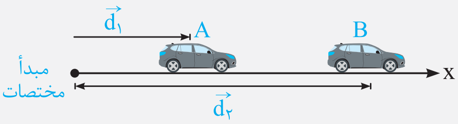
۱ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱ — مفاهیم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده (تست‌های ۱ تا ۶)

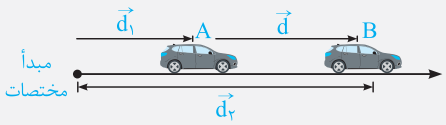
تو اولین مرحلهٔ ورودتون به دوازدهم، بریم ببینیم پارامترهای بردار مکان و جابه‌جایی چی هستن؟ ایشالا که تا آخر کتاب خیلی خوش بگذره.

۱- بردار مکان و جابه‌جایی

بردار مکان: در شکل مقابل اتومبیلی بر روی محور x در حال حرکت است. **بردار مکان** در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده‌شده است.



بردار تغییر مکان (جابه‌جایی): متحرک نشان داده‌شده در شکل مقابل، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از نقطهٔ A تا نقطهٔ B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازهٔ زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازهٔ زمانی متصل می‌کند.



تذکر همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی معادل با تفاضل بردارهای مکان در نقاط A و B است.

$$\vec{d} = \vec{d}_B - \vec{d}_A = \vec{d}_2 - \vec{d}_1$$

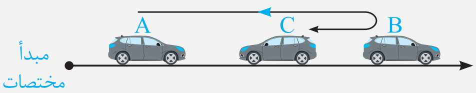
انتهای $\vec{d}_1$ به $\vec{d}_2$

$$\vec{d}_2 - \vec{d}_1$$

خوب یادتون باشه که بردار $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$، از انتهای $\vec{d}_1$ به انتهای $\vec{d}_2$ وصل میشه.

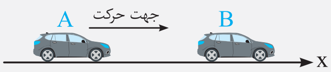
۲- مسافت طی‌شده

فرض کنید مطابق شکل، اتومبیلی از نقطهٔ A به B رفته و سپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C بازگردد. به طول مسیر طی‌شده توسط اتومبیل، مسافت پیموده‌شده یا به اختصار مسافت می‌گویند.



تذکر همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی‌شدهٔ ABC از طول پاره‌خط AC (جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «**مسافت طی‌شده توسط یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است.**»

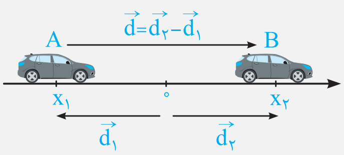
تذکر در شکل زیر یک اتومبیل در جهت محور x مستقیماً از A به B منتقل شده است. در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی‌شده با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌اندازه با طول پاره‌خط AB است.



$$\underbrace{l}_{\text{مسافت طی‌شده}} = \underbrace{|\vec{d}|}_{\text{اندازهٔ بردار جابه‌جایی}} = AB$$

نکات مهم و کاربردی

۱ فرض کنید متحرکی مطابق شکل مقابل از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کند. بدین‌ترتیب بردار مکان متحرک در نقاط A و B و بردار جابه‌جایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.



$$\vec{d}_1 = x_1\vec{i} \ , \ \vec{d}_2 = x_2\vec{i} \Rightarrow \vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 = x_2\vec{i} - x_1\vec{i} = (x_2 - x_1)\vec{i} = \Delta x\vec{i}$$

۲ اگر متحرک در سمت راست مبدأ باشد (B)، بردار مکان در جهت محور x قرار دارد و اگر متحرک در سمت چپ مبدأ باشد (A)، بردار مکان در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

۳ در هنگام عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، این موضوع از نکات تست‌خیز این خلاصه نکات محسوب می‌شود.

۴ اگر $\Delta x > 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در جهت محور x و اگر $\Delta x < 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در خلاف جهت محور x است.

۵ مسافت طی‌شده کمیتی نرده‌ای بوده و جابه‌جایی کمیتی برداری است.

حالا بریم با یه تمرین دُرُستِ حسابی، مطالب این خلاصه‌نکات رو جمع‌بندی کنیم ...

تمرین ۱ در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده‌شده بر روی محور x از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و به نقطهٔ B می‌رود و سپس از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ C باز می‌گردد. کدام عبارت در مورد حرکت این اتومبیل از A تا C نادرست است؟

۱) بردار مکان متحرک در نقطهٔ C، برابر $-\vec{i}$ در SI می‌باشد.
۲) ۸ متر از مسافت طی‌شده، در خلاف جهت محور x است.
۳) این متحرک از A تا C، مسافت ۱۰ m را طی کرده است.
۴) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C، برابر $۶\vec{i}$ در SI می‌باشد.

پاسخ برای تحلیل این سؤال آموزشی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) بردار مکان متحرک در نقاط A، B و C به‌صورت زیر است.

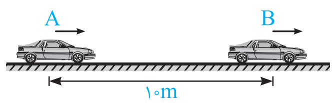
$$\vec{d}_A = ۵\vec{i} \qquad \vec{d}_B = -۳\vec{i} \qquad \vec{d}_C = -۱\vec{i}$$

۲) این متحرک از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، ۸ m در خلاف جهت محور x و از نقطهٔ B تا نقطهٔ C، ۲ m در جهت محور x حرکت کرده است و در مجموع مسافتی به اندازهٔ ۱۰ m را طی کرده است.

۳) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{d} = \vec{d}_C - \vec{d}_A = -۱\vec{i} - ۵\vec{i} = -۶\vec{i}$$

بنابراین تنها عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۴) نادرست است.



در صورتی‌که متحرکی بر روی یک خط راست جابه‌جا شود و در طول حرکت تغییر جهت ندهد، آن‌گاه مسافت طی‌شده و جابه‌جایی متحرک با یک‌دیگر برابر است. به طور مثال در شکل مقابل، اگر اتومبیل ۱۰ متر در مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت حرکت کند، می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow \underset{\text{مسافت طی‌شده}}{l} = \underset{\text{جابه‌جایی}}{\Delta x} = ۱۰\,m$$

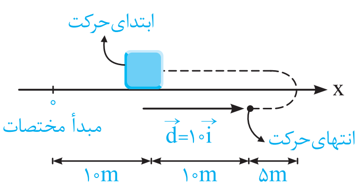
عبارت صحیح: «مسافت طی‌شده توسط متحرک همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی آن است.»

دقت شود که با توجه به خلاصه نکات فوق، سایر گزینه‌ها صحیح می‌باشند.

۲ ۲ همان‌طور که می‌دانیم، جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی تنها به مکان ابتدایی و انتهایی متحرک در آن بازه بستگی داشته (یعنی مستقل از مسیر حرکت است) و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

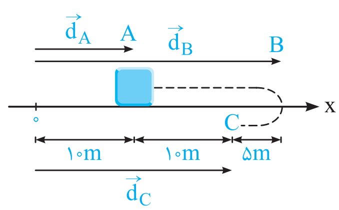
$$\begin{cases} t_۱ \to x_۱ = -۳\,m \\ t_۲ \to x_۲ = +۳\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = +۳ - (-۳) = +۶\,m$$

$$\begin{cases} t_۱ \to x_۱ = -۳\,m \\ t_۳ \to x_۳ = +۹\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۳ - x_۱ = +۹ - (-۳) = +۱۲\,m$$



۳ ۲ ابتدا باید دقت شود که بردار مکان، از مبدأ به محل جسم متصل می‌شود. با توجه به این‌که در این سؤال، جسم همواره در سمت راست مبدأ قرار دارد ($x > ۰$)، بردار مکان آن ($\vec{d}_۱ = x\vec{i}$)، همواره در جهت محور x قرار دارد (فریب برگشتن متحرک در B را نخورید.).

از سوی دیگر برای یافتن بردار جابه‌جایی در طول حرکت، کافیست مطابق شکل، برداری را که مستقیماً از نقطهٔ ابتدای حرکت به نقطهٔ انتهای حرکت متصل می‌شود را رسم کنیم:



۴ ۳ **روش اول:** مطابق شکل مقابل بردارهای مکان متحرک را در نقاط A، B و C رسم کرده و اندازهٔ آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{d}_A = ۱۰\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_A| = ۱۰\,m$$

$$\vec{d}_B = ۳۰\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_B| = ۳۰\,m$$

$$\vec{d}_C = ۲۰\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_C| = ۲۰\,m$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اندازهٔ بردار مکان این متحرک، ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

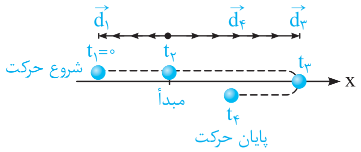
روش دوم: همواره با دور شدن متحرک از مبدأ، اندازهٔ بردار مکان آن افزایش و با نزدیک شدن متحرک به مبدأ، اندازهٔ بردار مکان آن کاهش می‌یابد. با توجه به این موضوع، در این سؤال در طی حرکت از A تا B، اندازهٔ بردار مکان در حال افزایش و از B تا C، اندازهٔ بردار مکان در حال کاهش است.

۵ ۲ برای پاسخ به این سؤال مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 متحرک در سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و بردار مکان آن در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

۲) در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 متحرک در سمت راست مبدأ مختصات قرار می‌گیرد و بردار مکان آن در جهت محور x می‌باشد.

۳) در لحظهٔ t_2، متحرک از مبدأ عبور کرده و بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. به شکل مقابل دقت کنید:

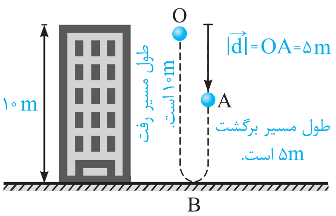


هشدار

در این سؤال، در لحظهٔ t_3، سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن تغییر جهت نمی‌دهد.
این موضوع توسط بسیاری از دانش‌آموزان اشتباه درک می‌شود.

۶ ۳ با توجه به شکل نشان داده‌شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطهٔ B، تغییر جهت داده و ۵ متر به سمت بالا می‌آید تا به نقطهٔ A برسد. بنابراین مسافت طی‌شده توسط گلوله برابر $10+5=15$ متر است.

از طرفی مطابق تعریف، جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ ابتدای حرکت را مستقیماً به نقطهٔ انتهای حرکت (A) متصل کند، یعنی اندازهٔ پاره‌خط OA به طول ۵m، معادل با مقدار جابه‌جایی متحرک است.



اندازهٔ جابه‌جایی : $|\vec{d}|=|\overrightarrow{OA}|=5\,m$

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازهٔ جابه‌جایی}}=\frac{\text{برگشت + رفت}}{OA}=\frac{10+5}{5}=3$$

دقت: مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر و یا مساوی جابه‌جایی است و گزینهٔ (۱) هیچ‌گاه نمی‌تواند صحیح باشد.

۷ ۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ — بررسی ویژگی‌های معادلهٔ مکان ـ زمان (تست‌های ۷ تا ۱۵)

درک مفهوم سادهٔ معادلهٔ یه پارامتر (مثل مکان) برحسب زمان، تو این فصل خیلی براموْن مهمه. بریم ببینیم چه جوری میشه با این مفهوم یه ارتباط خوبی برقرار کرد.

۱– شناخت معادلهٔ مکان ـ زمان

معادلهٔ مکان ـ زمان یک متحرک، معادله‌ای است که مکان متحرک را در هر لحظه مشخص می‌کند. فرض کنید متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است و معادلهٔ مکان ـ زمان آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید: $x=t^3+2t+5$

این معادله، معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلافاصله موقعیت متحرک را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x=t^3+2t+5\Rightarrow\begin{cases}t_0=0\rightarrow x_0=0^3+2\times0+5=5m & \text{(در } t_0=0 \text{ (شروع حرکت)، } x_0=5m \text{ است.)}\\ t_1=1s\rightarrow x_1=1^3+2\times1+5=8m & \text{(در } t_1=1s\text{، } x_1=8m \text{ است.)}\\ t_2=2s\rightarrow x_2=2^3+2\times2+5=17m & \text{(در } t_2=2s\text{، } x_2=17m \text{ است.)}\end{cases}$$

تذکر اگر از ما بخواهند جابه‌جایی متحرک را در یک بازهٔ زمانی مانند $t_1=1s$ تا $t_2=2s$ از روی معادلهٔ مکان ـ زمان به‌دست آوریم، کافی است مقادیر t_1 و t_2 را در معادلهٔ مکان قرار داده و حاصل x_1 و x_2 را به‌دست آوریم. x_2-x_1، معادل با جابه‌جایی متحرک است.

$$\begin{cases}t_2=2s\rightarrow x_2=17m\\ t_1=1s\rightarrow x_1=8m\end{cases}\Rightarrow\Delta x=x_2-x_1=17-8=9m$$

نکات مهم و کاربردی

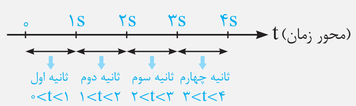
۱) مکان اولیهٔ متحرک، یعنی مکان آن در لحظهٔ $t=0$. بنابراین برای پیدا کردن مکان اولیهٔ یک متحرک، کافی است در معادلهٔ مکان ـ زمان آن، پارامتر t را برابر صفر قرار دهیم.

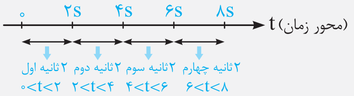
۲) متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است، این متحرک هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که $x=0$ شود. به‌عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرک از مبدأ، کافی است برای آن $x=0$ قرار داده شود.

مثال: $x=4t-8\xrightarrow[\text{عبور از مبدأ}]{\text{پیدا کردن لحظهٔ}}x=4t-8=0\rightarrow t=2s$

۳) ثانیهٔ اول حرکت، یک بازهٔ زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از $t=0$ شروع می‌شود یعنی $0<t<1s$، ثانیهٔ دوم حرکت یعنی $1s<t<2s$ و به همین صورت می‌توان گفت:

ثانیهٔ nام: $\Rightarrow n-1<t<n$





۴ دو ثانیهٔ اول حرکت یک بازهٔ زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و از $t=۰$ شروع می‌شود، یعنی $۰<t<۲s$. دو ثانیهٔ دوم یعنی $۲s<t<۴s$* و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود.

در ادامه با حل سه تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه‌شده را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین۱ **دو ثانیهٔ هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازهٔ زمانی است؟**

پاسخ دو ثانیهٔ هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازهٔ زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازهٔ زمانی $۸\times۲=۱۶s$ است، از طرفی طول هر بازهٔ زمانی ۲s است یعنی: $\boxed{۱۴s}<t<۱۶s$ ← ۲ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

تمرین۲ **نه ثانیهٔ پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازهٔ زمانی است؟**

پاسخ نه ثانیهٔ پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازهٔ زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازهٔ زمانی $۵\times۹=۴۵s$ است، از طرفی طول هر بازهٔ زمانی ۹s است یعنی $\boxed{۳۶s}<t<۴۵s$ ← ۹ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

تمرین۳ **معادلهٔ حرکت متحرکی بر روی محور x، در SI از رابطهٔ $x=t^۲-۴t$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت و در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟** (تألیفی)

۱) ۱۲, −۴ ۲) ۱۰, −۶ ۳) ۸, −۴ ۴) ۱۰, −۴

پاسخ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

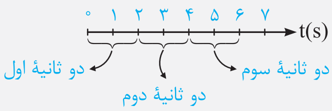
گام اول: محاسبهٔ جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت $(۰<t<۲s)$:

$$x=t^۲-۴t \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۰ \to x_۱=۰ \\ t_۲=۲s \to x_۲=۲^۲-۴\times۲=-۴m \end{cases} \Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول}: \Delta x=x_۲-x_۱=-۴m$$

گام دوم: محاسبهٔ جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت $(۴s<t<۶s)$:

$$x=t^۲-۴t \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۴s \to x_۱=۴^۲-۴\times۴=۰ \\ t_۲=۶s \to x_۲=۶^۲-۴\times۶=۱۲m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم}: \Delta x=x_۲-x_۱=۱۲-۰=۱۲m$$



بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲– شرط به هم رسیدن دو متحرک

فرض کنید معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B که همزمان شروع به حرکت کرده‌اند، به صورت $x_A=۴t+۲$ و $x_B=-۵t+۲۰$ است. شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که مکان دو متحرک یکسان شود و این یعنی داریم:

$$x_A=x_B \Rightarrow ۴t+۲=-۵t+۲۰ \Rightarrow t=۲s$$

سؤال **دو متحرکِ فوق، در چه مکانی به هم می‌رسند؟**

پاسخ

$$t=۲s \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در یکی از xها}} x_A=۴t+۲=۴\times۲+۲=\boxed{۱۰m}$$

در مکان $x=+۱۰m$ دو متحرک به هم می‌رسند.

با توجه به خلاصه نکات فوق، مکان متحرک در لحظهٔ $t=۰$ (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیهٔ متحرک است. در این سؤال با داشتن معادله‌های مکان دو متحرک، کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم:

$$\text{معادلهٔ مکان متحرک A}: x_A=۳t^۳-۷t+۵ \xrightarrow{t=۰} x_{۰A}=۵m$$

$$\text{معادلهٔ مکان متحرک B}: x_B=۲\cos\pi t+۱ \xrightarrow{t=۰} x_{۰B}=۲\cos(۰)+۱=۲+۱=۳m$$

هشدار

برخی از داوطلبان ممکن است در رابطهٔ $x_B=۲\cos\pi t+۱$، فریب خورده و به اشتباه عدد ۱ را به عنوان $x_{۰B}$ اعلام کنند، در صورتی‌که با قرار دادن $t=۰$ در عبارت $۲\cos\pi t+۱$، به عدد ۳ می‌رسیم!

* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیهٔ اول معادل با $۰\le t<۲s$، ۲ ثانیهٔ دوم معادل با $۲s\le t<۴s$ و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.

۸ | ۱ برای محاسبهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۱s$، کافیست ابتدا در معادلهٔ مکان ـ زمان، لحظهٔ $t = ۱s$ را جایگذاری کنیم:

معادلهٔ مکان ـ زمان: $x = t^۳ - t + ۲ \xrightarrow{\text{مکان متحرک در } t=۱s} x = (۱)^۳ - ۱ + ۲ = ۲m \xrightarrow{\vec{d}_۱ = x\vec{i}} \vec{d}_۱ = ۲\vec{i}$

دقت: معادلهٔ حرکت یا مکان ـ زمان معادله‌ای است که از ما مقدار t را گرفته و بلافاصله، موقعیت متحرک نسبت به مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

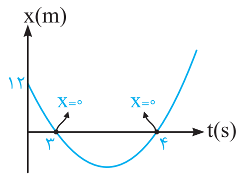
هشدار

این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب $۲\vec{i}$ می‌رسید و به اشتباه گزینهٔ ۲ را در پاسخنامه وارد کرده و به سادگی نمرهٔ منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

۹ | ۱

تذکر

لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد $(x = ۰)$، متحرک از مبدأ عبور می‌کند. بنابراین برای یافتن لحظاتی که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند، کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به‌دست آوریم.
دقت شود با توجه به این‌که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.



(نمودار $x - t$)

معادلهٔ مکان ـ زمان: $x = t^۲ - ۷t + ۱۲ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳s \\ t_۲ = ۴s \end{cases}$

این متحرک، دو بار از مبدأ مختصات عبور کرده و در نتیجه فاصلهٔ زمانی بین دو عبور متحرک از مبدأ برابر $\Delta t = ۴ - ۳ = ۱s$ می‌باشد.

۱۰ | ۴ وقتی متحرک در فاصلهٔ یک متری از مبدأ مکان قرار دارد، باید در مکان‌های $x = ۱m$ یا $x = -۱m$ قرار داشته باشد. برای حل این سؤال، باید بررسی کنیم که متحرک چند بار از مکان‌های $x = ۱m$ یا $x = -۱m$ عبور می‌کند.

$$x = -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱m \Rightarrow -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ = ۱ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۱۷ = ۰ \Rightarrow t_{۱,۲} = \dfrac{۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۴ \times ۱۷}}{۲} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \\ x = -۱m \Rightarrow -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ = -۱ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۱۵ = ۰ \Rightarrow t_{۳,۴} = \dfrac{۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۴ \times ۱۵}}{۲} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \end{cases}$$

با توجه به چهار جواب مثبت به دست آمده، متحرک ۴ بار از فاصلهٔ یک متری مبدأ مکان عبور می‌کند.

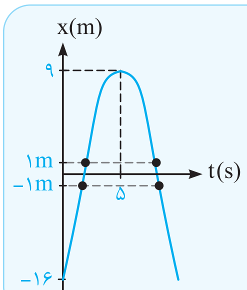
خلاقیت‌های حرفه‌ای

با رسم نمودار مکان ـ زمان این متحرک نیز به راحتی مشخص می‌شود که متحرک دو بار از مکان $x = ۱m$ و دو بار از مکان $x = -۱m$ عبور می‌کند.

$x = -t^۲ + ۱۰t - ۱۶$

$t_{\text{رأس}} = -\dfrac{b}{۲a} = -\dfrac{۱۰}{۲ \times (-۱)} = ۵s$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x_{\text{رأس}} = -۵^۲ + ۱۰ \times ۵ - ۱۶ = ۹m$



۱۱ | ۳

تذکر

در حرکت بر روی محور x، در زمان‌هایی که متحرک از مبدأ مختصات می‌گذرد، مکان آن صفر شده $(x = ۰)$ و به عبارت دیگر اندازهٔ بردار مکان آن حداقل می‌شود.

