

به نام پروردگار مهربان

ریاضی و آمار یازدهم انسانی

محمد فضائی

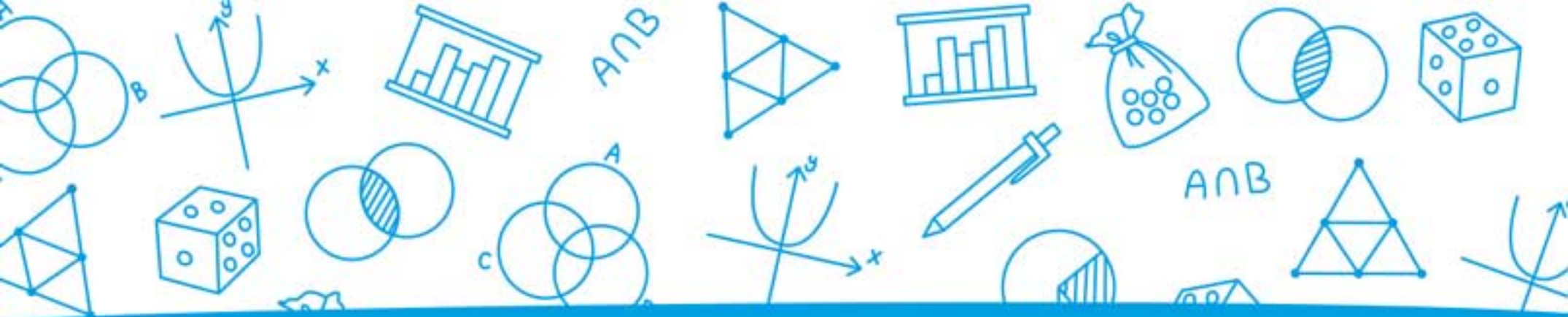
مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه

