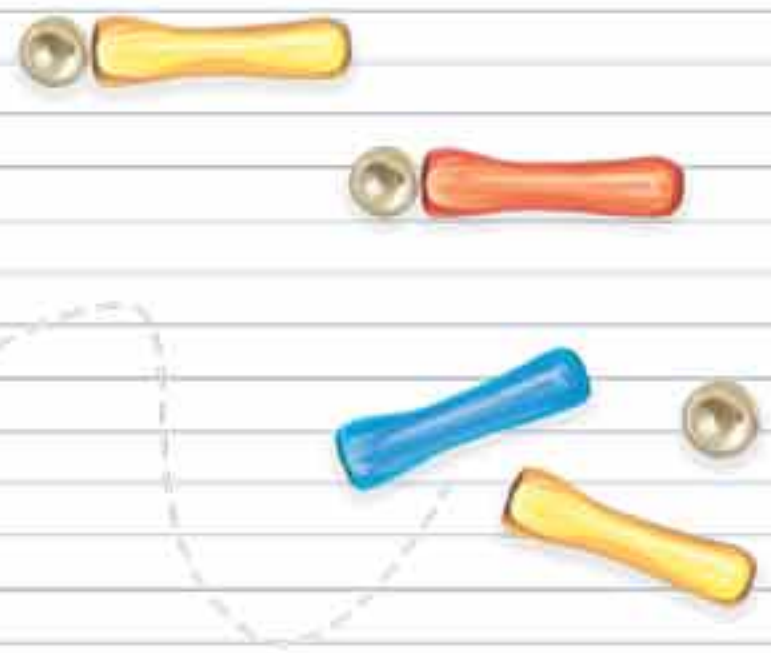
اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آن‌وقت $[x]$ می‌شود اولین عدد صحیح قبل از x

۷ ویژگی‌های جزءصحیح:

اگر $[a] = m$ آن‌وقت: $m \leq a < m+1$

$$0 \leq u - [u] < 1$$

$$[x+n] = [x] + n \quad (n \in \mathbb{Z})$$



فصل ۸: تابع

۱ مفهوم تابع: $(a,b) \in f \Rightarrow f(a) = b$

۲ برخورد دو تابع: g, f تلاقی $\Rightarrow f(x) = g(x)$

تلاقی f با محور xها: $f(x) = 0$

۳ انواع تابع:

همانی: $f(x) = x$

ثابت: $f(x) = c$

خطی: $f(x) = ax + b$

چندجمله‌ای: $(n \in \mathbb{N})\ f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$

۴ دامنه‌ی تابع:

$u \neq 0$: $y = \frac{}{u}$

$u \geq 0$: $y = \sqrt[2n]{u}$

$u, v > 0, v \neq 1$: $y = \log_v u$

۵ برد تابع:

چندجمله‌ای

- درجه فرد: $\mathbb{R}$
- درجه ۲: $y = ax^2 + bx + c$
  - $a > 0$: $R = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$
  - $a < 0$: $R = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$

هموگرافیک: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$: $R = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$

۶ تابع وارون:

$$R_f = D_{f^{-1}},\ D_f = R_{f^{-1}}$$

$f(\alpha) = \beta \Rightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$ یا $(\alpha, \beta) \in f \Rightarrow (\beta, \alpha) \in f^{-1}$

۷ دو خط وارون هم:

$$\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{c}{c'}$$

۸ اعمال جبری روی دو تابع:

دامنه:

$$D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g ; g(x) \neq 0$$

ضابطه:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

۹ تابع ترکیبی: $(\frac{f+kg}{h})(\alpha) = \frac{f(\alpha)+kg(\alpha)}{h(\alpha)}$

۱۰ ضابطه‌ی تابع مرکب:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

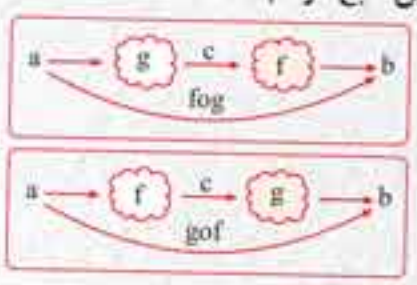
$$(gof)(x) = g(f(x))$$

۱۱ دامنه‌ی تابع مرکب:

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_{gof} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

۱۲ ماشین تابع مرکب:



۱۳ عضو در تابع مرکب:

$$(a,b) \in fog \Rightarrow (a,m) \in g, (m,b) \in f$$

$$(a,b) \in gof \Rightarrow (a,n) \in f, (n,b) \in g$$

۱۴ f و f^{-1}:

$$(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$$

$$fof^{-1} = \{(a,a) \mid a \in R_f\}$$

$$f^{-1}of = \{(b,b) \mid b \in D_f\}$$

$D_f = R_f$ مگر $fof^{-1} \neq f^{-1}of$

۱۵ پخش شدن $^{-1}$:

$$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$$

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

۱۶ بررسی رفتار:

صعودی = صعودی + صعودی

نزولی = نزولی + نزولی

صعودی = صعودی o صعودی

صعودی = نزولی o نزولی

ضرب عدد منفی رفتار تابع را عوض می‌کند ولی عدد مثبت، نه!!

۱۷ رفتار f و f^{-1}:

f اکیداً صعودی $\Leftrightarrow$ f^{-1} اکیداً صعودی

f اکیداً نزولی $\Leftrightarrow$ f^{-1} اکیداً نزولی