با داشتن معادلهٔ مکان ـ زمان، زمان‌هایی که مکان متحرک صفر می‌شود $(x = ۰)$، به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \text{معادلهٔ مکان متحرک}: x = t^۲ - ۶t + ۸ \\ \text{شرط صفر شدن مکان متحرک}: x = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = t^۲ - ۶t + ۸ = ۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۲s \text{ (زمانی‌که برای اولین بار متحرک از مبدأ می‌گذرد.)} \\ t_۲ = ۴s \text{ (زمانی‌که برای دومین بار متحرک از مبدأ می‌گذرد.)} \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۲ | ۱ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۲)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۳ ۴ ابتدا باید توجه شود که نیم‌ثانیهٔ سوم یعنی $۱s < t < ۱/۵s$ و جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$x = ۴t^۲ - ۴t \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱s \to x_۱ = ۴ - ۴ = ۰ \\ t_۲ = ۱/۵s \to x_۲ = ۴(۱/۵)^۲ - ۴(۱/۵) = ۳m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۳m$$

تذکر

۰/۵ ثانیه‌های متوالی در حرکت یک متحرک عبارت است از:

$$\begin{cases} ۰ < t < ۰/۵s \to \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ اول} \\ ۰/۵s < t < ۱s \to \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ دوم} \\ ۱s < t < ۱/۵s \to \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ سوم} \end{cases}$$

۱۴ ۲ نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی هفت ثانیهٔ شروع حرکت، به ترتیب $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۷s$ می‌باشد. بنابراین جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$x = ۱/۵ + \cos ۷\pi t \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۰ \to x_۱ = ۱/۵ + \underbrace{\cos(۰)}_{۱} = ۲/۵m \Rightarrow \vec{d}_۱ = ۲/۵\,\vec{i} \\ t_۲ = ۷s \to x_۲ = ۱/۵ + \cos(۴۹\pi) = ۱/۵ + \underbrace{\cos\pi}_{-۱} = ۰/۵m \Rightarrow \vec{d}_۲ = ۰/۵\,\vec{i} \end{cases}$$

بردار جابه‌جایی متحرک: $\vec{d} = \vec{d}_۲ - \vec{d}_۱ = -۲\vec{i}$

یادآوری

$\cos \underbrace{۲k\pi}_{\text{مضرب زوج } \pi} = +۱$ و $\cos \underbrace{(۲k-۱)\pi}_{\text{مضرب فرد } \pi} = -۱$

۱۵ ۱ به عنوان یک نکتهٔ اساسی و بسیار مهم، هنگامی‌که دو متحرک به هم می‌رسند، بردار مکان آن‌ها با یکدیگر برابر می‌شود. بدین‌ترتیب داریم:

$$\vec{d}_A = \vec{d}_B \Rightarrow ۳t + ۱ = ۲t^۲ + t + ۱ \Rightarrow ۲t = ۲t^۲ \Rightarrow ۲t(t-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ \text{یا} \\ t = ۱s \end{cases}$$

در ادامه چون در صورت سؤال ذکر شده است که این دو متحرک در کدام لحظه پس از شروع حرکت به هم می‌رسند، $t = ۱s$ قابل قبول است.

۱۶ ۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۳ — آشنایی با مفهوم سرعت متوسط و تندی متوسط (تست‌های ۱۶ تا ۳۶)

درک مفهوم تندی متوسط و سرعت متوسط، یکی از خواسته‌های اصلی ما تو این فصل هست. خوب روی این موضوع تمرکز کنید ...

سرعت متوسط: در شکل زیر متحرکی با سرعت متغیر، از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان Δt ثانیه، به نقطهٔ B می‌رسد. حال می‌خواهیم ببینیم این متحرک با چه سرعت ثابتی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کند تا مجدداً در همان زمان Δt از A به B برسد.

با سرعت متغیر در مدت Δt از A تا B می‌رود. می‌خواهیم با سرعت ثابت v_{av} در همان زمان Δt از A تا B برود.

این پارامتر، **سرعت متوسط** نام دارد که به نوعی مقدار متوسطی برای سرعت متحرک در طی لحظات حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B محسوب می‌شود. اگر متحرک روی محور x در حال حرکت باشد، برای محاسبهٔ $\vec{v}_{av}$، کافی است جابه‌جایی $\vec{d}$ را بر زمان انجام آن جابه‌جایی، یعنی Δt تقسیم کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

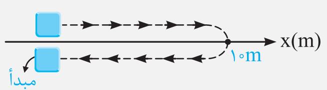
تندی متوسط: به نسبت مسافت طی‌شده (l) به زمان طی مسافت (Δt) تندی متوسط گویند. تندی متوسط را با نماد s_{av} نشان می‌دهند و برای محاسبهٔ s_{av} داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

نکات مهم و کاربردی

۱) سرعت متوسط مانند جابه‌جایی کمیتی برداری و تندی متوسط مانند مسافت، کمیتی عددی (نرده‌ای) می‌باشد.

۲) اگر جابه‌جایی متحرک در طی انجام یک حرکت صفر شود، سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود. به طور مثال در حرکت زیر که متحرک ابتدا ۱۰m در جهت محور x حرکت کرده و سپس ۱۰ متر در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به محل اولیهٔ خود بازمی‌گردد، سرعت متوسط در کل زمان حرکت صفر است.

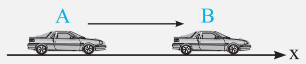


$$\begin{cases} x_{\text{شروع}} = ۰ \\ x_{\text{پایان}} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_{\text{پایان}} - x_{\text{شروع}} = ۰$$

۳) اگر یک متحرک در جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن مثبت بوده و اگر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی است.

۴) تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. به عبارت دیگر تندی متوسط زمانی برابر صفر می‌شود که متحرک ساکن باشد.

۵) فرض کنید مطابق شکل مقابل متحرکی روی محور x از نقطهٔ A تا نقطهٔ B بدون تغییر جهت جابه‌جا شود. در این حالت چون مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است، تندی متوسط برابر اندازهٔ سرعت متوسط می‌شود. $s_{av} = |\vec{v}_{av}|$



حالا بریم تو دو تا تمرین بعد، ببینیم چه جوری از نکاتی که یاد گرفتیم میشه توی حل مسائل استفاده کرد ...

تمرین ۱) معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = ۰/۲۵ + \sin \pi t$ می‌باشد. اندازهٔ سرعت متوسط آن در ۵ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟ (منتخب سراسری قبل از ۸۰)

۱) صفر ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۱۵

پاسخ برای محاسبهٔ سرعت متوسط در ۵ ثانیهٔ اول حرکت، کافیست مکان متحرک در لحظات $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۵s$ را به‌دست آوریم:

$$x = ۰/۲۵ + \sin \pi t \quad , \quad (۰ < t < ۵s) \to |\vec{v}_{av}| = ?$$

$$\begin{cases} t_1 = ۰ \to x_1 = ۰/۲۵ + \sin(۰) = ۰/۲۵\,m \\ t_2 = ۵s \to x_2 = ۰/۲۵ + \sin ۵\pi = ۰/۲۵\,m \end{cases} \to \text{سرعت متوسط}: \vec{v}_{av} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}\vec{i} = \frac{۰/۲۵ - ۰/۲۵}{۵ - ۰}\vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = ۰$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

دقت: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هرگاه جابه‌جایی متحرک برابر صفر شود، سرعت متوسط متحرک نیز برابر صفر می‌شود.

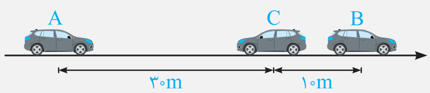
تمرین ۲) مطابق شکل، اتومبیلی روی محور x از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و در مدت ۶s به نقطهٔ B رفته و سپس در مدت ۴s از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. کدام عبارت در مورد این حرکت نادرست است؟

۱) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، ۵m از مسیر را پیموده است.

۲) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، ۳m از نقطهٔ A به مقصد نزدیک شده است.

۳) تندی متوسط این اتومبیل ۵m/s است.

۴) اندازهٔ سرعت متوسط این اتومبیل ۱۵m/s است.



پاسخ این اتومبیل از نقطهٔ A تا B، مسافت ۴۰m را طی کرده و سپس از نقطهٔ B تا C، به اندازهٔ مسافت ۱۰m برگشته است. بنابراین در مجموع مسافت طی‌شده توسط اتومبیل ۵۰m می‌شود و تندی متوسط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵\,m/s$$

بنابراین تندی متوسط ۵m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه، به‌طور متوسط ۵m از مسیر را طی کرده است.

در ادامه سرعت متوسط اتومبیل را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{۳۰}{۱۰}\vec{i} = ۳\vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = ۳\,m/s$$

بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط ۳m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه به‌طور متوسط ۳m از نقطهٔ A به سمت مقصد، یعنی نقطهٔ C نزدیک شده است، پس گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

تذکر برای تبدیل km/h به m/s، کافی است عدد موردنظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

$$۱km/h = ۱\frac{(۱۰۰۰m)}{(۳۶۰۰s)} \Rightarrow ۱km/h = \frac{۱}{۳/۶}m/s$$

و برای تبدیل m/s به km/h، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

$$۱m/s = ۳/۶\,km/h$$

سرعت متوسط یک متحرک، معادل با نسبت **جابه‌جایی** به مدت زمان انجام آن جابه‌جایی بوده و با توجه به رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید و عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۱) نادرست است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}i \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

* به‌عنوان تمرین، درستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

۱۷ | ۱ همان‌طور که در خلاصه نکات (۳) مشاهده کردید، اگر متحرک بر روی یک خط راست و بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن یکسان است، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۸ **۳** عبارت (الف) صحیح است. علت نادرستی عبارت‌های (ب)، (ج)، (د) و (هـ) به صورت زیر است:

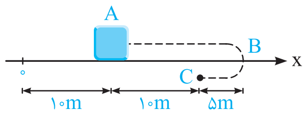
ب) ممکن است متحرک پس از طی مسافتی به محل اولیه‌اش بازگردد. در این‌صورت سرعت متوسط آن صفر، اما تندی متوسط آن مخالف صفر است.

ج) در یک مسیر منحنی، مسافت طی‌شده توسط متحرک، می‌تواند بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی باشد و در نتیجه تندی متوسط نیز می‌تواند بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط شود.

د) چون مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است، تندی متوسط نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ سرعت متوسط است.

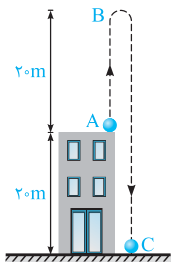
هـ) چون مسافت طی‌شده نمی‌تواند منفی باشد، تندی متوسط نیز نمی‌تواند منفی باشد.

۱۹ **۱** متحرک ابتدا به اندازهٔ $۱۵m$ از A به B رفته و سپس $۵m$ از B به C می‌رود، بنابراین کل مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $l=۲۰m$ می‌شود. از طرف دیگر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک از نقطهٔ A تا C، برابر فاصلهٔ AC بوده و برابر $\Delta x=۱۰m$ می‌باشد. بنابراین داریم:



$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|}=\frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{l}{\Delta x}=\frac{۲۰}{۱۰}=۲$$

۲۰ **۳** به موارد زیر توجه کنید:

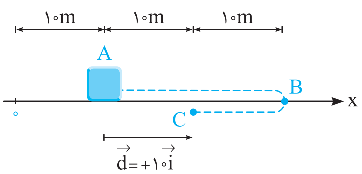


۱) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، گلوله حداکثر تا ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین بالا می‌رود. بنابراین از لحظهٔ شروع حرکت تا نقطهٔ B، گلوله به اندازهٔ ۲۰ m به سمت بالا می‌رود و در ادامه از نقطهٔ B تا C گلوله ۴۰ m پایین می‌آید. بنابراین گلوله در مجموع مسافتی به اندازهٔ ۶۰ m را طی می‌کند.

۲) اندازهٔ جابه‌جایی آن از نقطهٔ A تا C برابر ۲۰ m می‌شود و داریم:

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|}=\frac{\frac{l}{\Delta t}}{\left|\frac{\Delta y}{\Delta t}\right|}=\frac{l}{|\Delta y|}=\frac{۶۰}{۲۰}=۳$$

۲۱ **۳** در رابطه با حرکت این متحرک، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:



۱) متحرک ابتدا $۲۰m$ در جهت محور x حرکت کرده (از A تا B) و سپس $۱۰m$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده (از B تا C) و مجموعاً $۳۰m$ مسافت پیموده شده است، از طرفی جابه‌جایی این متحرک، برابر $\vec{d}=+۱۰\vec{i}$ است.

۲) متحرک همیشه در مکان‌های مثبت قرار داشته و این یعنی بردار مکان آن همیشه در جهت محور x می‌باشد. *(فریب برگشت متحرک در B را نخورید).*

۳) اندازهٔ سرعت متوسط متحرک برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}|=\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}\Rightarrow|\vec{v}_{av}|=\frac{۱۰}{\underbrace{۷/۵+۲/۵}_{\text{کل زمان لازم برای رسیدن از نقطهٔ A تا C}}}=۱m/s$$

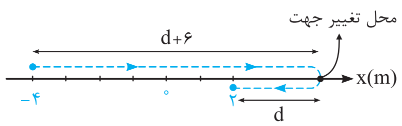
۴- اندازهٔ تندی متوسط متحرک برابر است با:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۳۰}{۷/۵+۲/۵}=۳m/s$$

دقت شود که زمان طی کردن مسیر AB برابر ۷/۵s و زمان طی کردن مسیر BC برابر ۲/۵s است و کل زمان لازم برای طی کردن مسیر A تا C برابر ۱۰s می‌باشد. با توجه به توضیحات داده شده، گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۲ **۳** این تست، یک سؤال جالب می‌باشد، طبق صورت سؤال، جسم فقط یک بار تغییر جهت داده و در یک بازهٔ زمانی مشخص، تندی متوسط آن، ۴ برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن است. این موضوع یعنی مسافت طی شده توسط متحرک، ۴ برابر اندازهٔ جابه‌جایی‌اش است. این سؤال دو حالت دارد:

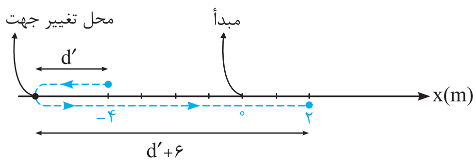
حالت اول: جسم ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:



$$\begin{cases}\text{مسافت طی شده}=(d+۶)+d=۲d+۶\\ \text{اندازهٔ جابه‌جایی}=۲-(-۴)=۶m\end{cases}\Rightarrow(۲d+۶)=۴\times(۶)\Rightarrow d=۹m$$

$\rightarrow$ فاصلهٔ محل تغییر جهت دادن تا مبدأ مکان $=d+۲=۱۱m$

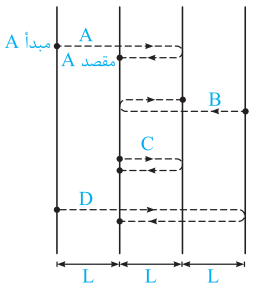
حالت دوم: جسم ابتدا در خلاف جهت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:



$$\begin{cases}\text{مسافت طی شده}=d'+(d'+۶)=۲d'+۶\\ \text{اندازهٔ جابه‌جایی}=۶m\end{cases}\Rightarrow(۲d'+۶)=۴\times(۶)\Rightarrow d'=۹m$$

$\Rightarrow$ فاصلهٔ محل تغییر جهت دادن متحرک تا مبدأ مکان $=d'+۴=۹+۴=۱۳m$

۲۳ **۴** **گام اول:** ابتدا اندازهٔ جابه‌جایی هر متحرک را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که زمان حرکت برای هر چهار متحرک یکسان است، برای مقایسهٔ اندازهٔ سرعت متوسط آن‌ها، کافی است اندازهٔ جابه‌جایی آن‌ها (فاصلهٔ مبدأ از مقصد) را با یک‌دیگر مقایسه کنیم:



$$|\vec{d}_A| = L \ , \ |\vec{d}_B| = L \ , \ |\vec{d}_C| = 0 \ , \ |\vec{d}_D| = L$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است } \Delta t} v_{av_A} = v_{av_B} = v_{av_D} > v_{av_C}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.

گام دوم: در ادامه مسافت‌های طی‌شده (که معادل با طول خط‌چین برای هر متحرک است) توسط هر چهار متحرک را به‌دست می‌آوریم و به کمک آن‌ها تندی متوسط را مقایسه می‌کنیم:

$$l_A = 3L \ , \ l_B = 3L \ , \ l_C = 2L \ , \ l_D = 5L$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است } \Delta t} s_{av_D} > s_{av_A} = s_{av_B} > s_{av_C}$$

۲۴ **۱** مطابق تعریف، سرعت متوسط یک متحرک که بر روی یک خط راست (محور x) حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{سرعت متوسط}: \ \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{i}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow x_1 = 8m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = -16m \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{-16-8}{10-2}\vec{i} = -3\vec{i} \ (\text{SI در})$$

علامت منفی برای سرعت متوسط، یعنی بردار سرعت متوسط (و هم‌چنین جابه‌جایی $(\vec{d})$) در این بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور x است.

۲۵ **۳** طبق صورت سؤال، متحرک در لحظهٔ $t = 0$، در مکان $x_0 = -40m$ و در لحظهٔ $t_2 = 10s$، در مکان $x_2 = 20m$ قرار دارد. بنابراین سرعت متوسط این متحرک در طی ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = -40m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = +20m \end{cases} \rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{20-(-40)}{10-0} = 6\,m/s$$

۲۶ **۲** با توجه به جدول داده‌شده، می‌توان نوشت:

	مکان آغازین	مکان پایانی	جابه‌جایی	سرعت متوسط
متحرک A	$\vec{d}_{0A}$	$(-2m)\vec{i}$	$(-5m)\vec{i}$	$(\vec{v}_{av})_A$
متحرک B	$(2m)\vec{i}$	$(8m)\vec{i}$	$\vec{d}_B$	$(\vec{v}_{av})_B$

$$\begin{cases} A \text{ جابه‌جایی}: \vec{d}_A = -5\vec{i} = -2\vec{i} - \vec{d}_{0A} \Rightarrow \vec{d}_{0A} = 3\vec{i} \\ B \text{ جابه‌جایی}: \vec{d}_B = 8\vec{i} - 2\vec{i} = 6\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{\vec{d}_{0A}} = \frac{6\vec{i}}{3\vec{i}} = 2$$

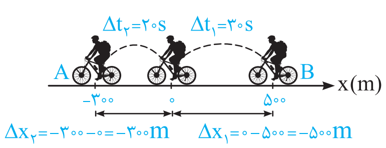
از طرفی با توجه به این‌که حرکت هر دو متحرک در مدت زمان یکسان انجام شده است، نسبت سرعت متوسط دو متحرک برابر نسبت جابه‌جایی آن‌ها است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان } \Delta t} \frac{(\vec{v}_{av})_A}{(\vec{v}_{av})_B} = \frac{\vec{d}_A}{\vec{d}_B} = \frac{-5\vec{i}}{6\vec{i}} = -\frac{5}{6}$$

۲۷ **۱** در صورتی‌که یک حرکت در چند مرحله انجام شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر حرکت برابر است با:

$$\vec{v}_{av\,\text{کل}} = \frac{\text{جابه‌جایی کل}}{\text{کل زمان انجام جابه‌جایی}}$$

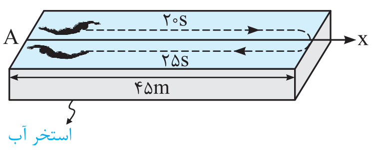
برای این مسئله داریم:



$$\vec{v}_{av\,\text{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}\vec{i} = \frac{(-500)+(-300)}{30+20}\vec{i} = -16\vec{i}$$

دقت: توجه شود که $\vec{d}$ (جابه‌جایی) فاصلهٔ بین محل شروع حرکت (B) و محل پایان حرکت (A) است که برابر $\Delta x_1 + \Delta x_2$ می‌باشد.

۲۸ **۴** شناگر پس از ۴۵ ثانیهٔ شنا کردن، به مکان اولیهٔ خود برمی‌گردد، بنابراین جابه‌جایی کل آن برابر صفر بوده و در نتیجه سرعت متوسط کل آن نیز صفر است.

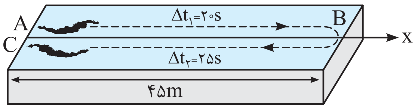


$$x_{\text{شروع}} = x_{\text{پایان}} \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

از طرف دیگر شناگر مسافت $2 \times 45m = 90m$ را شنا کرده است. بنابراین تندی متوسط آن برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{90}{20+25} = 2\,m/s$$

۲۹ ۱ در صورتی که جهت مثبت محور x را به سمت راست فرض کنیم، داریم:



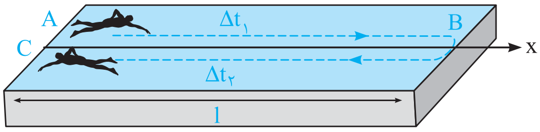
$$\text{(AB) سرعت متوسط در مسیر رفت}: \Delta x_1 = x_B - x_A = ۴۵ - ۰ = +۴۵\,m$$

$$\Rightarrow v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{۴۵}{۲۰} = ۲/۲۵\,m/s$$

$$\text{(BC) سرعت متوسط در مسیر برگشت}: \Delta x_2 = x_C - x_B = ۰ - ۴۵ = -۴۵\,m \Rightarrow v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-۴۵}{۲۵} = -۱/۸\,m/s$$

دقت داشته باشید که در حالت برگشت، شناگر در خلاف جهت محور x حرکت کرده است و در نتیجه سرعت متوسط آن مقداری منفی است.

۳۰ ۳ برای حل این سؤال، به شکل مقابل که مسیر رفت و برگشت حرکت شناگر را نشان می‌دهد، توجه کنید:

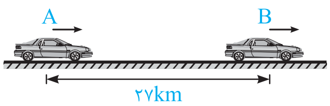


$$\text{تندی متوسط در هنگام رفت}: (s_{av})_1 = s = \frac{l}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{s} \quad (۱)$$

$$\text{تندی متوسط در هنگام برگشت}: (s_{av})_2 = ۲s = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{۲s} \quad (۲)$$

$$\text{تندی متوسط در رفت و برگشت}: s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل شناکردن}} = \frac{۲l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{۲l}{(\frac{l}{s}) + (\frac{l}{۲s})} = \frac{۲l}{(\frac{۳}{۲}\frac{l}{s})} = \frac{۴}{۳}s$$

۳۱ ۳ **روش اول:** متحرک در طول نیم‌ساعت از حرکت خود، تغییر جهت نداده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر مسافت طی‌شده، یعنی ۲۷ کیلومتر می‌باشد.



$$\begin{cases} \Delta x = ۲۷\,km = ۲۷۰۰۰\,m \\ \Delta t = ۰/۵\,h = ۰/۵ \times ۳۶۰۰ = ۱۸۰۰\,s \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۷۰۰۰}{۱۸۰۰} = ۱۵\,m/s = ۱۵۰۰\,cm/s$$

روش دوم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۷}{۰/۵} = ۵۴\,km/h \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{۵۴}{۳/۶} = ۱۵\,m/s = ۱۵۰۰\,cm/s$$

دقت کنید در این سؤال چون اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت یکسان است، پس اندازهٔ سرعت متوسط برابر تندی متوسط است.