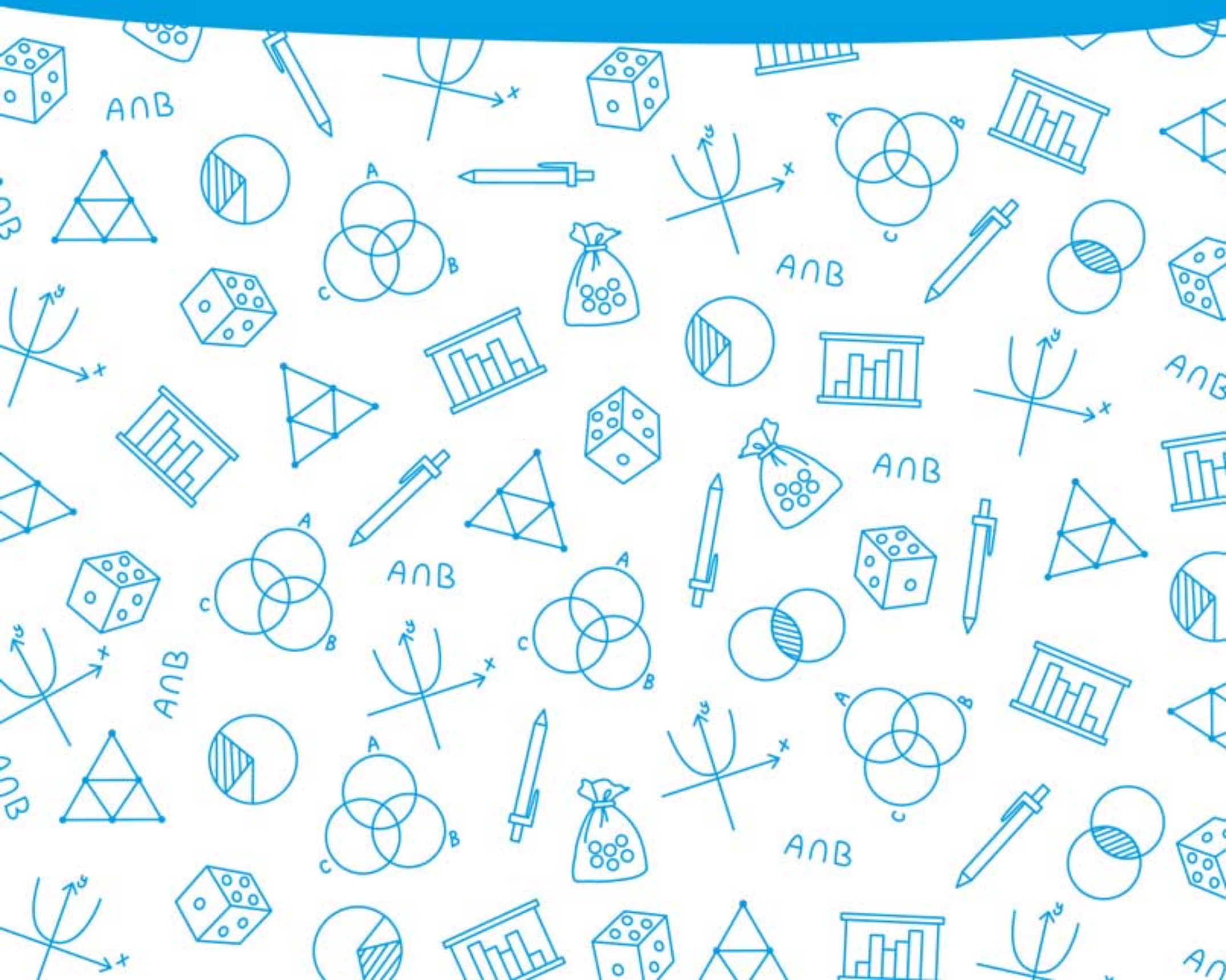
فهرست

- فصل ۱ آشنایی با منطق و استدلال ریاضی ۷
- فصل ۲ تابع ۳۹
- فصل ۳ آمار ۷۷
- فرمول‌نامه ۱۰۳
- بارمبندی درس‌ها ۱۱۲



فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس اول

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

- ◀ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها
- ◀ جبر گزاره‌ها
- ◀ نقیض گزاره‌ها
- ◀ گزاره‌های هم‌ارز
- ◀ ترکیب گزاره‌ها
- ◀ ترکیب عطفی دو گزاره
- ◀ ترکیب فصلی دو گزاره
- ◀ ترکیب شرطی دو گزاره
- ◀ ترکیب دو شرطی

استدلال ریاضی

درس دوم

- ◀ استدلال ریاضی
- ◀ قیاس
- ◀ استدلال استثنایی
- ◀ استدلال مغالطه
- ◀ استدلال عکس نقیض گزاره شرطی
- ◀ یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد



درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

وعدۀ ۱



گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

منطق ریاضی: روش‌های درست و منطقی استدلال کردن در ریاضی را به ما یاد می‌دهد. منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی است.

چاشنی: گزاره: جمله یا عبارتی خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد. هرچند درستی یا نادرستی گزاره بر ما معلوم نباشد؛ اما گزاره در یک زمان نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

مثال: درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.

(مشابه فعالیت صفحه ۲)

(الف) ۵ عددی فرد است.

یک گزاره با ارزش درست است.

(ب) بیشتر مسئله حل کن.

گزاره نیست، چون جمله امری است.

(پ) a عددی گنگ است.

گزاره نیست، چون ما نمی‌دانیم a چه عددی است (a مجهول است).

(ت) $4 - 2 \times 7 = 2^3$

گزاره‌ای با ارزش نادرست است؛ زیرا:

سمت چپ تساوی $4 - 2 \times 7 = 4 - 14 = -10$

سمت راست تساوی $2^3 = 8$

سمت چپ تساوی با سمت راست تساوی برابر نیست.

یادداشت: به عبارتهایی که ظاهراً گزاره هستند ولی در آنها مجهول وجود دارد و نمی‌دانیم که مجهول چه عددی است، عبارتهای گزاره‌نما می‌گوییم. مانند گزاره « a عددی گنگ است» در مثال قبل.

در منطق ریاضی، بعضی از جملات خبری، که نمی‌توانیم درباره درستی یا نادرستی آنها اظهار نظر کنیم، گزاره محسوب نمی‌شوند، مانند جملات سلیقه‌ای، نامفهوم و بی‌معنی، امری، پرسشی و عاطفی.

مثال: درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص

کنید. (مشابه فعالیت صفحه ۲)

الف) فردا ساعت ۹ در مدرسه برای کلاس ریاضی حاضر باشید. گزاره نیست، چون جمله امری است.

ب) مربع، زیباترین شکل چهارضلعی است.

گزاره نیست، چون زیبایی یک موضوع سلیقه‌ای است.

پ) درس ریاضی از درس زبان سخت‌تر است.

این جمله خبری است، ولی ارزش آن مشخص نیست؛ چون شاید از نظر یک نفر، درس ریاضی و از نظر فرد دیگر، درس زبان سخت‌تر باشد، پس گزاره نیست.



تذکره: مهم این است که بتوانیم در یک جمله خبری، دقیقاً ارزش درست یا نادرست بودن جمله را مشخص کنیم.

وعدۀ ۲

جبر گزاره‌ها



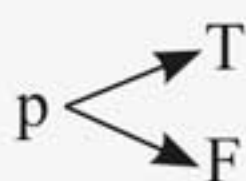
گزاره‌ای که شامل چند گزاره باشد، گزاره ترکیبی نامیده می‌شود. برای درستی یا نادرستی گزاره‌های ترکیبی از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌کنیم که به آنها جبر یا حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم:
گزاره‌ها: p, q, r, s, \dots

T یا True یا د: ارزش درست

F یا False یا ن: ارزش نادرست

یادداشت: اگر گزاره‌ای به نام p داشته باشیم، همیشه دو



حالت ارزشی دارد، درست است، یا نادرست.

اگر دو گزاره به نام‌های p و q داشته باشیم، همیشه چهار حالت ارزشی داریم.

p	q	حالت ارزشی
T	T	هر دو گزاره درست
T	F	اولی درست، دومی نادرست
F	T	اولی نادرست، دومی درست
F	F	هر دو گزاره نادرست

به همین ترتیب اگر سه گزاره به نام‌های p ، q و r داشته باشیم، ۸ حالت ارزشی داریم. به طور کلی: اگر n گزاره داشته باشیم، تعداد 2^n حالت ارزشی داریم.

تذکر: جدولی که ارزش گزاره‌ها را، در آن به ترتیب قرار می‌دهیم، جدول درستی یا ارزشی نام دارد.

مثال: اگر پنج گزاره داشته باشیم در جدول ارزشی چند حالت یار دیف ارزشی داریم؟

حالت $32 = 2^5$

پاسخ

وعدۀ ۳

نقیض گزاره‌ها



نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است، که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اصلی باشد.

$p \xrightarrow{\text{نقیض}} \sim p$

علامت نقیض به صورت « \sim » است.

چاشنی: برای ساختن نقیض یک گزاره کافی است، در جملات فارسی فعل جمله را نفی کنیم.

نیست $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ است

نباشد $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ باشد

می‌توانیم در ابتدای جمله از عبارت «چنین نیست که» استفاده کنیم و کاری به فعل جمله نداشته باشیم.



درس ۱

توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

وعدۀ ۱



یادآوری مفهوم تابع، دامنه و برد

تابع

تابع: یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به B) یک تابع نامیده می‌شود، هر گاه به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد. به زبان ساده‌تر، تابع را می‌توان یک ماشین در نظر گرفت، که به ازای هر مقدار اولیه‌ای که به آن می‌دهیم، تنها یک کالا تولید کند و خروجی بیرون دهد.

دامنه: مجموعه مقادیری است که متغیر مستقل x دارد و آن را با D_f نشان می‌دهیم.

برد: مجموعه مقادیری است که متغیر وابسته y دارد، در واقع مقادیری هستند، که متغیرهای x به آن‌ها نظیر شده و با R_f نمایش می‌دهیم.

یادداشت: اگر تابع f از مجموعه A به B نظیر شده باشد، آن را به صورت:

$$\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

می‌نویسیم که $y = f(x)$ ضابطه تابع، A دامنه تابع و اعضای برد اعضای B هستند و از ضابطه f به دست می‌آیند.

مثال: کدام رابطه بیانگر یک تابع است؟

الف) رابطه بین هر دانش آموز و روز تولدش
هر دانش آموز تنها یک روز تولد دارد، بنابراین این رابطه تابع است.

ب) رابطه بین هر فرد ایرانی و ورزش مورد علاقه آن
هر فرد می تواند به دو یا سه یا چند ورزش علاقه داشته باشد، پس این رابطه تابع نیست.

وعدۀ ۲



نمایش های یک رابطه برای بیان تابع بودن

چهار حالت نمایش مختلف، برای بیان تابع بودن یک رابطه وجود دارد.

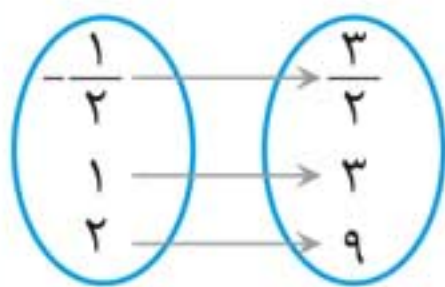
۱ نمایش پیکانی

وقتی یک رابطه تابع است که از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً یک پیکان خارج شود.