تذکر

برای تبدیل km / h به m / s، کافی است عدد موردنظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

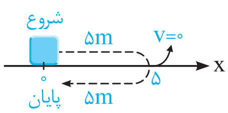
$$۱\,km/h = ۱\frac{(۱۰۰۰\,m)}{(۳۶۰۰\,s)} \Rightarrow ۱\,km/h = \frac{۱}{۳/۶}\,m/s$$

و برای تبدیل m / s به km / h، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

$$۱\,m/s = ۳/۶\,km/h$$

۳۲ ۴ برای به‌دست آوردن سرعت متوسط یک متحرک، مقدار جابه‌جایی آن مهم است، نه مسافت طی‌شده. بنابراین در این سؤال می‌توانیم نشان دهیم که هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

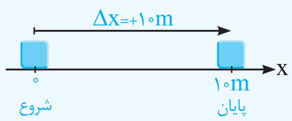
به عنوان مثال در این مسأله، متحرک می‌تواند ۵ متر به جلو رفته و سپس به جای اول خود برگردد، در این حالت مسافت طی‌شده برابر ۱۰ متر بوده ولی جابه‌جایی آن صفر است (بررسی سایر حالت‌ها را به خودتان می‌سپاریم!).



$$\Delta x = ۰ \to |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = ۰$$

تذکر

به عنوان یک موضوع مفهومی، باید گفت که در این سؤال بیشترین مقدار سرعت متوسط متحرک، مربوط به حالتی است که متحرک بدون تغییر جهت، ۱۰m جابه‌جا شود.



$$\Delta x = ۱۰\,m \to |\vec{v}_{av}|_{max} = \frac{۱۰}{۲} = ۵\,m/s \to -۵\,\vec{i} \le \vec{v}_{av} \le ۵\,\vec{i}$$

۳۳ ۲ برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در دو ثانیهٔ اول حرکت $(۰ < t < ۲s)$، ابتدا باید مکان متحرک در لحظات $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۲s$ را به‌دست آوریم:

$$\text{معادلهٔ حرکت}: x = t^۴ - ۴ \Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۰ \to x_1 = -۴\,m \\ t_2 = ۲s \to x_2 = ۲^۴ - ۴ = ۱۲\,m \end{cases} \xrightarrow{|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \text{سرعت متوسط}: |\vec{v}_{av}| = \frac{۱۲ - (-۴)}{۲ - ۰} = ۸\,m/s$$

۳۴ **۲** برای پاسخ به این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t \Rightarrow \begin{cases} t_1=0 \Rightarrow x_1=0 \\ t_2=4s \Rightarrow x_2=\frac{1}{3}\times 4^3-2\times 4^2+3\times 4=\frac{64}{3}-20=\frac{4}{3}>0 \end{cases}$$

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[x_2>0]{x_1=0} v_{av}>0 \Rightarrow$$ سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.

تذکر

همیشه سرعت متوسط یک متحرک در یک بازهٔ زمانی، بین بیشترین و کم‌ترین اندازهٔ سرعت لحظه‌ای متحرک در آن بازه می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) قطعاً نادرست است.

۳۵ **۱** با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳۶ **۴** برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

گام اول: دو ثانیهٔ اول، یعنی از لحظهٔ $t_1=0$ تا $t_2=2s$. بنابراین ابتدا مکان متحرک را در این لحظات به‌دست می‌آوریم:

$$x=kt^2-5t+5 \Rightarrow \begin{cases} t_1=0 \Rightarrow x_1=5m \\ t_2=2s \Rightarrow x_2=(4k-5)m \end{cases}$$

گام دوم: از آن‌جایی که اندازهٔ سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول حرکت برابر صفر شده است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی نیز برابر صفر بوده و $x_1=x_2$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x_1=x_2 \Rightarrow 5=4k-5 \Rightarrow k=2/5$$

گام سوم: حال مقدار k را در معادله قرار داده و در ادامه مکان متحرک را در لحظات $t_2=2s$ و $t_3=4s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x=2/5t^2-5t+5$$

$$\begin{cases} t_2=2s \Rightarrow x_2=5m \\ t_3=4s \Rightarrow x_3=25m \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_{av}|=\frac{x_3-x_2}{t_3-t_2}=\frac{25-5}{2}=10m/s$$

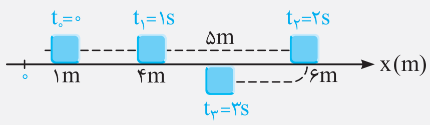
۳۷ **۲** برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

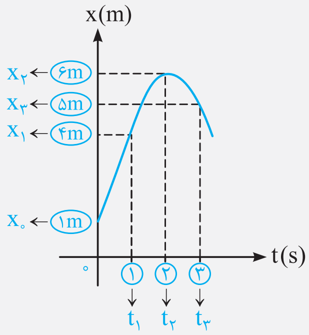
خلاصه نکات ۴ — تحلیل نمودار مکان ـ زمان و محاسبهٔ $|\vec{v}_{av}|$ و s_{av} از روی آن (تست‌های ۳۷ تا ۶۰)

۱) تحلیل مفهومی نمودار مکان ـ زمان

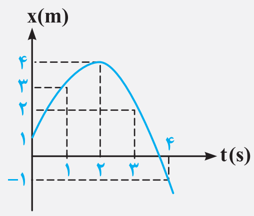
فرض کنید مکان متحرکی مطابق شکل، در لحظات t_0، t_1، t_2، t_3 و ... داده‌شده است. اگر این مکان‌ها و زمان‌ها را در یک نمودار ترسیم کنیم، از لحاظ مفهومی نمودار مکان ـ زمان حرکت متحرک به‌دست می‌آید.

به زبون خودمونی، نمودار مکان ــ زمان نموداریه که اگه زمان رو از روی محور افقی داشته باشی، خیلی راحت مکان رو روی محور قائم بهت میده:



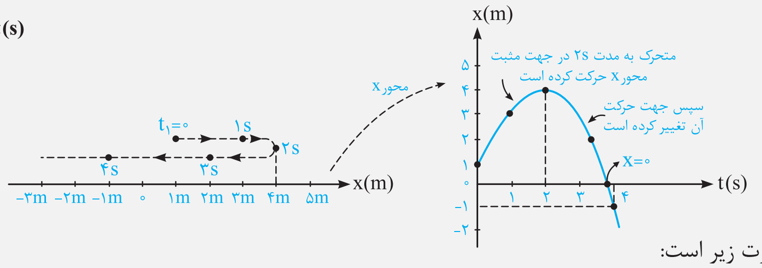


تذکر یک دانش‌آموز خلاق، از روی نمودار مکان ـ زمان مسیر حرکت متحرک را در ذهن خود تجسم می‌کند. این موضوع یعنی با خود تصور می‌کند که از $t=0$ تا $t_2=2s$، متحرک در جهت محور x حرکت کرده و از مکان ۱m به مکان ۶m منتقل می‌شود. در ادامه از $t_2=2s$ تا $t_3=3s$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده و از مکان ۶m به مکان ۵m رفته است.



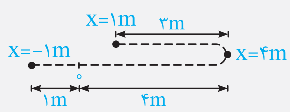
تمرین ۱ **نمودار مکان ـ زمان متحرکی به صورت مقابل است. جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط این متحرک تا پایان ثانیهٔ چهارم، برابر چند متر است؟**

پاسخ با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، مسیر حرکت این متحرک به صورت زیر است و می‌توان نوشت:



جابه‌جایی این متحرک به صورت زیر است:

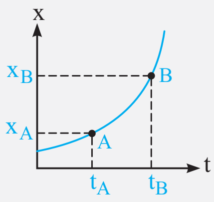
$$\begin{cases} t_1=۰ \Rightarrow x_1=۱m \\ t_2=۴s \Rightarrow x_2=-۱m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -۱-(۱) = -۲m$$



حال به محاسبهٔ مسافت طی‌شده می‌پردازیم. متحرک ابتدا از $x=۱m$ شروع به حرکت کرده و تا $x=۴m$ رفته است ($۳m$ مسافت طی‌کرده است). در ادامه از $x=۴m$ شروع به حرکت کرده و به $x=۰$ رفته است ($۴m$ مسافت طی‌کرده است)، در پایان نیز از $x=۰$ به $x=-۱m$ رفته است ($۱m$ مسافت طی‌کرده است) و مجموع مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $۳+۴+۱=۸m$ است.

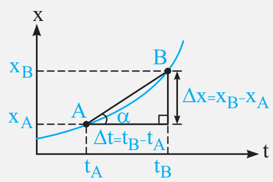
۲) محاسبهٔ سرعت متوسط از روی نمودار مکان ـ زمان

فرض کنید نمودار مکان ـ زمان را برای یک متحرک در اختیار داریم و سرعت متوسط آن بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبهٔ سرعت متوسط، از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:



روش اول (نمودارخوانی): در این روش ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص کرده و مکان متحرک در نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم. در نهایت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{سرعت متوسط بین A و B}: |\vec{v}_{av}|_{A,B} = \frac{\Delta x_{A,B}}{\Delta t_{A,B}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$



روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و سپس خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت است.

$$\text{شیب خط AB} = |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \tan\alpha$$

این روش در مسائلی که می‌خواهند سرعت متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنند، بسیار کاربرد دارد.

۳) محاسبهٔ تندی متوسط از روی نمودار مکان ـ زمان

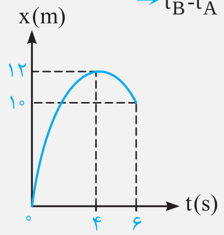
فرض کنید نمودار مکان ـ زمان برای یک متحرک را در اختیار داریم و تندی متوسط بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. برای محاسبهٔ تندی متوسط، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مسافت طی‌شده بین دو لحظهٔ t_A و t_B را با توجه به نکات ارائه‌شده محاسبه می‌کنیم:

گام دوم: به کمک رابطهٔ مقابل، تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\underbrace{\boxed{\Delta t}}_{t_B - t_A}}$$

۴) بررسی یک مفهوم بسیار پرکاربرد



برای به‌دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار مکان ـ زمان، فقط باید به مکان ابتدا و انتهای حرکت توجه کنیم. اما برای به‌دست آوردن تندی متوسط باید کل مسیر طی‌شده توسط متحرک را به‌دست آوریم. به‌طور مثال فرض کنید نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت شکل مقابل باشد. این متحرک از مبدأ مختصات در جهت محور x حرکت کرده در نقطهٔ $x=۱۲m$ تغییر جهت داده و سپس در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به نقطهٔ $x=۱۰\,m$ می‌رسد.

برای به‌دست آوردن اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$|\vec{v}_{av}|=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۰-۰}{۶}=\frac{۵}{۳}m/s$$

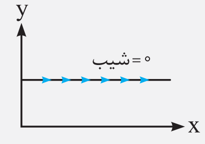
اما برای به‌دست آوردن تندی متوسط حرکت باید مسافت طی‌شده را به‌دست آوریم. این متحرک $۱۲m$ در جهت محور x و $۲m$ در خلاف محور x حرکت کرده است، بنابراین در مجموع مسافت $۱۴m$ را طی کرده است و داریم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}m/s$$

۵) سه یادآوری مهم و بسیار کاربردی از ریاضی

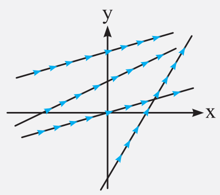
الان می‌خوایم یه چند تا نکتهٔ ریاضی براتون بیاریم که تو کل فیزیک دوازدهم، خیلی به کارتون میاد ...

۱) خطوط افقی دارای شیب صفر هستند.

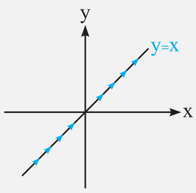


(با افزایش x ، y ثابت است.)

۲) خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) هستند، شیب مثبت دارند.



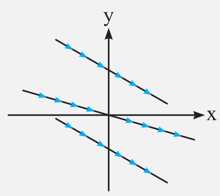
(خطوط دارای شیب مثبت)



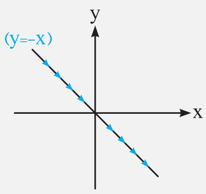
(با افزایش x ، پیشروی نمودار به سمت بالا است.)

ساده بگیم خطوطی که سمت راستشون بالاتر از سمت چپشونه، شیبشون مثبته و بالعکس ...

۳) خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y=-x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) هستند، شیب منفی دارند.



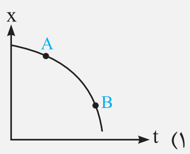
(خطوط دارای شیب منفی)

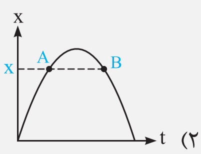


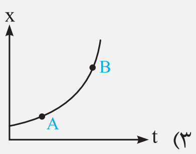
(با افزایش x ، پیشروی نمودار به سمت پایین است.)

حالا بریم با حل چند تا تمرین، این خلاصه نکات رو بترکونیم ...

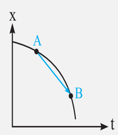
تمرین۲ در هر یک از نمودارهای مکان ـ زمان زیر، علامت سرعت متوسط متحرک از A تا B را مشخص کنید.



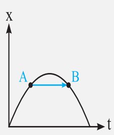




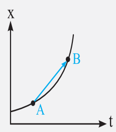
پاسخ با توجه به این‌که نمودار مکان ـ زمان برای هر سه متحرک داده شده است، سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین نقاط A و B از نمودار است:



شیب AB منفی است $(v_{av}<۰)$



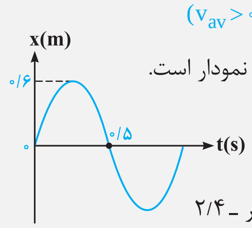
شیب AB صفر است $(v_{av}=۰)$



شیب AB مثبت است $(v_{av}>۰)$

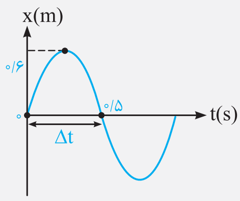
دقت شود که قرار دادن فلش بر روی خط‌های واصل بین دو نقطه، فقط به منظور درک بیشتر شما عزیزان از علامت شیب نمودار است.

تمرین۳ نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن در ۰/۵ ثانیهٔ اول حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱/۲ ـ صفر ۲) صفر ـ ۱/۲ ۳) ۲/۴ ـ صفر ۴) صفر ـ ۲/۴

پاسخ نمودار داده‌شده نمودار مکان ـ زمان متحرک است و می‌خواهیم با خواندن مکان متحرک در $t_۱=۰$ و $t_۲=۰/۵s$ از روی نمودار، سرعت متوسط در ۰/۵ ثانیهٔ اول حرکت را به‌دست آوریم:

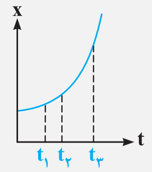


$$\begin{cases} t_۱=۰ \Rightarrow x_۱=۰ \\ t_۲=۰/۵s \Rightarrow x_۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \text{اندازهٔ سرعت متوسط}: |\vec{v}_{av}|=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۰-۰}{۰/۵-۰}=۰$$

از طرفی با توجه به نمودار، این متحرک $۰/۶m$ در جهت محور x حرکت کرده و سپس $۰/۶m$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین در مدت $۰/۵s$ مسافت $۱/۲m$ را طی کرده است و تندی متوسط آن برابر است با:

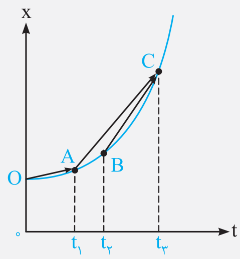
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱/۲}{۰/۵}=۲/۴\,m/s$$ (بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.)

تمرین ۴ **نمودار مکان ـ زمان متحرکی به صورت سهمی و مطابق شکل روبه‌رو است. اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در کدام بازهٔ زمانی بیشتر است؟** (ریاضی داخل ۸۵)



۱) ۰ تا $t_۱$
۲) $t_۱$ تا $t_۲$
۳) $t_۲$ تا $t_۳$
۴) بستگی به اندازهٔ فاصله‌های زمانی دارد.

پاسخ سرعت متوسط بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.

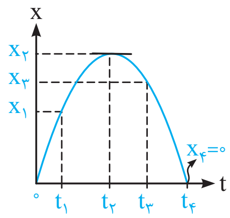


همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید، شیب پاره‌خط BC از سایر پاره‌خط‌ها بیشتر است (تمایل آن به قائم شدن بیشتر است)، بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ بزرگ‌تر است.

$$\tan\alpha_{BC}>\tan\alpha_{AC}>\tan\alpha_{OA} \Rightarrow |\vec{v}_{av}|_{BC}>|\vec{v}_{av}|_{AC}>|\vec{v}_{av}|_{OA}$$

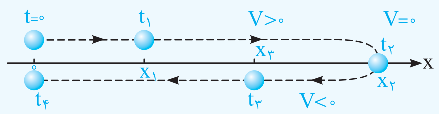
بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

توصیف حرکت متحرک با توجه به نمودار مکان ـ زمان: متحرک در لحظهٔ $t=۰$ از مبدأ شروع به حرکت کرده، در لحظهٔ $t_۱$ از نقطهٔ $x_۱$ گذشته و در لحظهٔ $t_۲$ به $x_۲$ می‌رسد. بنابراین مشاهده می‌کنیم که در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۲$ مکان متحرک در حال افزایش بوده و در نتیجه متحرک در جهت محور x در حال حرکت می‌باشد. در لحظهٔ $t_۲$ متحرک در $x_۲$ بوده و در لحظهٔ $t_۳$ به $x_۳$ رسیده و سپس در لحظهٔ $t_۴$ به مبدأ $(x_۴=۰)$ برمی‌گردد. بنابراین در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$، متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت می‌باشد. بنابراین متحرک در لحظهٔ $t_۲$، در بیشترین فاصله از مبدأ قرار دارد.

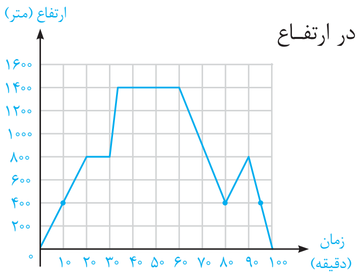


درک بهتر

متحرک از مبدأ مختصات در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t_۲$ تغییر جهت داده و در لحظهٔ $t_۴$ مجدداً به مکان اولیهٔ خود بازمی‌گردد، در نتیجه در لحظهٔ $t_۲$، متحرک بیشترین فاصله را از مبدأ دارد.



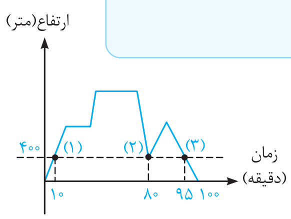
۳۸ **۴** در نمودار مکان ـ زمان ارائه‌شده، مکان متحرک همواره صفر یا مثبت بوده و بردار مکان یعنی $x\vec{i}$، هیچ‌گاه در خلاف جهت محور x قرار نمی‌گیرد. بنابراین گزینهٔ (۴) با توضیحات ارائه‌شده در مورد این نمودار مطابقت دارد.



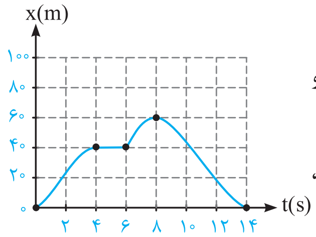
۳۹ **۲** با توجه به نمودار مکان ـ زمان مقابل، هواپیما در سه لحظهٔ $t=۱۰s$، $t=۸۰s$ و $t=۹۵s$ (چرا؟) در ارتفاع ۴۰۰ متری از سطح زمین قرار دارد و این تنها ارتفاعی است که به ازاء آن سه زمان وجود دارد.

دقت

هواپیما در بین دقایق ۲۰ تا ۳۰، به مدت ۱۰ دقیقه در ارتفاع ۸۰۰ متر قرار دارد و این ارتفاع نمی‌تواند گزینهٔ درست باشد.



نگاه دیگر: اگر از هریک از نقاط روی محور قائم (ارتفاع)، خط‌وطی به موازات محور افقی رسم کنیم، تعداد نقاط برخورد با نمودار تعداد دفعاتی که متحرک در آن ارتفاع قرار می‌گیرد را نشان می‌دهد.



۴۰ ۴ با توجه به شکل مقابل، حرکت این متحرک را در هر مرحله به‌صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

$\circ \le t < ۴s$**:** همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در این بازهٔ زمانی، با گذشت زمان مکان متحرک در حال افزایش بوده و از $x = \circ$ به $x = ۴\circ m$ رسیده است. با توجه به این موضوع، متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.

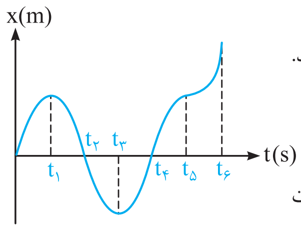
$۴s \le t < ۶s$**:** در این بازه، متحرک در مکان $x = ۴\circ m$ ایستاده و حرکت نمی‌کند (دقت شود که با گذشت زمان، مکان متحرک عوض نمی‌شود و x ثابت است).

$۶s \le t < ۸s$**:** در این بازه همانند بازهٔ اول، متحرک در جهت محور x در حال حرکت می‌باشد و از مکان $x = ۴\circ m$ به مکان $x = ۶\circ m$ رفته و از مبدأ دور می‌شود و در $t = ۸s$ به بیشترین فاصله از مبدأ می‌رسد.