مثال: تابع $A = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$ و $f : A \rightarrow B$ را در نظر

بگیرید، این تابع را در نمایش پیکانی نشان دهید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.
(فعالیت صفحه ۲۲)

پاسخ



$$D_f = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$$

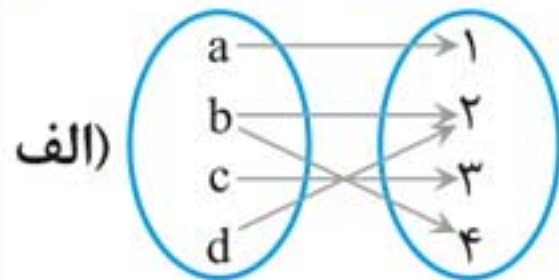
$$R_f = \{\frac{3}{2}, 3, 9\}$$

نمایش پیکانی رابطه فوق بیانگر یک تابع است.

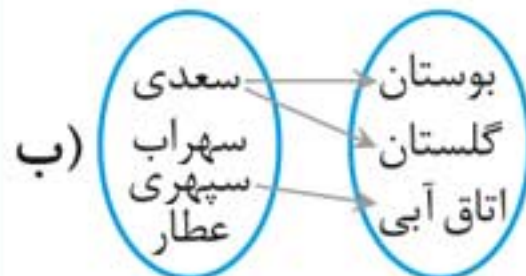


مثال: تابع بودن هریک از نمایش‌های پیکانی زیر را مشخص کنید.

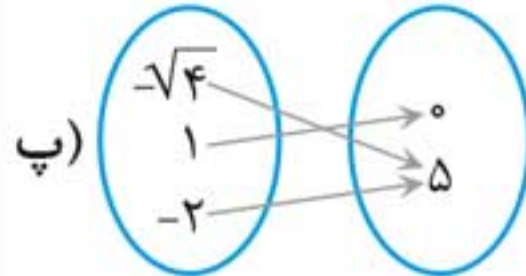
(مشابه کار در کلاس صفحه ۲۳)



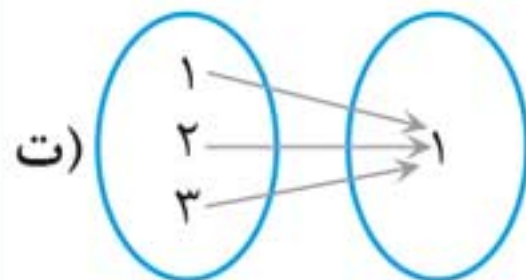
از عضو b در مجموعه اول، دو پیکان خارج شده است، پس تابع نیست.



خالق کتاب‌های بوستان و گلستان، سعدی است؛ لذا از سعدی در مجموعه اول، دو پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست (غیر از آن نباید عطار موجود باشد).



$-\sqrt{4} = -2$ ، پس این رابطه تابع است، چون از هر عضو از مجموعه اول فقط و دقیقاً یک پیکان به سمت اعضای مجموعه دوم خارج شده است.



$$R_f = \{1\}$$

تابع است. در این تابع، برد فقط یک عضو دارد.



مثال: نماتوپ فردی با قد ۱۸۰ سانتی متر، برابر ۲۵ است، وزن او چند است؟ ($180\text{ cm} = 1/8\text{ m}$)

پاسخ

$$\text{BMI} = \frac{\text{وزن}}{\text{قد} \times \text{قد}} \Rightarrow 25 = \frac{x}{(1/8) \times (1/8)}$$

$$\Rightarrow x = 25 \times 1/8 \times 1/8 = 81 \text{ کیلوگرم}$$

مثال: BMI فردی ۲۰ ساله را با وزن ۹۰ کیلوگرم و قد ۱۷۰ سانتی متر به دست آورید. مشخص کنید این فرد اضافه یا کمبود وزن دارد یا خیر؟ (نماتوپ ایده آل فرد ۲۰ ساله ۲۲ است)

پاسخ

$$\text{BMI} = \frac{90}{(1/7)^2} = \frac{90}{2/49} = 31/14$$

از آن جایی که BMI این فرد بیشتر از ۲۲ است، بنابراین این فرد اضافه وزن دارد.

وعدۀ ۷

شاخص پایه آموزش



خوانایی

خوانایی متن، میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت دستور نگارش است.