$۸s \le t < ۱۴s$**:** در این بازه با گذشت زمان، متحرک از مکان $x = ۶\circ m$ به سمت مبدأ $(x = \circ)$ در حال حرکت بوده و در لحظهٔ $t = ۱۴s$ به مبدأ $(x = \circ)$ می‌رسد، در نتیجه متحرک در این بازه به مبدأ نزدیک می‌شود.

دقت: متحرک در چهار ثانیهٔ دوم حرکت $(۴s \le t < ۸s)$ از مکان $x = ۴\circ m$ به مکان $x = ۶\circ m$ رفته است و $۲\circ m$ جابه‌جا شده و گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

۴۱ ۳ چون دوچرخه‌سوار از مکان $x = \circ$ شروع به حرکت کرده و در نهایت به $x = \circ$ بازگشته است، اندازهٔ جابه‌جایی آن صفر می‌باشد. از طرف دیگر دوچرخه‌سوار در ۸ ثانیهٔ اول حرکت از $x = \circ$ به $x = ۶\circ m$ رفته و در بازهٔ زمانی $۸s$ تا $۱۴s$ از $x = ۶\circ m$ به $x = \circ$ بازگشته است و در مجموع مسافت $۱۲\circ m$ را طی کرده است.



۴۲ ۱ برای حل، درستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

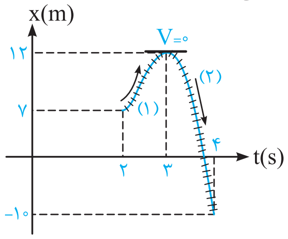
۱) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و در حال **دور شدن** از مبدأ می‌باشد. بنابراین عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۱) نادرست است.

۲) در بازهٔ زمانی $t_۴$ تا $t_۶$، متحرک در جهت محور x از مبدأ دور می‌شود.

۳) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$، متحرک در قسمت منفی محور x قرار دارد و در لحظهٔ $t_۳$ بیشترین فاصله را در قسمت منفی محور x از مبدأ دارد.

۴) هنگامی که متحرک در قسمت مثبت محور x است، بردار مکان در جهت محور x و هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور x است، بردار مکان در خلاف جهت محور x قرار دارد.

به‌طور کلی هنگامی که متحرک از $x = \circ$ عبور کرده و علامت x تغییر کند، بردار مکان آن تغییرجهت می‌دهد. متحرک موردنظر در دو لحظهٔ $t_۲$ و $t_۴$ از مبدأ مکان عبور کرده است و دو بار بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین تنها گزینهٔ (۱) عبارت نادرستی است.



۴۳ ۱ با بررسی جهت حرکت و اندازهٔ جابه‌جایی در دو ثانیه دوم حرکت $(۲s \le t < ۴s)$، مسافت طی‌شده به دست می‌آید.

مرحلهٔ اول: از لحظهٔ $t = ۲s$ تا $t = ۳s$، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و مسافت $l_۱ = ۱۲ - ۷ = ۵m$ را پیموده است.

مرحلهٔ دوم: از لحظهٔ $t = ۳s$ تا $t = ۴s$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و مسافت $l_۲ = |-۱\circ - ۱۲| = ۲۲m$ را پیموده است.

بنابراین مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ دوم برابر $l = l_۱ + l_۲ = ۲۷m$ است.

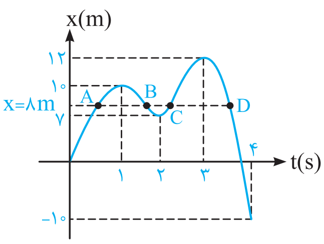
سؤال **اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در دو ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟**

پاسخ

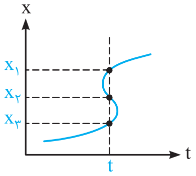
$$\begin{cases} t_۱ = ۲s \rightarrow x_۱ = ۷m \\ t_۲ = ۴s \rightarrow x_۲ = -۱\circ m \end{cases} \rightarrow |\vec{d}| = |x_۲ - x_۱| = ۱۷m$$

سؤال **در طی حرکت، بردار مکان در کدام بازهٔ زمانی تغییر جهت می‌دهد؟**

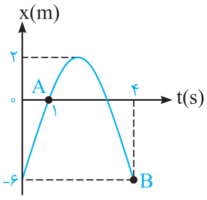
پاسخ *در ثانیهٔ چهارم $(۳s \le t < ۴s)$، متحرک از مبدأ عبور کرده و علامت x تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک در این بازهٔ زمانی تغییر جهت می‌دهد.*



۴۴ ۴ با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک ۴ بار در مکان $x = +۸m$ قرار گرفته است (در واقع خط افقی که از $x = ۸m$ رسم می‌شود، نمودار را در چهار نقطهٔ A، B، C و D قطع می‌کند)، بنابراین ۴ بار بردار مکان متحرک برحسب متر برابر $\vec{d} = +۸\vec{i}$ می‌شود.



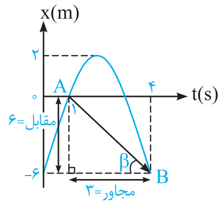
۴۵ **۴** نمودار رسم شده در گزینهٔ (۴)، نمودار یک **تابع** x برحسب t نمی‌تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر یک خط موازی محور x رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. این موضوع نشان‌دهندهٔ این است که متحرک در یک لحظه، در چند مکان مختلف قرار دارد که این موضوع امکان‌پذیر نیست.



۴۶ **۲** **روش اول (نمودارخوانی):** با توجه به نمودار مکان ــ زمان داده‌شده، متحرک در لحظهٔ $t_1 = 1s$ در مبدأ قرار داشته $(x_A = 0)$ و در لحظهٔ $t_2 = 4s$ در مکان $x_2 = -6m$ $(x_B = -6m)$ قرار دارد و داریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = -2 m/s$$

روش دوم (شیب نمودار): سرعت متوسط متحرک در یک بازه، برابر شیب خط واصل بین نقاط ابتدای بازهٔ زمانی و انتهای بازهٔ زمانی در نمودار مکان ـ زمان است.



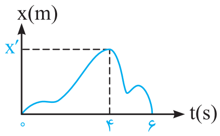
$$|\vec{v}_{av}| = |\tan\beta| = \left|\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}\right| = \left|\frac{6}{3}\right| = 2 m/s$$

$v_{av} = -2 m/s$ (شیب خط AB منفی است.)

دقت

با توجه به جهت فلش AB در این سؤال، علامت v در نمودار مکان ـ زمان فوق مشخص می‌شود:

$\longrightarrow \Rightarrow v_{av} = 0$	$\nearrow \Rightarrow v_{av} > 0$	$\searrow \Rightarrow v_{av} < 0$



۴۷ **۲** محاسبهٔ سرعت متوسط از $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4s$:

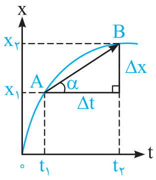
$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4s \rightarrow x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow v_{av_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x' - 0}{4 - 0} = \frac{x'}{4}$$

محاسبهٔ سرعت متوسط از $t_2 = 4s$ تا $t_3 = 6s$:

$$\begin{cases} t_2 = 4s \rightarrow x_2 = x' \\ t_3 = 6s \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{0 - x'}{6 - 4} = -\frac{x'}{2}$$

و نسبت سرعت متوسط در این دو بازهٔ زمانی برابر است با:

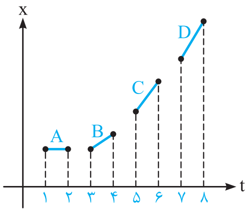
$$\frac{v_{av_1}}{v_{av_2}} = \frac{\frac{x'}{4}}{-\frac{x'}{2}} = -\frac{1}{2}$$



۴۸ **۳** نمودار داده‌شده یک نمودار **مکان ــ زمان** است. بنابراین شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان، بیانگر سرعت متوسط در فاصلهٔ زمانی بین آن دو لحظه (t_1 تا t_2) می‌باشد.

$$\text{شیب AB} = \tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}|$$

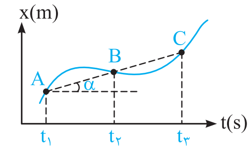
۴۹ **۳** با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۴)، گزینهٔ (۳) صحیح است.



تمرین **در شکل مقابل، اندازهٔ سرعت متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟**

پاسخ

$$|\vec{v}_{av}|_A = 0 < |\vec{v}_{av}|_B < |\vec{v}_{av}|_C < |\vec{v}_{av}|_D$$

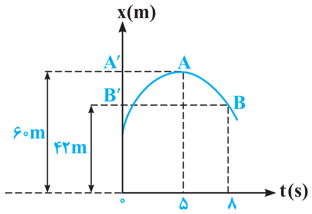


۵۰ **۳** شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان برابر سرعت متوسط در آن بازه است. در شکل روبه‌رو، شیب خط واصل بین نقاط A و B با شیب خط واصل بین نقاط B و C یکسان بوده و در نتیجه سرعت متوسط متحرک برای هر دو بازهٔ زمانی (t_1 تا t_2) و (t_2 تا t_3) یکسان و برابر $2 m/s$ است.

$$(\vec{v}_{av})_1 = (\vec{v}_{av})_2 = \tan\alpha = 2 m/s$$

تذکر

دقت کنید پاره‌خط‌های AB و BC در یک امتداد قرار دارند و شیب هر دو یکسان است.



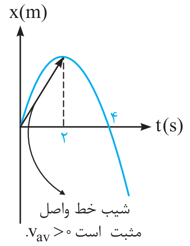
۵۱ ۱ با سؤال بسیار جالب و مفهومی روبه‌رو شده‌ایم. ابتدا باید دقت کنیم که متحرک بر روی محور x در حال حرکت است و بردار سرعت متوسط آن یا در جهت محور x است و یا در خلاف جهت آن و این موضوع یعنی سرعت متوسط در جهت AB نمی‌باشد و گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

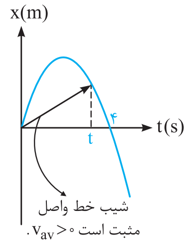
با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۵s$ در مکان $A'(x_1 = ۶۰m)$ و در لحظهٔ $t_2 = ۸s$ در مکان $B'(x_2 = ۴۲m)$ قرار دارد و داریم:

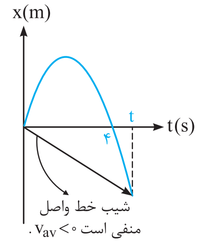
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۲ - ۶۰}{۸ - ۵} = -۶\, m/s$$

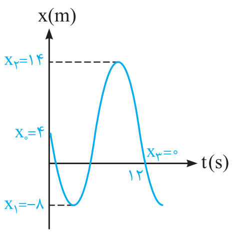
در ادامه از روی نمودار مشخص است که از لحظهٔ $t = ۵s$ تا $t = ۸s$ متحرک بر روی محور x از A' به طرف B' حرکت کرده و سرعت متوسط در راستای $A'B'$ (یعنی در خلاف جهت محور x) است.

۵۲ ۳ با توجه به شیب خط واصل از لحظهٔ صفر تا t، مشاهده می‌شود که نهایتاً تا لحظهٔ $t = ۴s$، شیب خط واصل مثبت و سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.



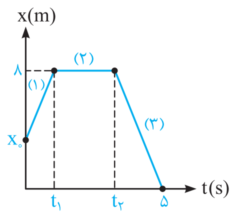






۵۳ ۴ متحرک ابتدا ۱۲m در خلاف جهت محور x حرکت کرده و از مکان $x_0 = ۴m$ به مکان $x_1 = -۸m$ می‌رسد. سپس تغییر جهت داده و با طی مسافت ۲۲m به مکان $x_2 = ۱۴m$ می‌رسد و در ادامه دوباره تغییر جهت داده و پس از طی مسافت ۱۴m در لحظهٔ $t = ۱۲s$ به مبدأ $(x_3 = ۰)$ می‌رسد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت $۱۲ + ۲۲ + ۱۴ = ۴۸m$ را طی می‌کند و داریم:

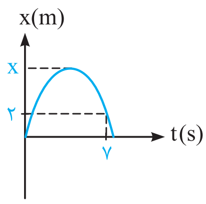
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۴۸}{۱۲} = ۴\, m/s$$



۵۴ ۴ این متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ t_1 مسافت $(۸ - x_0)$ را طی کرده است. از طرفی از لحظهٔ t_1 تا t_2 ساکن بوده و از لحظهٔ t_2 تا لحظهٔ $t = ۵s$ از مکان $x = ۸m$ به مبدأ مکان رسیده است و در نتیجه در این بازهٔ زمانی مسافت ۸m را طی کرده است.

$$\text{مجموع مسافت طی‌شده در طی ۵s} = (۸ - x_0) + ۰ + ۸ = ۱۶ - x_0$$

$$s_{av} = \frac{\text{کل مسافت طی‌شده}}{\text{کل زمان}} \Rightarrow ۲ = \frac{۱۶ - x_0}{۵} \Rightarrow x_0 = ۶m$$

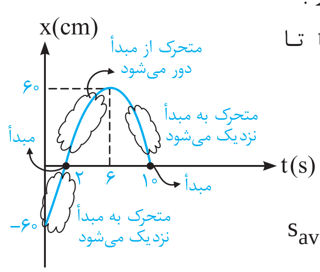


۵۵ ۲ مطابق شکل، فرض می‌کنیم بیشترین فاصلهٔ ذره تا مبدأ مکان برابر x باشد، به این ترتیب داریم:

$$\text{مسافت طی شده در ۷ ثانیهٔ اول} = l = (x) + (x - ۲) = ۲x - ۲$$

$$\text{اندازهٔ جابه‌جایی در ۷ ثانیهٔ اول} = |\Delta x| = ۲m$$

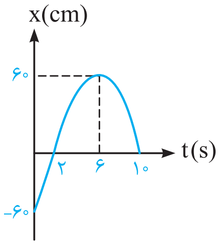
$$s_{av} = ۵|v_{av}| \Rightarrow \frac{l}{\cancel{\Delta t}} = ۵\frac{|\Delta x|}{\cancel{\Delta t}} \Rightarrow (۲x - ۲) = ۵ \times (۲) \Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۶m$$



۵۶ ۲ **گام اول:** در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۲s$ متحرک از قسمت منفی محور x به سمت مبدأ حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می‌شود، در بازهٔ زمانی $t_2 = ۲s$ تا $t_3 = ۶s$ متحرک از مبدأ دور شده و در نهایت در بازهٔ زمانی $t_3 = ۶s$ تا $t_4 = ۱۰s$ به مبدأ نزدیک می‌شود.

گام دوم: بنابراین تندی متوسط در بازهٔ زمانی $t_2 = ۲s$ تا $t_3 = ۶s$ که متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

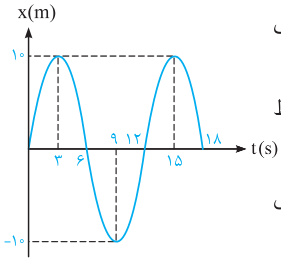
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۶۰}{۶ - ۲} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵\, cm/s = ۰/۱۵\, m/s$$



۵۷ ۳ با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک در دو لحظهٔ $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۶s$ به ترتیب در نقاط $x_1 = -۶۰\ cm$ و $x_2 = +۶۰\ cm$ قرار دارد و تنها در این دو لحظه، فاصلهٔ متحرک تا مبدأ برابر $۶۰\ cm$ می‌شود. بنابراین باید تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیهٔ اول حرکت به‌دست آوریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۲۰}{۶} = ۲۰\,cm/s = ۰/۲\,m/s$$

۵۸ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



۱) همان‌طور که می‌دانید، طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$، تندی متوسط به مسافت طی‌شده توسط متحرک بستگی دارد.

۲) بعد از لحظهٔ $t = ۰$، متحرک در جهت محور x شروع به حرکت می‌کند و در ادامهٔ مسیر، مسافت‌های متفاوتی را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی‌شده توسط آن در هیچ‌یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌باشد.

۳) دقت کنید حتی زمانی‌که متحرک به مکان اولیهٔ خود باز می‌گردد، باز هم مسافت طی‌شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت صفر نمی‌شود و در این‌حالت جابه‌جایی و سرعت متوسط حرکت صفر می‌شود.

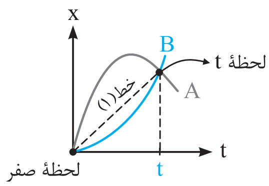
۴) بنابراین در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۶s$ که متحرک به محل اولیه‌اش باز می‌گردد، سرعت متوسط صفر شده و تندی متوسط در هیچ یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌شود.

۵۹ ۲ در بازهٔ t_1 تا t_2، مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی‌شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

دقت

در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است ولی تندی متوسط آن مخالف صفر است (زیرا جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی صفر شده ولی مسافت طی‌شده مخالف صفر است).

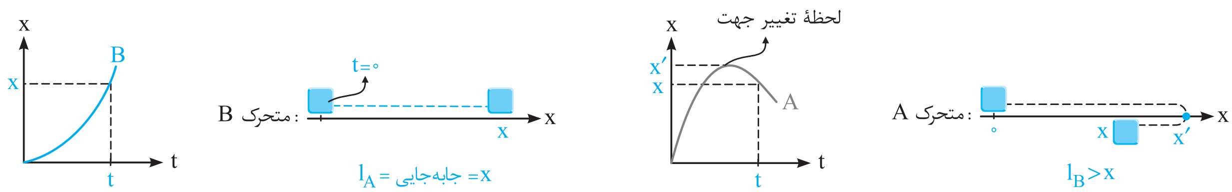
۶۰ ۳ این سؤال را در دو گام حل می‌کنیم:



گام اول: خط واصل از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ t برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این‌که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ t یکسان است.

$(v_{av})_A = (v_{av})_B =$ شیب خط (۱)

گام دوم: برای مقایسهٔ تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظهٔ صفر تا t را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده توسط متحرک A به دلیل تغییر جهت دادن، از جابه‌جایی آن (یعنی x) بیشتر بوده و در مجموع تندی متوسط A از B بیشتر است.

$$(s_{av}) = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{l_A > l_B} (s_{av})_A > (s_{av})_B$$

۶۱ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای (محاسبهٔ آن از روی نمودار مکان ـ زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن) (تست‌های ۶۱ تا ۷۸)

حالا بریم ببینیم تندی لحظه‌ای چیه و چه اطلاعات مفیدی ازش استخراج میشه ...

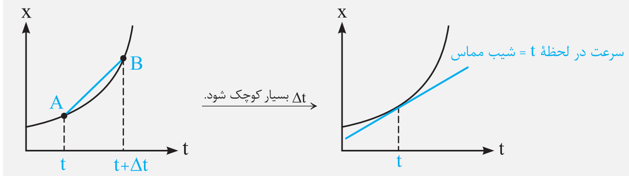
۱) مفهوم تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر را، **تندی لحظه‌ای** می‌نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در واقع سرعت لحظه‌ای آن را بیان کرده‌ایم. برای مثال وقتی درون خودرویی به طرف شمال در حال حرکت باشید و در نقطه‌ای از مسیر، عقربهٔ تندی‌سنج خودروی شما روی $۱۰۰\ km/h$ باشد، در این صورت تندی لحظه‌ای خودرو برابر $۱۰۰\ km/h$ و سرعت لحظه‌ای آن $۱۰۰\ km/h$ به طرف شمال است.

تذکر برای سادگی و بنا به قراردادی که در کتاب‌های فیزیک به‌کار می‌رود، سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای را به‌ترتیب به‌صورت سرعت و تندی بیان می‌کنند. هم‌چنین سرعت را که کمیتی برداری است با نماد $\vec{v}$ و تندی را که برابر اندازهٔ سرعت و کمیتی نرده‌ای است با نماد v نشان می‌دهند.

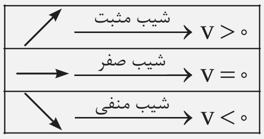
۲) محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان ـ زمان

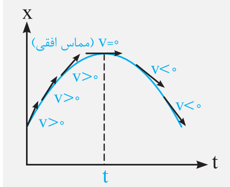
همان‌طور که می‌دانیم شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان، برابر سرعت متوسط متحرک است. حال اگر بازهٔ زمانی Δt بسیار کوچک شود، عملاً A و B بر روی هم منطبق شده و شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطهٔ A برابر است. این موضوع یعنی شیب مماس ترسیمی بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ t، برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در این لحظه است.



نکات مهم و کاربردی

۱) با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی در شکل مقابل، سرعت متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قلهٔ نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. بنابراین متحرک ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند $(v > 0)$، سپس توقف کرده $(v = 0)$ و سپس در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند $(v < 0)$.

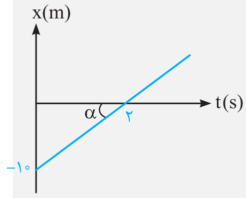




(قرار دادن فلش برای مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است و از نظر علمی برای مماس‌ها نباید جهت بگذاریم.)

۲) عقربهٔ تندی‌سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعی در خصوص جهت حرکت خودرو به ما گزارش نمی‌کند. استفاده از واژهٔ سرعت‌سنج برای این وسیله نادرست است، هر چند در زندگی روزمره معمولاً به اشتباه از این واژه استفاده می‌کنیم.

۳) اگر نمودار مکان ـ زمان در بازه‌ای از حرکت به‌صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازهٔ سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازهٔ زمانی، برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است. به عنوان مثال، در نمودار مکان ـ زمان مقابل، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی، دلخواه ثابت بوده و برابر سرعت لحظه‌ای (یعنی شیب نمودار) می‌باشد.



$$|\tan\alpha| = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

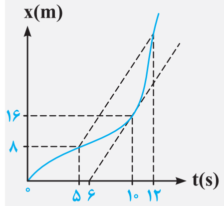
$$v = v_{av} = \tan\alpha = \boxed{+}۵\,m/s$$

شیب نمودار مثبت است

این یعنی اگه یه طراح، سرکارتون بزاره و بپرسه سرعت در هنگام عبور از مبدأ چنده، جواب همون $+۵m/s$ هستش.

یا حتی اگه بپرسه سرعت متوسط در ۱۵ ثانیهٔ سوم چنده، باور کنید بازم جواب همون $+۵\,m/s$ هست، احتمالاً باورش سخت بود براتون ☺ ...

تمرین **نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰s$ برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن بین دو لحظهٔ $t_1 = ۵s$ و $t_2 = ۱۲s$ باشد، متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲s$ در چند متری مبدأ می‌باشد؟** (M.K.A)

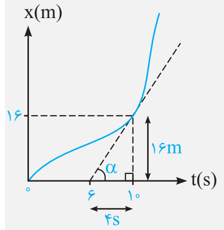


۱) ۲۸ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۲۰

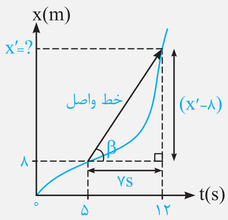
پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) طبق صورت سؤال، تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰s$، برابر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $t_1 = ۵s$ تا $t_2 = ۱۲s$ است و داریم:



$$t = ۱۰s \text{ تندی در لحظهٔ } : v = \text{شیب مماس} = \tan\alpha = \frac{۱۶}{۴} = ۴\,m/s$$

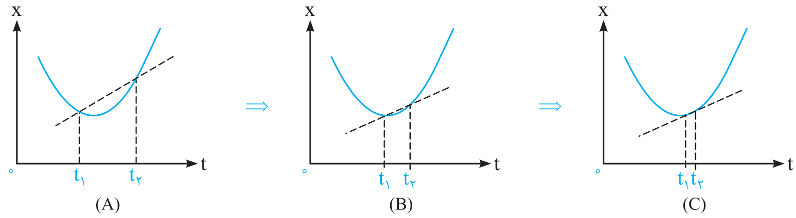
۲) در صورتی‌که متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲s$ در مکان x' باشد، با محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط از لحظهٔ $۵s$ تا $۱۲s$ داریم:



$$\text{سرعت متوسط} : v_{av} = \tan\beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x' - ۸}{۷} = ۴ \Rightarrow x' = ۳۶m \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

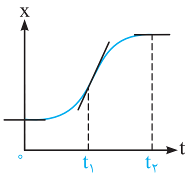
با توجه به مطالب مطرح‌شده در خلاصه نکات فوق، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۶۲ ۲ همان‌گونه که در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، شیب خط واصل، به‌سمت مماس رسم‌شده بر نمودار مکان ـ زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم‌شده بر هر نقطه از نمودار مکان ـ زمان، بیانگر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.



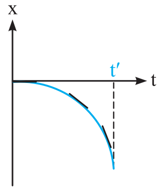
$$\Delta t = t_۲ - t_۱ \to ۰$$

۶۳ ۲ اندازهٔ سرعت متحرک (تندی) در لحظه‌ای بزرگ‌تر است که شیب مماس رسم‌شده بر نمودار مکان ـ زمان در آن نقطه بیشتر باشد (یعنی خط مماس با محور افقی زاویهٔ بزرگ‌تری می‌سازد).



با توجه به مماس‌های رسم‌شده، همان‌طور که مشاهده می‌کنید در لحظهٔ $t_۱$، شیب مماس رسم‌شده بیشتر از سایر نقاط است و تندی در این لحظه از دو لحظهٔ دیگر بزرگ‌تر است.

لحظات $t_۲$ و صفر $\Rightarrow \tan\alpha = ۰ \Rightarrow v = ۰$



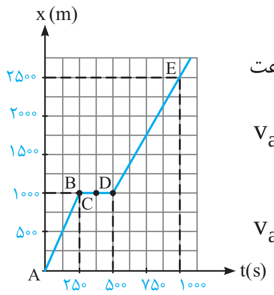
۶۴ ۳ همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه، بیانگر اندازهٔ سرعت متحرک (تندی متحرک) در آن لحظه است. باتوجه به این‌که در نمودار رسم‌شده در گزینهٔ (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظهٔ صفر تا t'، همواره تندی متحرک افزایش می‌یابد.

۶۵ ۱

نکته

اگر نمودار مکان ـ زمان در بازه‌ای از حرکت به‌صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازهٔ سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازهٔ زمانی برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است.

با توجه به نکتهٔ ارائه‌شده، واضح است که شیب DE مقدار ثابتی است و سرعت متحرک در این بازه نیز مقدار ثابتی است. بنابراین سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانیِ قرار گرفته در این بازه (D تا E) برابر سرعت لحظه‌ای در این بازه است. یعنی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $۶۰۰s < t < ۹۰۰s$ برابر سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t = ۵۵۰s$ (یا هر لحظهٔ دیگر که در بازهٔ زمانی $۵۰۰s$ تا $۱۰۰۰s$ قرار گرفته باشد) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.



بررسی دیگر گزینه‌ها:

۲) متحرک در بازهٔ A تا B در مدت $۲۵۰ - ۰ = ۲۵۰s$ به اندازهٔ $۱۰۰۰ - ۰ = ۱۰۰۰m$ جابه‌جا شده است، بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{۱۰۰۰ - ۰}{۲۵۰ - ۰} = ۴\,m/s$$

از طرفی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ D تا E برابر است با:

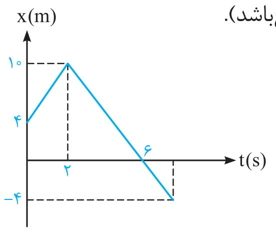
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_E - x_D}{t_E - t_D} = \frac{۲۵۰۰ - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰ - ۵۰۰} = \frac{۱۵۰۰}{۵۰۰} = ۳\,m/s$$

بنابراین متحرک در AB، تندتر از DE حرکت می‌کند.

۳) برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط در کل زمان حرکت، نسبت جابه‌جایی کل متحرک را بر کل بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:

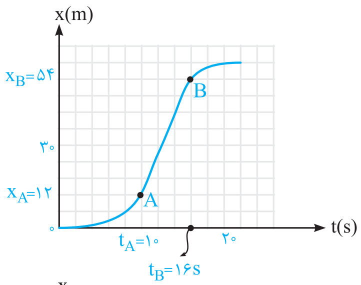
$$v_{av\,کل} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{x_E - x_A}{t_E - t_A} = \frac{۲۵۰۰ - ۰}{۱۰۰۰ - ۰} = ۲/۵\,m/s$$

۴) با توجه به نمودار، مشاهده می‌کنیم که متحرک در تمام لحظات بین $t = ۲۵۰s$ تا $t = ۵۰۰s$ در مکان $x = ۱۰۰۰m$ قرار داشته و جابه‌جا نمی‌شود. بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی ساکن بوده و سرعت آن در این بازه صفر است (بنابراین سرعت در نقطهٔ C نیز صفر می‌باشد).



۶۶ ۲ با توجه به نکتهٔ مطرح‌شده در سؤال قبل، می‌توانیم بگوییم که سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ (که متحرک از مبدأ عبور می‌کند)، برابر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۲s تا ۶s است. بنابراین داریم:

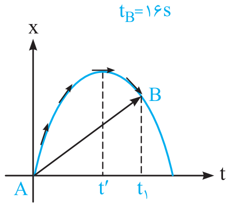
$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{۰ - ۱۰}{۶ - ۲}\vec{i} = -\frac{۱۰}{۴}\vec{i} = -۲/۵\,\vec{i}$$



۶۷ ۳ در حرکت این متحرک، از لحظهٔ $t=0$ تا A، سرعت متحرک در حال افزایش است (شیب مماس ترسیمی بر نمودار در حال افزایش است)، در ادامه از A تا B نمودار مکان ـ زمان خط صاف بوده و سرعت متحرک ثابت است و در نهایت از B سرعت کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به این موضوع، بیشترین سرعت بین A تا B است و کافیست شیب خط AB را بیابیم (هر یک از خانه‌های محور قائم معادل ۶m و هر یک از خانه‌های محور افقی معادل ۲s است):

$$v_{AB}=v_{av_{AB}}=\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}=\frac{54-12}{16-10}\Rightarrow v_{AB}=7\,m/s$$

۶۸ ۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۵)، گزینهٔ (۳) صحیح است.



۶۹ ۲ به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خطِ رسم‌شده بین دو لحظهٔ $t=0$ و t_1 (خط AB) بیانگر سرعت متوسط حرکت جسم می‌باشد. چون شیب خط موردنظر مثبت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی مثبت بوده و در جهت مثبت محور x است.

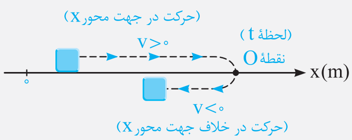
۲) از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه، بیانگر سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است. همان‌طور که می‌بینید، از شروع حرکت تا لحظهٔ t' شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای مثبت و از لحظهٔ t' تا t_1 شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای منفی می‌باشد.

بنابراین سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت هم هستند.

۷۰ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

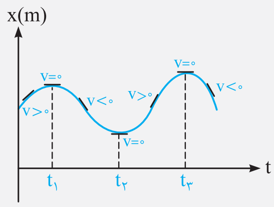
خلاصه نکات ۶ — بررسی لحظهٔ تغییر جهت یک متحرک (تست‌های ۷۰ تا ۷۷)

تو این قسمت، می‌خوایم معنی تغییر جهت متحرک رو بفهمیم ... این موضوع تو خیلی از سؤالا به کارمون میاد.



در شکل مقابل متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور x در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است) در لحظهٔ t، متحرک به نقطهٔ O رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (این موضوع یعنی در ادامهٔ حرکت سرعت آن منفی می‌شود.)، لحظهٔ t را در اصطلاح **لحظهٔ تغییر جهت متحرک** می‌نامیم.

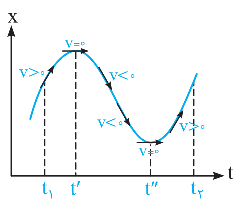
شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطهٔ O: برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.



نکته در قله‌های نمودار مکان ـ زمان، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت (تغییر علامت) می‌دهد. این موضوع یعنی در این مکان‌ها متحرک تغییر جهت می‌دهد.

در لحظات t_1، t_2 و t_3 جهت حرکت متحرک تغییر کرده است. ⇐

مطابق خلاصه نکات فوق و با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، **سرعت متحرک** در دو لحظهٔ t' و t'' صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (یعنی اگر سرعت مثبت بوده، منفی شده و بالعکس).

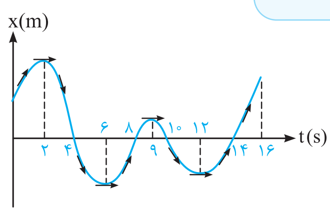


بنابراین در بازهٔ t_1 تا t_2، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

تذکر

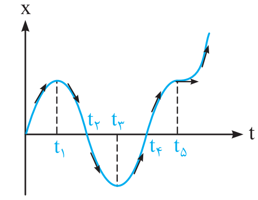
نشان دادن فلش بر روی مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.

(شیب مثبت) ↗	(شیب منفی) ↘	(شیب صفر) →

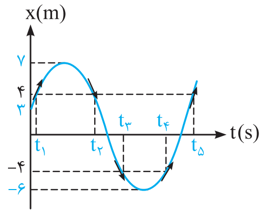


۷۱ ۲ تندی متحرک در لحظه‌های $t_1=2s$، $t_2=6s$، $t_3=9s$ و $t_4=12s$ صفر شده و علامت سرعت بعد و قبل از این لحظات تغییر می‌کند، بنابراین متحرک در ۱۶ ثانیهٔ اول حرکت، ۴ بار تغییر جهت می‌دهد.

از طرف دیگر در بازه‌های زمانی (۰ تا ۲s)، (۶s تا ۹s) و (۱۲s تا ۱۶s)، شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه علامت سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.



۷۲ **۲** همان‌طور که می‌دانید، شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، بیانگر سرعت متحرک است و در بازه‌های زمانی که شیب خط مماس منفی می‌شود، سرعت در خلاف محور x بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، تنها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_4 شیب خط مماس بر نمودار منفی می‌شود.



۷۳ **۱** به موارد زیر توجه کنید:

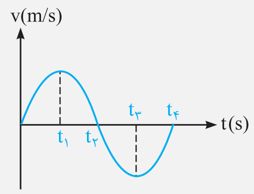
۱) هنگامی‌که متحرک در نقاط $x = ۴m$ یا $x = -۴m$ قرار می‌گیرد، فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان برابر $۴m$ می‌شود. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، در لحظات t_1، t_2، t_3، t_4 و t_5 فاصلهٔ متحرک تا مبدأ برابر $۴m$ می‌شود.

۲) در صورت سؤال لحظاتی مدنظر است که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین باید سرعت متحرک و شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، بنابراین فقط لحظات t_2 و t_3 قابل‌قبول هستند و گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۷۴ **۴** برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ **تحلیل نمودار سرعت ـ زمان** (تست‌های ۷۴ تا ۷۸)

حالا بریم جلوتر و یاد بگیریم که از روی نمودار سرعت ـ زمان چی میشه فهمید ...



فرض کنید نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند به‌صورت مقابل باشد:

در مورد این نمودار می‌توان به نکات مهم و کاربردی زیر اشاره کرد:

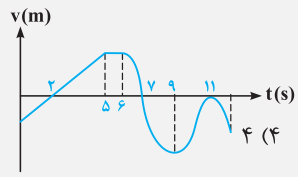
۱) در بازهٔ زمانی که نمودار بالای محور (t) است، (۰ تا t_2) سرعت مثبت بوده و متحرک در جهت محور x در حال حرکت می‌باشد.

۲) در بازهٔ زمانی که نمودار زیر محور (t) است، (t_2 تا t_4) سرعت منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است.

۳) در لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لحظه علامت سرعت عوض می‌شود (مانند t_2)، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

تمرین بعد، خیلی خوب و مفهومیه. با دقت همهٔ عبارت‌هاش رو بخونید ...

تمرین ۱ **با توجه به نمودار سرعت ـ زمان زیر که مربوط به متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند، چند مورد از عبارات زیر درست است؟**



الف) متحرک ۵ ثانیه در جهت محور x حرکت کرده است. **ب) تندی حرکت، سه بار صفر می‌شود.**

ج) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

د) در شش ثانیهٔ اول حرکت، متحرک ۲s در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ به بررسی تک‌تک عبارت‌ها می‌پردازیم:

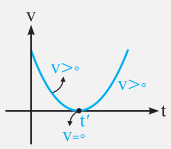
الف) سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۷s$ مثبت بوده و متحرک در این ۵ ثانیه در جهت محور x حرکت می‌کند و عبارت (الف) درست است.

ب) تندی حرکت در سه لحظهٔ $t_1 = ۲s$، $t_2 = ۷s$ و $t_3 = ۱۱s$ صفر می‌شود و عبارت (ب) درست است.

ج) در لحظات $t_1 = ۲s$ و $t_2 = ۷s$ سرعت متحرک صفر شده و علامت آن عوض می‌شود، بنابراین متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد. دقت کنید که در لحظهٔ $t = ۱۱s$ با این‌که سرعت متحرک صفر می‌شود، اما تغییر علامت نمی‌دهد (در قبل و بعد از آن سرعت منفی است) و در نتیجه متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد و عبارت (ج) هم درست است.

توی لحظهٔ $t = ۱۱s$، متحرک یه لحظه وایساده و بعد بازم به حرکتش تو خلاف جهت محور x ادامه داده، یعنی اصطلاحاً متحرک توقف کرده، ولی تغییر جهت نداده ...

د) در شش ثانیهٔ اول در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۲s$ سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه عبارت (د) هم درست است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.



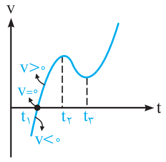
تذکر هر توقفی، لزوماً لحظهٔ تغییر جهت نیست. به‌طور مثال در شکل زیر در لحظهٔ t'، سرعت صفر شده (لحظهٔ توقف) ولی تغییر علامت نمی‌دهد و این یعنی در این لحظه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

تمرین ۲ **کدام یک از دو مورد زیر در رابطه با حرکت یک جسم بر روی مسیر مستقیم نادرست است؟**

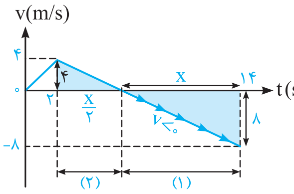
۱) اگر متحرک تغییر جهت دهد، حتماً توقف کرده است. **۲) اگر متحرک توقف کرده باشد، لزوماً تغییر جهت می‌دهد.**

پاسخ با توجه به توضیحات مطرح‌شده در تذکر فوق، عبارت (۱) صحیح است.

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان داده‌شده، در لحظهٔ $t = ۶s$ نه سرعت متحرک صفر می‌شود و نه علامت سرعت عوض می‌شود، بنابراین متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد. درستی سایر گزینه‌ها را با توجه به مطالب مطرح‌شده در خلاصه نکات (۷) بررسی کنید.



۷۵ **۱** با در دست داشتن نمودار سرعت ـ زمان برای مشخص کردن لحظهٔ تغییر جهت متحرک، کافی است لحظه‌ای را بیابیم که نمودار محور زمان را **قطع کرده** و **تغییر علامت** دهد. بنابراین در شکل روبه‌رو، متحرک تنها در لحظهٔ t_1 تغییر جهت می‌دهد.



۷۶ **۳** همان‌طور که می‌دانیم در نمودار سرعت ـ زمان، در زمان‌هایی که نمودار زیر محور زمان است، سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. با توجه به تشابه دو مثلث هاشورخورده، اگر طول قسمت (۱) که سرعت در آن منفی است را x درنظر بگیریم، طول قسمت (۲) برابر $\frac{x}{2}$ است و می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow x + \frac{x}{2} = (14 - 2) = 12 \Rightarrow x = 8s$$

بنابراین متحرک به اندازهٔ $x = 8s$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود.

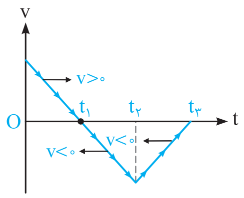
۷۷ **۳**

تذکر مهم

در نمودار سرعت ـ زمان، هرگاه نمودار از محور زمان دور شود، تندی متحرک $|v|$ در حال افزایش است و بالعکس.

ابتدا باید دقت شود که نمودار متحرک **سرعت ـ زمان** داده‌شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

۱) از لحظهٔ t_1 تا t_3 نمودار سرعت ـ زمان زیر محور زمان (t) است و در نتیجه سرعت متحرک در این بازهٔ زمانی منفی است و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.



۲) از لحظهٔ $t = 0$ تا $t = t_1$ سرعت متحرک مثبت و اندازهٔ آن در حال کاهش بوده تا در لحظهٔ t_1 به صفر برسد. سپس از لحظهٔ t_1 تا t_2 سرعت متحرک منفی ولی اندازهٔ آن ($|v|$) در حال افزایش است (نمودار از محور افقی دور می‌شود).
از لحظهٔ t_2 تا t_3 نیز سرعت متحرک منفی است ولی اندازهٔ آن ($|v|$) در حال کاهش است (نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود) تا در لحظهٔ t_3 سرعت متحرک دوباره صفر شود.

۷۸ **۲** به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط آن با یک‌دیگر برابر می‌شود و در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان خواهد شد.

۲) از طرف دیگر می‌دانیم که دو ثانیهٔ دوم، معادل بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$ است.

بنابراین برای پاسخ دادن به این سؤال، باید نموداری را پیدا کنیم که متحرک در این بازهٔ زمانی تغییر جهت نداده باشد. سرعت متحرک‌های C و D (نمودار گزینه‌های (۳) و (۴)) به ترتیب در لحظات $2/5s$ و $3s$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین این دو متحرک تغییر جهت می‌دهند. متحرک A نیز در لحظهٔ $t = 3$ تغییر جهت می‌دهد، اما متحرک B در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$ تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ این سؤال است.

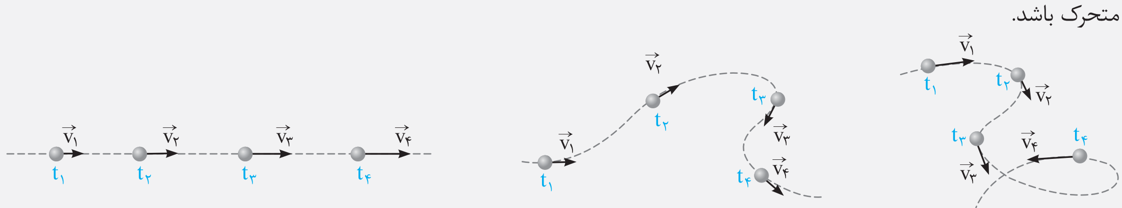
۷۹ **۴** برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۸ شتاب متوسط، شتاب لحظه‌ای و یافتن [illegible] با کمک نمودار سرعت [illegible] (تست‌های ۷۹ تا ۱۰۱)

تو این قسمت، می‌خوایم کلی مطلب در مورد شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای یاد بگیریم...

۱) آشنایی با مفهوم شتاب متوسط

همان‌طور که در علوم سال نهم دیدید، هرگاه سرعت حرکت جسمی تغییر کند، حرکت آن شتابدار است. با توجه به این که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر، بر مسیر حرکت مماس است، تغییر سرعت جسم می‌تواند مانند شکل (۱)، به دلیل تغییر در اندازهٔ بردار سرعت (تندی) جسم باشد، یا مانند شکل(۲) می‌تواند به دلیل تغییر در جهت بردار سرعت آن باشد، یا هم‌چنین می‌تواند مانند شکل (۳) به دلیل تغییر هم‌زمان در اندازه و جهت بردار سرعت متحرک باشد.



(۱) (۲) (۳)

شتاب متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه (t_1 , t_2)، به صورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود که در آن $\vec{v}_1$، سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 و $\vec{v}_2$، سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$: شتاب متوسط

تذکر۱ همان‌طور که دیده می‌شود شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta \vec{v})$ است. یکای SI شتاب متوسط، متر بر مربع ثانیه (m/s^2) است.