شاخص پایه آموزش، یکی از شاخص‌های خوانایی که سال‌های تحصیل (پایه تحصیلی) یک خواننده متون انگلیسی را تخمین می‌زند و همیشه عددی بین ۱ تا ۱۲ است.

$$\text{شاخص پایه آموزش} = \left[\frac{\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار}}{4} \times 0/4 \right]$$

◀ کلمات دشوار

کلمات دو هجا، بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان است.

مثال: در یک کتاب هر جمله به طور میانگین دارای ۱۷ کلمه است و ۱۰ درصد لغات دشوار هستند، شاخص پایه آموزش را به دست آورید؟

پاسخ

$$10 = [10 / 8] = [(10 + 17) \times 0 / 4] = \text{شاخص پایه آموزش}$$

مثال: کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمه سخت داریم. شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید. این کتاب مناسب چه پایه‌ای است؟
(تمرین صفحه ۶۲)

پاسخ

$$11 = [11 / 2] = [(20 + 8) \times 0 / 4] = \text{شاخص پایه آموزش}$$

این کتاب مناسب دانش آموزان پایه ۱۱ ام است.

چاشنی: از مزایای شاخص پایه آموزش این است که استفاده از این شاخص ساده است. با این حال، فرض کنید که کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی‌تر، باعث دشوار شدن متن می‌شوند، اما یک نویسنده چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث آسان و ساده‌تر شدن متن شود.

پیوست

فرمول نامه

منطق و استدلال ریاضی

۱ منطق:

الف. بررسی استدلال‌ها

ب. روش درست فکر کردن

۲ گزاره: جمله‌ای خبری است، که دقیقاً دارای ارزش درست یا نادرست می‌باشد.

گزاره: p یا q یا r یا...

درست: T یا ۱

نادرست: F یا ۰

۳ تعداد حالت‌های ارزشی n گزاره برابر ۲^n است.

۴ نقیض گزاره: $\sim p$ یا $\sim q$ یا $\sim r$ یا...

الف. می‌خوانیم نقیض p یا چنین نیست که $p \dots$

ب. فعل گزاره p را نفی می‌کنیم.

پ. ارزش یک گزاره را برعکس می‌کنیم.

ت. ارزش نقیض نقیض یک گزاره $(\sim(\sim p))$ با ارزش خود گزاره (p) یکسان است.

۵ به مفاهیمی مثل مربع کامل بودن، اول یا مرکب بودن،

مضرب‌های یک عدد، مقسوم‌علیه‌های یک عدد و مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی، گویا، گنگ و حقیقی توجه کنید.

۶ مفاهیم حد، میانگین و میانه سال دهم را مطالعه کنید.

۷ نحوه تشکیل دادن جدول ارزش‌ها، بسیار مهم است.

۸ انواع گزاره‌ها:

الف. ساده: قابل تجزیه نیست.

ب. مرکب: ترکیبی از چند گزاره ساده است.



۹ رابطه ترکیبی گزاره‌ها:

الف. یا: \vee ب. و: \wedge

پ. اگر، آنگاه: \Rightarrow ت. اگر و تنها اگر: \Leftrightarrow

برای تعیین ارزش گزاره‌ها به این موضوع توجه کنید که گزاره ساده است یا مرکب. اگر مرکب بود به حروف رابط به کار رفته در آن دقت کنید.

۱۰ ترکیب عطفی $p \wedge q$

$\xrightarrow{د}$ هر دو «درست»

$\xrightarrow{ن}$ حداقل یکی «نادرست»

۱۱ ترکیب فصلی $p \vee q$

$\xrightarrow{د}$ حداقل یکی «درست»

$\xrightarrow{ن}$ هر دو «نادرست»

۱۲ ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$

$\xrightarrow{د}$ هر دو «درست» یا هر دو «نادرست» یا مقدم یعنی p «نادرست» (به انتفای مقدم)

$\xrightarrow{ن}$ مقدم یعنی p «درست» و تالی یعنی q «نادرست»

۱۳ ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$

$\xrightarrow{د}$ هر دو «درست» یا هر دو «نادرست»

$\xrightarrow{ن}$ یکی «درست» و یکی «نادرست»

۱۴ هم‌ارزی: یکسان بودن ارزش دو گزاره یا دو عبارت $p \equiv q$

۱۵ هم‌ارزی‌های مهم

قانون دمورگان

$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$