تذکر۲ در حالت یک‌بعدی (مثلاً هنگامی که متحرک بر روی محور x حرکت می‌کند)، برای محاسبهٔ Δv، کافیست v_1 و v_2 را با در نظر گرفتن علامت محاسبه کرده و $v_2 - v_1$ را به صورت جبری به دست آوریم.

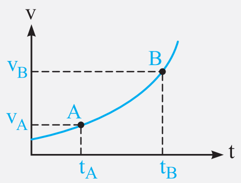
تمرین۱ **معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم در حال حرکت است، در SI از رابطهٔ $v = 3t^2 - 4$ به دست می‌آید. شتاب متوسط متحرک در ثانیهٔ دوم حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

پاسخ منظور از ثانیهٔ دوم حرکت، یعنی $1s \le t < 2s$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = 3t^2 - 4 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 3 \times 1^2 - 4 = -1 m/s \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = 3 \times 2^2 - 4 = 8 m/s \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{8-(-1)}{2-1} = 9 m/s^2$$

۲) محاسبهٔ شتاب متوسط از روی نمودار سرعت ـ زمان

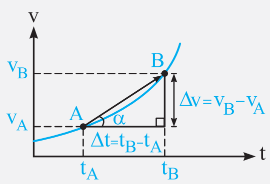
نکات این قسمت، خیلی شبیه محاسبهٔ سرعت متوسط از روی نمودار مکان ـ زمانه ...



فرض کنید نمودار سرعت ـ زمان حرکت یک متحرک داده‌شده و شتاب متوسط بین دو لحظهٔ t_A و t_B از آن خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبهٔ شتاب متوسط، از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد:

روش اول (نمودارخوانی): ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص می‌کنیم. سپس سرعت متحرک در نقاط A و B را به دست آورده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a_{av_{A,B}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$$: شتاب متوسط بین A و B

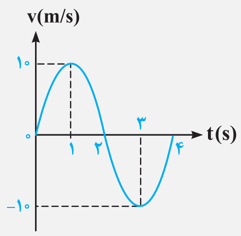


روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر شتاب متوسط متحرک بین دو لحظهٔ A و B از حرکت است.

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{av}$$

این روش در مسائلی که می‌خواهد شتاب متوسط را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کند، روش بسیار مناسبی است.

تو ادامهٔ کار با یه تمرین توپ، این موضوع رو بهتر می‌فهمیم ...



تمرین۲ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط در بازهٔ زمانی ۱ تا ۳ ثانیه در SI برابر است با:** (ریاضی داخل ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱۰- ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ نمودار داده‌شده یک نمودار سرعت ـ زمان است و برای محاسبهٔ a_{av} در آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

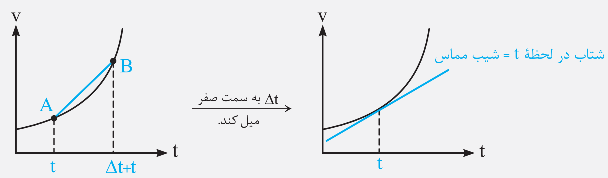
با توجه به نمودار، سرعت لحظه‌ای در $t = 1s$ و $t = 3s$ به ترتیب برابر $10 m/s$ و $-10 m/s$ است. بنابراین شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\begin{cases} t_A = 1s \Rightarrow v_A = 10 m/s \\ t_B = 3s \Rightarrow v_B = -10 m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{-10-10}{3-1} = -10 m/s^2$$

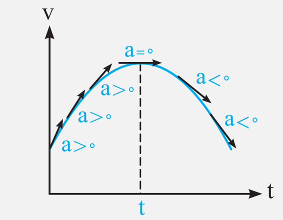
۳) تحلیل کیفی شتاب از روی نمودار سرعت ـ زمان

حالا بریم یه کم روی شتاب لحظه‌ای هم کار کنیم ...

می‌دانیم که شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان، برابر شتاب متوسط متحرک است. حال اگر بازهٔ زمانی Δt بسیار کوچک شود، نقاط A و B عملاً تبدیل به یک نقطه شده و شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطهٔ B برابر است. شیب مماس ترسیمی بر نمودار، برابر شتاب لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ t است.



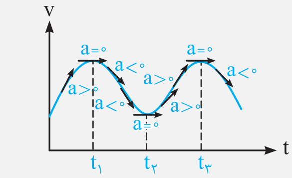
نکات مهم و کاربردی



۱) با توجه به مماس‌های رسم‌شده در شکل مقابل، شتاب متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قلهٔ نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد.

(قرار دادن فلش‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است.)

۲) در نمودار داده‌شده، قلهٔ نمودار سرعت ـ زمان، لحظهٔ تغییر جهت بردار شتاب است زیرا شتاب در قله صفر بوده، قبل از آن مثبت و بعد از آن منفی است.

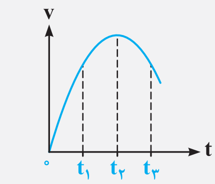


۳) به طور کلی در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت ـ زمان، شتاب متحرک صفر شده و بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.

(دقت شود که قرار دادن جهت برای مماس‌ها، به منظور درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.)

(در t_1، t_2 و t_3 شتاب تغییر جهت می‌دهد.)

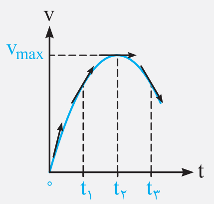
تو ادامه با دو تا تمرین توپ، این موضوع رو کامل یاد می‌گیریم ...



تمرین ۳ شکل مقابل نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در کدام لحظه، شتاب متحرک مثبت و بیشینه است؟

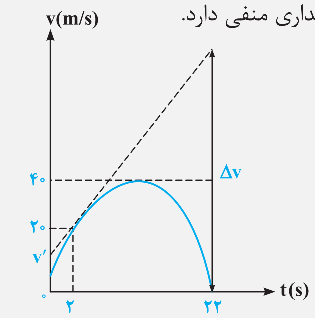
۱) t_3 ۲) t_2

۳) t_1 ۴) مبدأ زمان



پاسخ می‌دانیم شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت ـ زمان، شتاب متحرک را نشان می‌دهد. با توجه به این موضوع ابتدا باید در تمام لحظات مطرح‌شده در گزینه‌ها، مماس رسم شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود از $t=0$ تا t_2، زاویهٔ مماس با محور افق دائماً در حال کاهش بوده و شتاب متحرک دائماً کاهش می‌یابد تا در t_2 صفر می‌شود. پس از t_2، شیب نمودار (شتاب) منفی شده و اندازهٔ آن تا t_3 در حال افزایش است. بنابراین در لحظهٔ $t=0$، شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت ـ زمان مقدار ماکزیمم و مثبت را داشته و در نتیجه در این لحظه شتاب متحرک مثبت و بیشینه است و گزینهٔ (۴) صحیح است.

دقت: در این سؤال در لحظهٔ t_2، سرعت متحرک ماکزیمم و شتاب آن صفر است و در لحظهٔ t_3 شتاب متحرک مقداری منفی دارد.

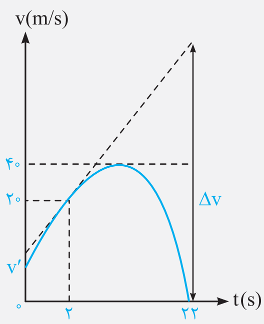


تمرین ۴ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x در حال حرکت است، مطابق شکل می‌باشد. اگر در لحظهٔ $t = 2s$، بردار شتاب متحرک در SI برابر $+5\vec{i}$ باشد، مقادیر v' و Δv به‌ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟ (تألیفی)

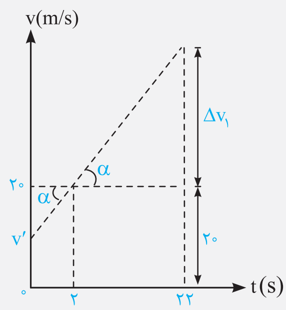
۱) ۵ ، ۱۰۰   ۲) ۵ ، ۱۲۰

۳) ۱۰ ، ۱۰۰   ۴) ۱۰ ، ۱۲۰

پاسخ همان‌طور که می‌دانیم، شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت‌ـ زمان، معادل با شتاب حرکت متحرک است. در این سؤال، شیب مماس ترسیم شده بر نمودار سرعت ـ زمان در لحظهٔ $t = 2s$ برابر ۵ واحد است. بنابراین در ادامه با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:



⇒



$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع‌مقابل}}{\text{ضلع‌مجاور}} = \frac{20 - v'}{2 - 0} = 5 \Rightarrow v' = 10\,m/s$$

$$\tan\alpha = \frac{\Delta v_1}{22 - 2} = 5 \Rightarrow \Delta v_1 = 100\,m/s$$

$$\Rightarrow \Delta v = \Delta v_1 + 20\,m/s = 120\,m/s$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

شتاب متوسط با بردار $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت است نه بردار $\vec{v}$ و گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است. سایر گزینه‌ها، با توجه به خلاصه نکات فوق، صحیح می‌باشند.

۸۰ **۴** با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۸)، در گزینهٔ (۴) اندازهٔ سرعت ثابت بوده و تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین در این حالت، $\vec{v}_1=\vec{v}_4$ بوده و شتاب متوسط از لحظهٔ t_1 تا t_4 برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_4-\vec{v}_1}{\Delta t}\xrightarrow{\vec{v}_4=\vec{v}_1}\vec{a}_{av}=0$$

۸۱ **۲** با توجه به رابطهٔ شتاب متوسط $\left(\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right)$ داریم:

$$\begin{cases}t_1=3s\rightarrow\vec{v}_1=6\vec{i}\\ t_2=6s\rightarrow\vec{v}_2=-6\vec{i}\end{cases}\Rightarrow \text{شتاب متوسط}:\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t}=\frac{(-6)-(6)}{6-3}\vec{i}=-\frac{12}{3}\vec{i}=-4\vec{i}$$

۸۲ **۱** ابتدا سرعت‌های متحرک که برحسب cm/s داده‌شده‌اند را برحسب m/s نوشته و با توجه به تعریف شتاب متوسط $\left(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$، داریم:

$$\begin{cases}v_1=1cm/s=0/01m/s\ ,\ v_2=99cm/s=0/99m/s\\ \Delta t=0/5s\end{cases}\Rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{0/99-0/01}{0/5}=\frac{0/98}{\frac{1}{2}}=1/96m/s^2$$

یادآوری

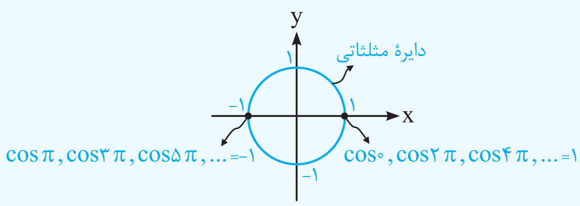
$1cm/s=0/01m/s$ یا $1m/s=100cm/s$

۸۳ **۳** سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی داده‌شده را به‌دست آورده و شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}t_1=2s\rightarrow v_1=0/3\pi\overbrace{\cos(10\pi)}^{1}=0/3\pi\\ t_2=5s\rightarrow v_2=0/3\pi\cos(25\pi)=0/3\pi\overbrace{\cos(\pi)}^{-1}=-0/3\pi\end{cases}$$

$$\text{اندازهٔ شتاب متوسط}:|\vec{a}_{av}|=\frac{|v_2-v_1|}{t_2-t_1}=\frac{|-0/3\pi-(0/3\pi)|}{5-2}=0/2\pi m/s^2$$

یادآوری



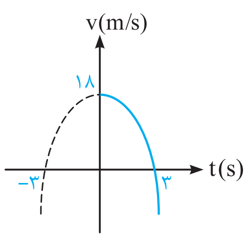
۸۴ **۳** **گام اول:** با توجه به بردار سرعت داده‌شده در پایان ثانیهٔ دوم $(t=2s)$، مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$v=2t^2+bt+6\xrightarrow[v=20m/s]{t=2s}2\times(2)^2+b\times2+6=20\Rightarrow b=3$$

گام دوم: حال برای محاسبهٔ شتاب متوسط در ثانیهٔ دوم $(1s\le t\le 2s)$، به راحتی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}t_1=1s\rightarrow v_1=2\times(1)^2+3\times1+6=11m/s\\ t_2=2s\rightarrow v_2=20m/s\end{cases}\Rightarrow|\vec{a}_{av}|=\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\frac{20-11}{2-1}=9m/s^2$$

۸۵ **۳** ابتدا ریشه‌های معادلهٔ موردنظر را به‌دست می‌آوریم و به دنبال آن نمودار سرعت ـ زمان را که یک سهمی است رسم می‌کنیم:

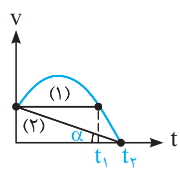


$$v=-2t^2+18\Rightarrow\begin{cases}-2t^2+18=0\Rightarrow t=3s\ \text{یا}\ t=-3\\ t=0\Rightarrow v=18m/s\end{cases}$$

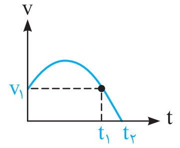
همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $t_1=0$ تا $t_2=3s$، سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$|\vec{a}_{av}|=\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{|0-18|}{3}=6m/s^2$$

۸۶ **۲** همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط رسم‌شده بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه می‌باشد. در شکل روبه‌رو شیب خط (۱) برابر a_{av_1} و شیب خط (۲) برابر a_{av_2} است. خط (۱) افقی است و شیبی برابر صفر دارد، اما شیب خط (۲)، عددی منفی است، بنابراین داریم:



$$a_{av_1}=0\ ,\ a_{av_2}<0$$

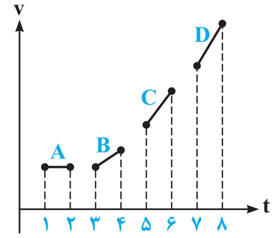


روش دیگر: با توجه به شکل مقابل، متحرک در لحظهٔ صفر دارای سرعت v_1 و در لحظهٔ t_1 نیز دارای همان سرعت می‌باشد، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 صفر بوده و در نتیجه شتاب متوسط آن در این بازه نیز صفر است.

$$a_{av_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v = ۰} a_{av_1} = ۰$$

از سوی دیگر سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 برابر صفر است. بنابراین شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 برابر است با:

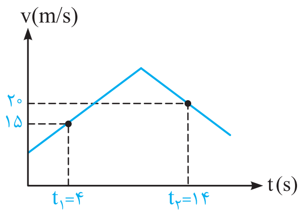
$$a_{av_2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - v_1}{t_2 - ۰} < ۰$$



تمرین **در شکل مقابل شتاب متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟**

پاسخ

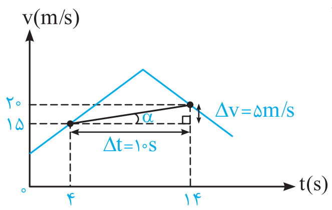
$$a_{av_A} = ۰ < a_{av_B} < a_{av_C} < a_{av_D}$$



۸۷ **۱** **روش اول (نمودارخوانی):** با توجه به نمودار سرعت ـ زمان داده‌شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = ۴s \rightarrow v_1 = ۱۵ m/s \\ t_2 = ۱۴s \rightarrow v_2 = ۲۰ m/s \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{۲۰ - ۱۵}{۱۴ - ۴}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{۱}{۲} m/s^2 = ۰/۵ m/s^2$$

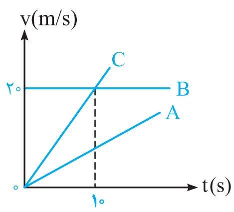


روش دوم (استفاده از شیب نمودار): شتاب متوسط بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان، مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.

$$|\vec{a}_{av}| = \tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲} m/s^2 = ۰/۵ m/s^2$$

دقت: با توجه به شیب پاره‌خط AB، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازه مقداری مثبت دارد.

۸۸ **۲** برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

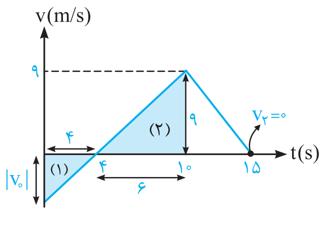


۱) هر سه نمودار سرعت ـ زمان، به صورت خطی می‌باشند و شیب آن‌ها ثابت است، بنابراین شتاب هر سه متحرک در طول حرکتشان ثابت است.

$$\text{شیب } C > \text{شیب } A > \text{شیب } B = ۰ \Rightarrow a_C > a_A > a_B$$

۲) با توجه به ثابت بودن شتاب، رابطهٔ فوق در هر بازهٔ زمانی دلخواه نیز در مورد شتاب متوسط سه متحرک برقرار است و در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$(a_{av})_C > (a_{av})_A > (a_{av})_B = ۰$$

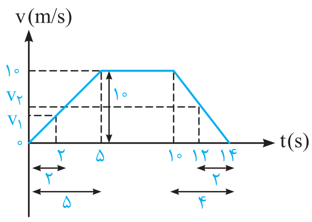


۸۹ **۱** برای محاسبهٔ اندازهٔ شتاب متوسط از روی نمودار سرعت ـ زمان، از رابطهٔ $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ استفاده می‌کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث‌ها، سرعت در لحظهٔ $t = ۰$ را به‌دست آوریم:

$$\text{تشابه مثلث‌های (۱) و (۲)}: \frac{۴}{۶} = \frac{|v_0|}{۹} \Rightarrow |v_0| = ۶ m/s$$

همان‌طور که از روی نمودار مشخص است، v_0 عددی منفی است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = ۰ \Rightarrow v_1 = v_0 = -۶ m/s \\ t_2 = ۱۵s \Rightarrow v_2 = ۰ \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{۰ - (-۶)}{۱۵ - ۰} = ۰/۴ m/s^2$$



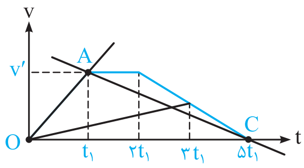
۹۰ **۲** برای محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۱۲s$، ابتدا سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی به کمک تشابه به‌دست می‌آوریم:

$$t_1 = ۲s \Rightarrow \frac{۱۰}{v_1} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow v_1 = ۴ m/s \qquad \text{(تشابه در سمت چپ شکل)}$$

$$t_2 = ۱۲s \Rightarrow \frac{۱۰}{v_2} = \frac{۱۴ - ۱۰}{۱۴ - ۱۲} \Rightarrow v_2 = ۵ m/s \quad \text{(تشابه در سمت راست شکل)}$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{۵ - ۴}{۱۲ - ۲} = \frac{۱}{۱۰} m/s^2$$

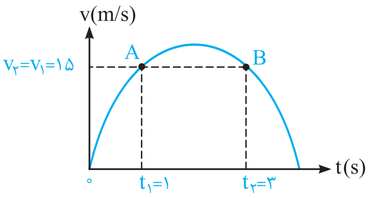
۹۱ **۱** می‌دانیم که در نمودار سرعت ـ زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، شتاب متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی را می‌دهد. بنابراین شتاب متوسط در بازه‌ای بیشتر است که شیب خط واصل بین نقطهٔ ابتدا و انتهای آن بازه بیشتر باشد.



با توجه به شکل روبه‌رو در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$، اندازهٔ شتاب متوسط بزرگ‌تر از سایر بازه‌هاست، زیرا شیب خط OA بزرگ‌تر از شیب در سایر بازه‌ها است.

$$\begin{cases} \text{OA شیب خط} = a_{av_{OA}} = \dfrac{v'}{t_۱} \\ \text{AC شیب خط} = a_{av_{AC}} = -\dfrac{v'}{۴t_۱} \end{cases} \Rightarrow |a_{av_{OA}}| > |a_{av_{AC}}|$$

۹۲ **۱** با توجه به نمودار سرعت ـ زمان داده‌شده، سرعت متحرک در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ یکسان بوده و با توجه به تعریف شتاب متوسط $\left(|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$، شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی صفر است.

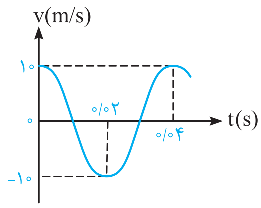


$$|\vec{a}_{av}| = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \xrightarrow{v_۲=v_۱=۱۵\,m/s} |\vec{a}_{av}| = \frac{۱۵-۱۵}{t_۲ - t_۱} = \frac{۰}{t_۲ - t_۱} = ۰$$

دقت: می‌دانیم شیب خط AB نیز برابر شتاب متوسط متحرک از $t_۱$ تا $t_۲$ است، با توجه به صفر بودن شیب این خط، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازهٔ زمانی صفر است.

۹۳ **۴** **خواستهٔ اول:** محاسبهٔ شتاب متوسط:

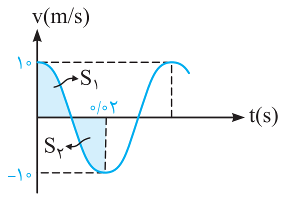
با توجه به نمودار مقابل، شتاب متوسط در بازهٔ (۰٫۰۲s ،۰) برابر است با:



$$\begin{cases} t_۰ = ۰ \rightarrow v_۰ = ۱۰\,m/s \\ t_۱ = ۰/۰۲s \rightarrow v_۱ = -۱۰\,m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_۱ - v_۰}{t_۱ - t_۰} = \frac{-۱۰-۱۰}{۰/۰۲-۰} = -۱۰^۳\,m/s^۲$$

خواستهٔ دوم: محاسبهٔ سرعت متوسط:

برای محاسبهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی داده‌شده، ابتدا جابه‌جایی متحرک را به کمک مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان به دست می‌آوریم. در نمودار کسینوسی داده‌شده، مساحت $S_۱$ با مساحت $S_۲$ با هم برابر است.

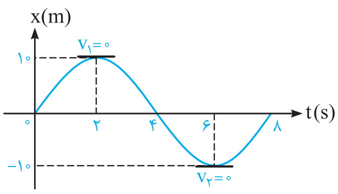


بنابراین جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا ۰/۰۲s برابر صفر است.

$$\text{جابه‌جایی}: \Delta x = |S_۱| - |S_۲| \xrightarrow{|S_۱|=|S_۲|} \Delta x = ۰$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = ۰$$

۹۴ **۲** طبق تعریف شتاب متوسط $\left(a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}\right)$، کافی است سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_۱ = ۲s$ و $t_۲ = ۶s$ به‌دست بیاوریم.

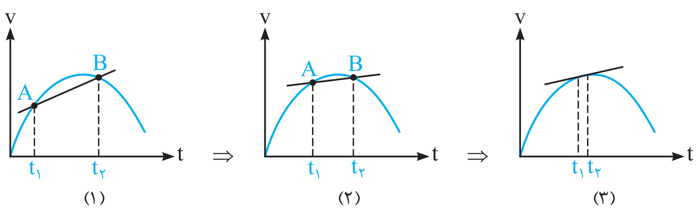


در شکل مشاهده می‌کنید که شیب مماس‌های رسم‌شده در لحظات فوق برابر صفر است، بنابراین سرعت لحظه‌ای در این نقاط صفر است و در نتیجه شتاب متوسط نیز در این بازه صفر است.

$$a_{av} = \frac{۰-۰}{۶-۲} = ۰$$

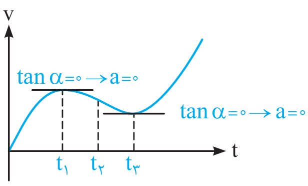
۹۵ **۴** با توجه به مطالب ذکر شده در خلاصه نکات (۸)، شیب خط موردنظر شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

به شکل‌های زیر توجه کنید:



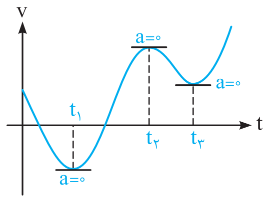
همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با کوچک‌تر شدن بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، شیب پاره‌خط AB به سمت مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت ـ زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت ـ زمان در هر لحظه، بیانگر شتاب لحظه‌ای در آن لحظه است.

۹۶ **۲** در زمان‌هایی که شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت ـ زمان صفر باشد (از جمله نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار)، شتاب لحظه‌ای متحرک برابر صفر است. بنابراین در لحظات $t_۱$ و $t_۳$، شتاب متحرک برابر صفر است.

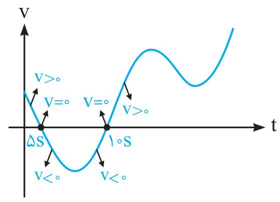


۹۷ **۴** با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۸)، گزینهٔ (۴) درست است.

۹۸ **۲** همان‌طورکه می‌دانیم، در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت ـ زمان، شتاب متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. با توجه به این موضوع در نمودار داده‌شده، شتاب متحرک در لحظات $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ تغییر جهت می‌دهد.
هم‌چنین می‌دانیم در نقاطی که سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (نمودار سرعت ـ زمان محور زمان را قطع کرده و تغییر علامت می‌دهد) متحرک تغییر جهت می‌دهد. بنابراین متحرک در لحظات $۵s$ و $۱۰s$ تغییر جهت داده است.



در لحظات $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ شتاب متحرک تغییر جهت می‌دهد.



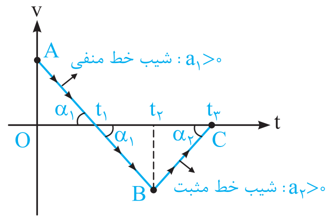
در لحظات $t=۵s$ و $t=۱۰s$ سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد.

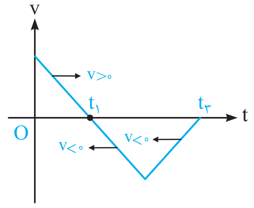
۹۹ **۳** ابتدا باید دقت شود که نمودار **سرعت ـ زمان** متحرک داده‌شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

۱) از لحظهٔ صفر تا $t_۲$ شیب نمودار سرعت ـ زمان منفی بوده و در نتیجه شتاب متحرک در این بازهٔ زمانی مقداری منفی است.

۲) از لحظهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ نمودار سرعت ـ زمان زیر محور زمان (t) است و سرعت متحرک در این بازهٔ زمانی منفی است.

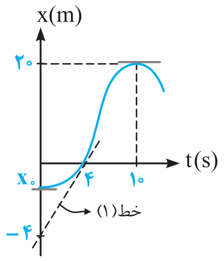
دقت: دقت شود از لحظهٔ $t=۰$ تا لحظهٔ $t_۲$، شیب پاره‌خط AB همواره منفی است، یعنی برخورد این پاره‌خط با محور زمان، تغییری در منفی بودن علامت شتاب ایجاد نمی‌کند (چرا؟).





۱۰۰ **۴** با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۸)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۰۱ **۴** با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی بر نمودار، سرعت در لحظات $t_۱=۰$ ، $t_۲=۴s$ و $t_۳=۱۰s$ عبارت است از:



$$\Rightarrow \begin{cases} v_۱=۰ \\ v_۲=(۱)\ \text{شیب خط} = \frac{۴}{۴} = ۱\,m/s \\ v_۳=۰ \end{cases}$$

شتاب متوسط در چهار ثانیهٔ اول : $a_{av_۱} = \frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱} = \frac{۱-۰}{۴-۰} = ۰/۲۵\,m/s^۲ = ۲۵\,cm/s^۲$

شتاب متوسط در ده ثانیهٔ اول : $a_{av_۲} = \frac{v_۳-v_۱}{t_۳-t_۱} = \frac{۰-۰}{۱۰-۰} = ۰$

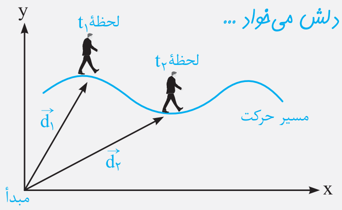
با توجه به این موضوع، شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ اول حرکت، $۲۵\,cm/s^۲$ بیشتر از ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت است.

۱۰۲ **۱** برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ جابه‌جایی، مسافت طی‌شده، $\vec{v}_{av}$ ، s_{av} در حرکت یک متحرک در صفحه (تست‌های ۱۰۲ تا ۱۱۳)

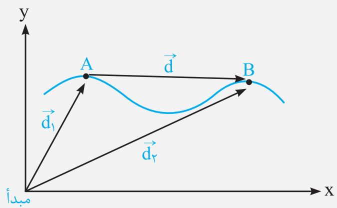
تو آخر این قسمت از فصل، می‌خوایم یه کمی هم روی فضای دو بعدی و سه بعدی کار کنیم. البته در حدی که کتاب دلش می‌خواد ...

۱- بردار مکان



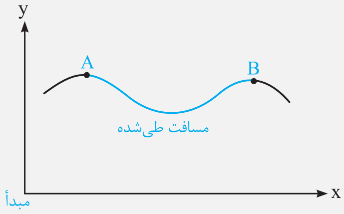
در شکل مقابل متحرکی (مثلاً یک کوه نورد) بر روی مسیر نشان داده‌شده (مثلاً یک کوه) در حال حرکت است.
بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل شود. به‌طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده‌شده است.

۲- بردار تغییر مکان (جابه‌جایی)



متحرک نشان داده‌شده در شکل مقابل، در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B منتقل شده است.
بردار جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازهٔ زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازهٔ زمانی متصل می‌کند.

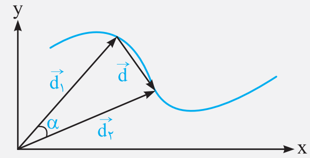
۳- مسافت طی‌شده



متحرک فوق، از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کرده است و طول واقعی مسیر حرکتش برابر طول منحنی واقع در بین نقاط A و B است (که با رنگ آبی نشان داده‌شده است). این طول مسافت طی‌شده نام دارد.

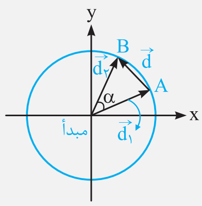
توی درس ریاضی، با فرمول‌های تفاضل دو تا بردار آشنا میشید. ما هم برمون نیومد این‌جا یه سری به این موضوع بزنیم و با بردار مکان قاطیش کنیم. البته کتاب درسی قصد نداره وارد این بحثا بشه. به خاطر همین هم، ما این بحث رو به صورت مجزا، اونم فقط برای بچه درسفونا آوردیمش ...

نکات مهم و کاربردی



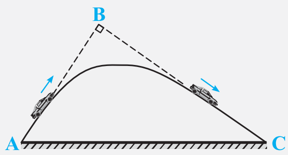
۱) برای به‌دست آوردن اندازهٔ بردار جابه‌جایی $|\vec{d}|$، می‌توان از رابطهٔ زیر نیز کمک گرفت:

$$|\vec{d}|=\sqrt{d_۱^۲+d_۲^۲-۲d_۱d_۲\cos\alpha}$$



۲) **حالت خاص:** اگر متحرک بر روی دایره در حال حرکت باشد، اندازهٔ بردار مکان در A و B یکسان بوده (برابر شعاع دایره) و اندازهٔ بردار جابه‌جایی آن برابر است با:

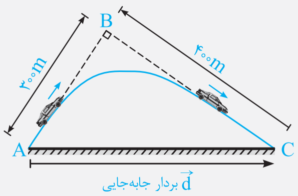
$$|\vec{d}_۱|=|\vec{d}_۲|=r\ (\text{شعاع دایره}) \Rightarrow |\vec{d}|=۲r\sin\frac{\alpha}{۲}$$



تمرین۱) در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده‌شده ابتدا از تپه بالا رفته و سپس از طرف دیگر آن پایین می‌آید. در مسیر نشان داده‌شده، جابه‌جایی متحرک از A تا C چه‌قدر است؟ $(AB=۳۰۰m\ ,\ BC=۴۰۰m)$ (تألیف)

۱) ۵۰۰ متر ۲) ۷۰۰ متر

۳) کم‌تر از ۵۰۰ متر ۴) بیشتر از ۵۰۰ متر



پاسخ) همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید، متحرک در طول حرکت خود از نقطهٔ A (ابتدای مسیر) به نقطهٔ C (انتهای مسیر) رفته و جابه‌جایی آن برابر بردار $\overrightarrow{AC}$ است:

$$\text{جابه‌جایی}=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(AB)^۲+(BC)^۲}=\sqrt{(۳۰۰)^۲+(۴۰۰)^۲}=۱۰۰\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵۰۰m$$

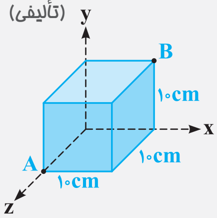
بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

دقت: توجه کنید که در این سؤال، مسافت طی‌شده (طول خط آبی‌رنگ) از یک طرف بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و از سوی دیگر بیشتر از ۵۰۰ متر و کم‌تر از ۷۰۰ متر است (چرا؟).

تذکر) در صورتی‌که طول، عرض و ارتفاع یک متحرک در فضای سه‌بعدی تغییر کرده و متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ B منتقل شود، اندازهٔ بردار جابه‌جایی آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A:\left|\begin{array}{l}x_A\\y_A\\z_A\end{array}\right. \rightarrow B:\left|\begin{array}{l}x_B\\y_B\\z_B\end{array}\right. \Rightarrow |\vec{d}|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲+(z_B-z_A)^۲}$$

تمرین۲) در شکل زیر، متحرکی با حرکت بر روی سطوح جانبی یک مکعب توپر به ضلع ۱۰ سانتی‌متر، خود را از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رساند. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این تغییر مکان چند سانتی‌متر است؟ (تألیف)

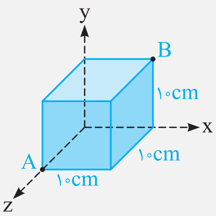


۱) $۱۰\sqrt{۳}$

۲) $۱۰(۱+\sqrt{۲})$

۳) $۱۰\sqrt{۲}$

۴) $۵\sqrt{۳}$



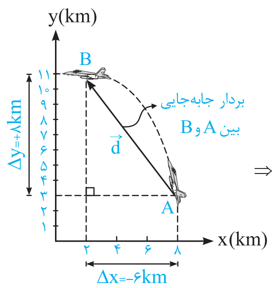
پاسخ) برای این سؤال، دو روش زیر را ارائه می‌کنیم:

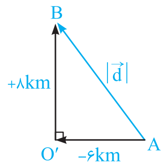
روش اول: با توجه به مختصات نقاط A و B و تذکر ارائه‌شده در قبل از سؤال داریم:

$$A:\left|\begin{array}{l}x_A=۰\\y_A=۰\\z_A=۱۰cm\end{array}\right. \rightarrow B:\left|\begin{array}{l}x_B=۱۰cm\\y_B=۱۰cm\\z_B=۰\end{array}\right. \Rightarrow |\vec{d}|=\sqrt{(۱۰-۰)^۲+(۱۰-۰)^۲+(۰-۱۰)^۲}=۱۰\sqrt{۳}\ cm$$

روش دوم: همان‌طور که در شکل فوق می‌بینید، نقاط A و B دو انتهای یک قطر مکعب هستند و جابه‌جایی برابر اندازهٔ AB است، پس کـافی اسـت اندازهٔ قطر مکعب را بیابیم. از طرفی اندازهٔ یک قطر از مکعبی به ضلع a برابر با $d = a\sqrt{۳}$ است و داریم:

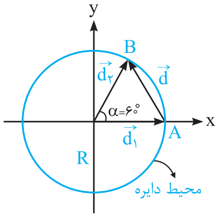
بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است. $a = ۱۰cm \rightarrow$ اندازهٔ جابه‌جایی: $|\vec{d}| = a\sqrt{۳} = ۱۰\sqrt{۳}\ cm$

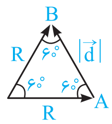




می‌دانیم که جهت بردار جابه‌جایی، هم‌جهت با برداری است که از نقطهٔ ابتدای حرکت (A) به نقطهٔ انتهای حرکت (B) متصل می‌شود. در این سؤال برای محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی با کمک قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$\Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(-۶)^۲ + ۸^۲} = ۱۰km$$



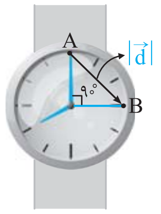


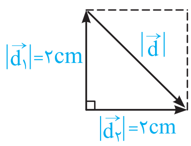
۱۰۳ ۱ فرض کنید که متحرک بر روی محیط دایره ۶۰ درجه چرخیده و از A به B منتقل می‌شود. بردار جابه‌جایی متحرک در این حالت برابر تفاضل بردارهای مکان است.

بردار جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ ابتدای حرکت را به نقطهٔ انتهای آن وصل می‌کند. مثلث روبه‌رو یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی در این حالت برابر R است (چرا؟). $|\vec{d}| = R$

از سوی دیگر، متحرک ۶۰ درجه بر روی محیط دایره چرخیده و $\frac{۱}{۶}$ آن را پیموده است (۶۰ درجه، $\frac{۱}{۶}$ برابر ۳۶۰ درجه است). با توجه به این موضوع، مسافت طی‌شده توسط آن برابر است با:

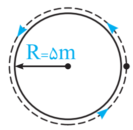
$$\text{مسافت طی‌شده} = \frac{۱}{۶} \times \underbrace{۲\pi R}_{\text{محیط دایره}} = \frac{\pi}{۳}R \Rightarrow \frac{\text{اندازهٔ جابه‌جایی}}{\text{مسافت طی‌شده}} = \frac{R}{\frac{\pi}{۳}R} = \frac{۳}{\pi}$$





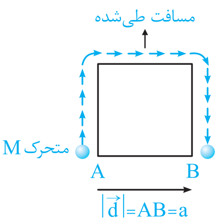
۱۰۴ ۱ عقربهٔ دقیقه‌شمار، در هر ۶۰ دقیقه یک دور می‌چرخد. بنـابراین در طـول ۱۵ دقیقـه بـه اندازهٔ ۹۰ درجه ($\frac{۱}{۴}$ دور) چرخیده و از نقطه‌ای مانند A به B می‌رود. بنابراین بـا توجـه بـه رابطـهٔ فیثاغورث، مقدار جابه‌جایی برابر است با:

$$|\vec{d}| = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}\ cm$$



۱۰۵ ۲ متحرک پس از ۱۰ دقیقه، ۱۰ بار به‌طور کامل بر روی دایره چرخیده و مجدداً به نقطهٔ شروع حرکـت می‌رسـد، بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر صفر است. در این حالت مسافت طی‌شده، ۱۰ برابر محیط دایره است.

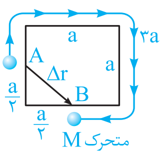
مسافت طی‌شده: $l = ۱۰ \times (۲\pi R) \simeq ۱۰ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰۰m$



۱۰۶ ۳ متحرک در طول حرکت خود توقف ندارد و در صورتی‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک ۳a باشد، ثابت می‌شود:

۱) **بیشترین جابه‌جایی** متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از رأس مربع شروع به حرکت کند و سپس مسـافتی برابر ۳a را بپیماید، در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر a است، یعنی برابر طول برداری که مستقیماً نقطهٔ شـروع را به نقطهٔ پایان متصل می‌کند.

$$|\vec{d}|_{max} = a$$



۲) **کم‌ترین جابه‌جایی** متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از وسط یکی از اضلاع مربع شروع به حرکت کنـد. در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ است.

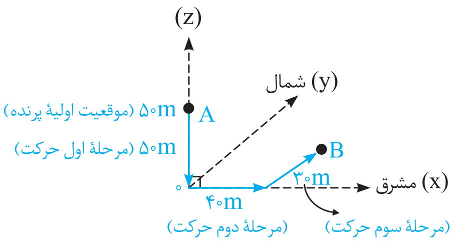
$$|\vec{d}|_{min} = \sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

نگاه دوم: $|\vec{d}|_{min} = \frac{a}{۲}$ قطر مربع فرضی با ضلع $= \left(\frac{a}{۲}\right)\sqrt{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$

دقت: در حل این مسئله شما می‌توانید حالات دیگری به غیر از موارد ۱ و ۲ را نیز بررسی کنید، در این مسئله تحلیل جابه‌جایی‌های مختلف متحرک مدنظر طراح بوده است. به سادگی می‌توان نشان داد که در تمام حالت‌ها، جابه‌جایی از a کوچک‌تر (یا مساوی) و از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ بزرگ‌تر (یا مساوی) می‌باشد.

۱۰۷ **۱** با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۹)، گزینهٔ (۱) درست است.

۱۰۸ **۲** برای پاسخ به این تست مفهومی، شکل زیر را در نظر بگیرید. با توجه به حرکت‌های اشاره شده برای پرنده در صورت سؤال، موقعیت آن از A به B رسیده است:



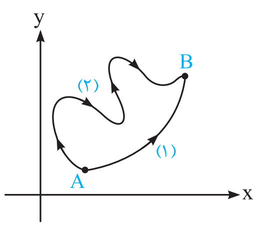
A در موقعیت اولیه: $(x_۱=۰, y_۱=۰, z_۱=+۵۰)$

B در موقعیت ثانویه: $(x_۲=+۴۰, y_۲=+۳۰, z_۲=۰)$

بردار جابه‌جایی برابر طول پاره‌خط AB است و داریم:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}=\sqrt{۴۰^۲+۳۰^۲+(-۵۰)^۲}=۵۰\sqrt{۲}m$$

۱۰۹ **۲** همان‌طور که می‌دانید، چون زمان هر دو حرکت یکسان است، اندازهٔ سرعت متوسط به اندازهٔ جابه‌جایی جسم بستگی دارد. چون هر دو مسیر نقطه شروع و پایان یکسانی دارند، اندازهٔ جابه‌جایی و اندازهٔ سرعت متوسط آن‌ها یکسان است.

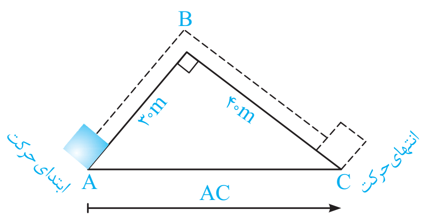


$$(v_{av})_۱=(v_{av})_۲$$

از طرف دیگر در یک بازهٔ زمانی برابر، تندی متوسط به مسافت طی‌شده بستگی دارد. چون در یک مدت زمان یکسان، مسافت طی‌شده در مسیر (۲) بیشتر از مسافت طی‌شده در مسیر (۱) است، پس تندی متوسط در مسیر (۲) بیشتر است.

$$(s_{av})_۲>(s_{av})_۱$$

۱۱۰ **۲** می‌دانیم برای محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی، نقطهٔ ابتدای حرکت را به نقطهٔ انتهای حرکت متصل کرده و طول آن پاره‌خط را اندازه می‌گیریم. با توجه به شکل مقابل، اندازهٔ جابه‌جایی برابر AC بوده و مقدار آن با کمک قضیهٔ فیثاغورث برابر است با:



$$AC^۲=AB^۲+BC^۲ \Rightarrow AC^۲=۳۰^۲+۴۰^۲ \xrightarrow[\text{اعداد فیثاغورثی هستند.}]{۳۰,۴۰\to۵۰} AC=۵۰m$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$|\vec{v}_{av}|=\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان جابه‌جایی}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}|=\frac{AC}{\Delta t}=\frac{۵۰}{۲۰}=۲/۵m/s$$

در ادامه برای به‌دست آوردن تندی متوسط متحرک، باید مسافت طی‌شده توسط متحرک را به دست آورده و بر زمان حرکت تقسیم کنیم. بدین ترتیب داریم:

مسافت طی‌شده: $l=AB+BC=۳۰+۴۰=۷۰m$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۷۰}{۲۰}=۳/۵m/s$$

۱۱۱ **۳** ابتدا اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک را به‌دست می‌آوریم:

اندازهٔ‌جابه‌جایی: $|\vec{d}|=AB=$ قطر دایره $=۲R$

مسافت: $l=\frac{\text{محیط دایره}}{۲}=\frac{۲\pi R}{۲}=\pi R$

در ادامه نسبت تندی متوسط حرکت را به اندازهٔ سرعت متوسط محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|}=\frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}}=\frac{l}{|\vec{d}|}=\frac{\pi R}{۲R}=\frac{\pi}{۲}$$

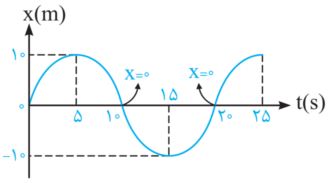
۱۱۲ **۱** در سؤال (۱۰۳)، نسبت اندازهٔ جابه‌جایی به مسافت طی‌شده توسط این متحرک را به‌دست آوردیم که برابر $\frac{۳}{\pi}$ بود. طبق روابط $|\vec{v}_{av}|=\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$ و $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$، نسبت اندازهٔ سرعت متوسط حرکت به تندی متوسط حرکت برابر نسبت اندازهٔ جابه‌جایی به مسافت طی‌شده است و داریم:

$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}}=\frac{|\vec{d}|}{l}=\frac{۳}{\pi}$$

۱۱۳ **۳** همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرکی بر روی یک خط راست، بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت آن یکسان بوده و در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان می‌شود.

در این سؤال اگر به مسیرهای رسم‌شده دقت کنید، متوجه می‌شوید که تنها در نمودار گزینهٔ (۳)، متحرک بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و ممکن است در آن تندی متوسط با سرعت متوسط برابر شود.

۱۱۴ ۳ معادلهٔ مکان داده‌شده به صورت سینوسی است. برای مشخص کردن جهت بردار مکان در این سؤال، مناسب‌ترین روش رسم نمودار مکان ـ زمان است. برای این سؤال، ابتدا محل‌های برخورد نمودار با محور t را به دست می‌آوریم:



$$x = ۱۰\sin\frac{\pi}{۱۰}t \xrightarrow{x=۰} \begin{cases} \frac{\pi}{۱۰}t = \pi \Rightarrow t = ۱۰s \\ \frac{\pi}{۱۰}t = ۲\pi \Rightarrow t = ۲۰s \\ \vdots \end{cases}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید در بازهٔ زمانی $۱۰s < t < ۲۰s$ (یعنی ۵ ثانیهٔ سوم و ۵ ثانیهٔ چهارم حرکت)، متحرک در مکان‌های منفی قرار داشته و بردار مکان جسم در خلاف جهت محور x بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۱۵ ۴ برای یافتن لحظاتی که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد، کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان مربوط به متحرک را تعیین علامت کنیم:

$$\text{معادلهٔ مکان}: x = t^۲ - ۲t + ۱ = (t-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱s \quad \text{ریشهٔ مضاعف}$$

t	۰		۱		∞
x		+	۰	+	

ملاحظه می‌کنید مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۱s$ صفر می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک همواره در سمت مثبت محور x قرار دارد. بنابراین بردار مکان این متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد.

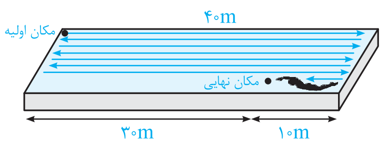
تذکر

بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از یک سمت مبدأ مختصات روی محور x، خود را به سمت دیگر آن برساند.

۱۱۶ ۲ ابتدا عدد ۲۹۰ را به‌صورت زیر می‌نویسیم تا مشخص شود شناگر چند بار طول استخر را طی کرده است:

$$۲۹۰ = ۲۸۰ + ۱۰ = ۷(۴۰) + ۱۰$$

بنابراین شناگر هفت بار طول استخر را طی کرده و ۱۰ m دیگر نیز شنا می‌کند. به شکل زیر دقت کنید:

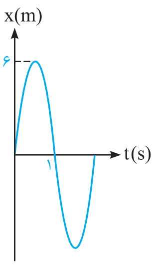


همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، در این حالت فاصلهٔ مکان نهایی شناگر تا مکان اولیهٔ آن برابر ۳۰ m می‌شود. بنابراین جابه‌جایی متحرک برابر $۳۰m = ۰/۰۳km$ بوده و اندازهٔ سرعت متوسط شناگر در مدت زمان ۰/۵ ساعت برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{۰/۰۳km}{۰/۵h} = \frac{۳}{۵۰}km/h = ۰/۰۶km/h$$

۱۱۷ ۳ بهترین روش برای حل این‌گونه مسائل، رسم نمودار مکان ـ زمان حرکت است:

$$\begin{cases} t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۶\sin(۰) = ۰ \\ t_۲ = ۱s \Rightarrow x_۲ = ۶\sin(\pi) = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$



همان‌طور که در نمودار رسم شده مشاهده می‌کنید، در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۱s$ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک برابر صفر و اندازهٔ مسافت طی‌شده توسط آن برابر ۱۲ m می‌باشد (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = ۰ \quad \text{و} \quad s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۲}{۱} = ۱۲m/s$$

۱۱۸ ۱ ابتدا به جدول ارائه شده در صورت سؤال توجه کنید:

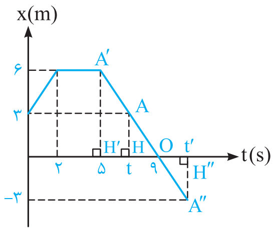
	مکان آغازین (m)	مکان پایانی (m)	تندی متوسط $(\frac{m}{s})$
متحرک A	$-۲\vec{i}$	$-۸\vec{i}$	۱/۵
متحرک B	$-۲\vec{i}$	$+۴\vec{i}$	۲

با توجه به این جدول داریم:

$$(\vec{v}_{av})_A = \frac{\vec{d}_A}{\Delta t_A} = \frac{-۸\vec{i} - (-۲\vec{i})}{۴} = -۱/۵\,\vec{i} \xrightarrow[(s_{av})_A = ۱/۵m/s]{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_A| = (s_{av})_A = ۱/۵m/s$$

$$(\vec{v}_{av})_B = \frac{\vec{d}_B}{\Delta t_B} = \frac{+۴\vec{i} - (-۲\vec{i})}{۴} = ۱/۵\,\vec{i} \xrightarrow[(s_{av})_B = ۲m/s]{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_B| < (s_{av})_A = ۲m/s$$

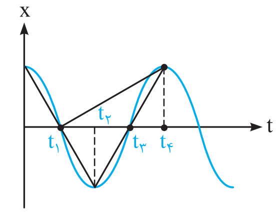
از طرفی می‌دانیم برابر بودن تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط، نشان‌دهندهٔ آن است که متحرک در طول حرکت، تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع یعنی متحرک A در طول حرکتش، تغییر جهت نمی‌دهد و متحرک B در طول حرکتش، تغییر جهت می‌دهد.



۱۱۹ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا باید زمانی را که متحرک برای دومین بار به مکان $x = ۳m$ می‌رسد، به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$\overset{\Delta}{OAH} \sim \overset{\Delta}{OA'H'} \Rightarrow \frac{AH}{۹-t} = \frac{A'H'}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۹-t} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow t = ۷s$$

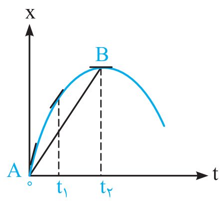
در ادامه با توجه به این‌که دو مثلث OAH و $OA''H''$ یکسان هستند، مقدار t' برابر ۱۱s به‌دست می‌آید (چرا؟). در پایان می‌توانیم بگوییم در بازه‌های زمانی (۰ تا ۲s) و (۷s تا ۱۱s) متحرک در حال دور شدن از مکان اولیهٔ خود می‌باشد. بنابراین در مجموع متحرک به مدت ۶ ثانیه در حال دور شدن از مکان اولیه‌اش می‌باشد.



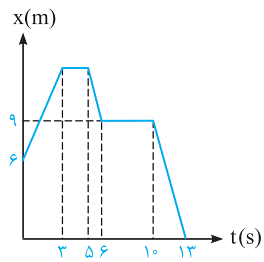
۱۲۰ ۴ همان‌طور که می‌دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان، معرف سرعت متوسط در بازهٔ زمانی موردنظر است. ابتدا مطابق شکل مقابل در بازه‌های زمانی موردنظر خط واصل را رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل می‌بینید، اندازهٔ شیب خط مماس در سه بازهٔ (۰ تا t_1)، (صفر تا t_2) و (t_2 تا t_4) یکسان است. اما در بازهٔ (t_1 تا t_4) شیب خط مماس و در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط متفاوت است.

برای اطمینان بیشتر می‌توانید اندازهٔ سرعت متوسط را در هر بازه محاسبه کنید.



۱۲۱ ۳ مطابق شکل مقابل، بین لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظهٔ تغییر جهت دادن متحرک (یعنی t_2)، پاره‌خطی رسم می‌کنیم. شیب این پاره‌خط بیانگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ تغییر جهت است. علاوه بر این در لحظات صفر، t_1 و t_2 نیز مماس‌هایی بر نمودار رسم می‌کنیم. شیب این مماس‌ها معرف تندی متحرک در لحظات مختلف است. همان‌طور که می‌بینید، در شروع حرکت شیب خط مماس بیشتر از شیب پاره‌خط AB است و با گذشت زمان شیب خط مماس برابر شیب خط AB شده و در نزدیکی t_2، شیب خط مماس کم‌تر از شیب خط AB می‌شود. بنابراین تندی حرکت در ابتدا بیشتر از v_{av} بوده، سپس برابر v_{av} شده و در نهایت کم‌تر از v_{av} می‌شود.

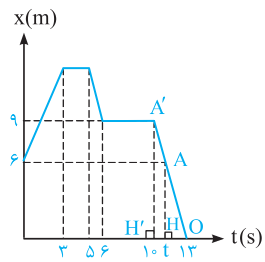


۱۲۲ ۲ به موارد زیر توجه کنید:

۱) طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$، تندی متوسط به مسافت طی‌شده توسط متحرک بستگی دارد. در هر بازهٔ زمانی که متحرک توقف کرده باشد، مسافت طی‌شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت نیز صفر است.

۲) در نمودار رسم‌شده در دو بازهٔ زمانی $t_1 = ۳s$ تا $t_2 = ۵s$ و $t_3 = ۶s$ تا $t_4 = ۱۰s$ متحرک ایستاده است.

۳) چون در صورت سؤال طول بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی موردنظر است، بنابراین بازهٔ موردنظر $t_3 = ۶s$ تا $t_4 = ۱۰s$ می‌باشد که به مدت ۴s متحرک توقف داشته است.



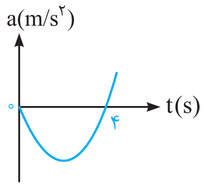
۱۲۳ ۳ برای صفر شدن سرعت متوسط، باید جابه‌جایی متحرک صفر شود. با توجه به نمودار مکان ــ زمان داده‌شده، بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی که سرعت متوسط صفر می‌شود، مربوط به لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای است که متحرک دوباره به نقطهٔ $x = ۶m$ می‌رسد. برای به‌دست آوردن لحظهٔ موردنظر، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{OAH} \sim \overset{\Delta}{OA'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{OH}{OH'} \Rightarrow \frac{۶}{۹} = \frac{۱۳-t}{۳} \Rightarrow t = ۱۱s$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی که اندازهٔ سرعت متوسط صفر می‌شود، برابر ۱۱ ثانیه است و با توجه به پاسخ سؤال قبل، بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی که تندی متوسط حرکت صفر می‌شود برابر ۴ ثانیه است و نسبت آن‌ها $\frac{۱۱}{۴}$ می‌شود.

۱۲۴ ۱ عبارت (ج) هرگز نمی‌تواند رخ دهد. طبق رابطهٔ $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$، اگر سرعت جسمی ثابت باشد، تغییرات آن صفر بوده و شتاب حرکت صفر می‌شود.

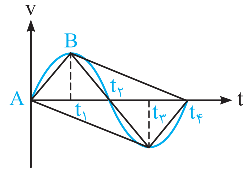
از سوی دیگر سایر عبارت‌های مطرح‌شده می‌توانند رخ دهند. برای درک بهتر سعی کنید برای هریک مثالی را پیدا کنید.



۱۲۵ ۲ ابتدا ریشه‌های سهمی موردنظر را به‌دست می‌آوریم و سپس نمودار شتاب ـ زمان را رسم می‌کنیم:

$$a = t^2 - ۴t = ۰ \Rightarrow t(t-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = ۴s \end{cases}$$

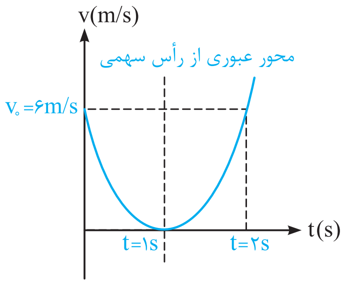
دقت کنید که سهمی موردنظر از مبدأ شروع می‌شود و با توجه به این‌که ضریب t^2 مثبت است، سهمی رو به بالا می‌باشد. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنید در لحظهٔ $t = ۴s$، اندازهٔ شتاب حرکت صفر شده و علامت شتاب تغییر می‌کند، بنابراین در این لحظه شتاب تغییر جهت می‌دهد. از طرفی با توجه به رابطهٔ $F = ma$، می‌دانیم که نیروی وارد بر متحرک همواره هم جهت با شتاب بوده و در نتیجه نیروی وارد بر متحرک نیز در پایان ثانیهٔ چهارم تغییر جهت می‌دهد.



۱۲۶ ۲ همان‌طور که می‌دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان بیانگر شتاب متوسط در بازهٔ زمانی موردنظر است. ابتدا در هریک از بازه‌های زمانی موردنظر، خط واصل را رسم می‌کنیم (همهٔ خطوط را در یک شکل ترسیم کرده‌ایم).

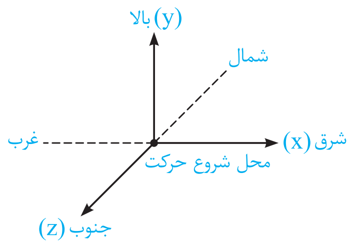
درصورت سؤال ذکر شده است که در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ شتاب متحرک برابر $\vec{a}$ است و ما به دنبال بازه‌ای می‌گردیم که شتاب متحرک $-\vec{a}$ باشد. بنابراین باید اندازهٔ شیب خط موردنظر برابر اندازهٔ شیب خط AB ولی با علامت منفی باشد. اگر به نمودار دقت کنید، متوجه می‌شوید که تنها در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ این اتفاق رخ می‌دهد.

۱۲۷ ۲ همان‌طور که می‌دانید، سهمی نسبت به محور عبوری از رأس آن، دارای تقارن است. در دو ثانیهٔ اول حرکت که یک بازهٔ متقارن نسبت به محور عبوری از رأس سهمی است، سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی برابر بوده و در نتیجه شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی برابر صفر است.



$$\begin{cases} t_۱=۰ \to v_۱=۶\dfrac{m}{s} \\ t_۲=۲s \to v_۲=۶\dfrac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=۰$$

دقت: در این سؤال، به طور کلی در بازهٔ زمانی $t_۱$ و $t_۲$، به شرطی که $t=۱s$ در وسط آن بازه قرار گیرد $(\frac{t_۱+t_۲}{۲}=۱s)$، شتاب متوسط برابر صفر می‌شود. به عنوان مثال از $t_۱=۰/۷۵s$ تا $t_۲=۱/۲۵s$ نیز شتاب متوسط برابر صفر است.



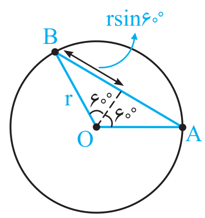
۱۲۸ ۱ اگر متحرک از نقطهٔ (x_A, y_A, z_A) به نقطهٔ (x_B, y_B, z_B) منتقل شود، جابه‌جایی آن برابر $\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲+(z_B-z_A)^۲}$ است. فرض کنید این متحرک از مبدأ $(۰,۰,۰)$ شروع به حرکت کرده است. اگر این متحرک ۱۰ متر از سطح زمین به سمت بالا حرکت کند مؤلفهٔ y از صفر به ۱۰m تبدیل می‌شود، در ادامه اگر ۶m به سمت شمال برود، مؤلفهٔ z از صفر به ۶m− و در نهایت اگر ۸ متر به غرب برود مؤلفهٔ x از صفر به ۸m− تبدیل می‌شود، بنابراین مختصات B برابر $(-۸,۱۰,-۶)$ است.

$$\text{اندازهٔ بردار جابه‌جایی}: AB=\sqrt{(-۸)^۲+۱۰^۲+(-۶)^۲}=\sqrt{۲۰۰}=۱۰\sqrt{۲}\simeq ۱۰\times ۱/۴=۱۴m$$

$$\text{اندازهٔ سرعت متوسط}: |\vec{v}_{av}|=\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}|=\frac{۱۴}{۱۰}=۱/۴\,m/s$$

۱۲۹ ۲ با توجه به این‌که ذره، $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره را طی کرده است، مسافت طی‌شده توسط آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$l=\frac{۱}{۳}(\text{محیط دایره})=\frac{۱}{۳}(۲\pi r)\simeq\frac{۱}{۳}(۶r)=۲r$$

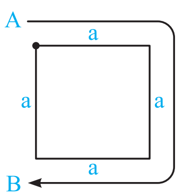


از طرف دیگر اندازهٔ جابه‌جایی ذره برابر طول پاره‌خط AB است که با کمک هندسه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|\vec{d}|=AB=۲r\sin(۶۰)=۲r(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}r$$

حالا با یک تناسب ساده، نسبت اندازهٔ سرعت متوسط به تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

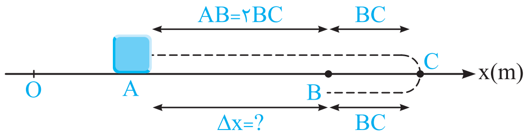
$$\frac{v_{av}}{s_{av}}=\frac{|\vec{d}|}{l}=\frac{\sqrt{۳}r}{۲r}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \sqrt{۳}s_{av}=۲v_{av}$$



۱۳۰ ۳ همان‌طور که در پاسخ سؤال (۱۰۶) مشاهده کردید، در این سؤال بیشترین جابه‌جایی زمانی روی می‌دهد که مطابق شکل مقابل، متحرک از نقطهٔ A تا B جابه‌جا شده باشد. در این حالت داریم:

$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}}=\frac{|\vec{d}|}{l}=\frac{a}{۳a}=\frac{۱}{۳}$$

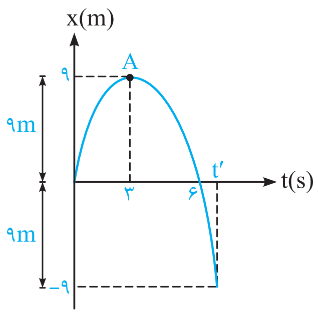
۱۳۱ **۱** با توجه به شکل، در مقایسهٔ تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک داریم:



$$\begin{cases} \text{مسافت طی‌شده} = \overset{\text{طول رفت}}{\widehat{AC}} + \overset{\text{طول برگشت}}{\widehat{CB}} = ۳BC + BC = ۴BC \\ \text{جابه‌جایی متحرک} = AB = ۲BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\text{جابه‌جایی}} = \frac{۴BC}{۲BC} = ۲ \Rightarrow \frac{\text{تندی متوسط}}{\text{اندازهٔ سرعت متوسط}} = ۲$$

تذکر جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ شروع (A) را مستقیماً به نقطهٔ پایان (B) متصل کند، در صورتی که برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده باید طول مسیر رفت و برگشت را با یکدیگر جمع کرد.



۱۳۲ **۲** برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا نمودار $(x-t)$ را برای حرکت رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار می‌توان گفت هنگامی که فاصلهٔ متحرک از مبدأ برابر ۹ متر است، متحرک می‌تواند در ۹ متری سمت چپ $(x=-۹m)$ یا راست مبدأ $(x=+۹m)$ باشد. بنابراین قدرمطلق مکان متحرک $|x|$ برابر ۹ است، نمودار مکان ـ زمان این متحرک مطابق شکل مقابل است:

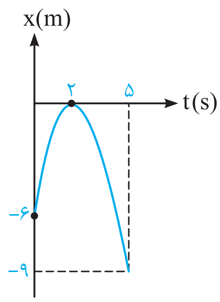
همان‌گونه که مشاهده می‌کنید تنها در دو زمان ۳s و t' فاصلهٔ متحرک از مبدأ برابر ۹ متر می‌شود (نیازی به محاسبهٔ t' نمی‌باشد).

دقت نحوهٔ به دست آوردن مختصات A:

$$x=-t^۲+۶t \xrightarrow{\text{رأس سهمی}=-\frac{b}{۲a}} t_A = -\frac{۶}{۲\times(-۱)} = ۳s$$

$$x_A = -(۳)^۲+۶\times۳ = ۹m \ \text{(مکانی که متحرک در آن‌جا می‌ایستد)}$$

۱۳۳ **۴** متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ تغییر جهت می‌دهد و از شروع حرکت تا لحظهٔ $t=۲s$ مسافت ۶m را طی می‌کند و تندی متوسط آن در این بازهٔ زمانی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$s_{av_۱} = \frac{l_۱}{\Delta t_۱} = \frac{۶}{۲} = ۳\,m/s$$

در ادامهٔ مسیر، متحرک از نقطهٔ $x=۰$ به $x=-۹m$ می‌رود و می‌توانیم بگوییم متحرک در کل حرکت، مسافت ۱۵m را در مدت ۵s طی کرده است $(۶+۹=۱۵m)$، بنابراین تندی متوسط آن در کل زمان حرکتش برابر است با:

$$s_{av_۲} = \frac{l_۲}{\Delta t_۲} = \frac{۱۵}{۵} = ۳\,m/s$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{s_{av_۱}}{s_{av_۲}} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

۱۳۴ **۴** مطابق تعریف شتاب متوسط $\left(|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}\right)$، کافی است سرعت در ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی را داشته باشیم:

$$\text{معادلهٔ سرعت}: v = ۰/۳\cos\left(۶۰\pi t + \frac{\pi}{۳}\right) \to \begin{cases} t_۱ = ۰ \to v_۱ = ۰/۳\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) = ۰/۱۵\,m/s \\ t_۲ = \frac{۱}{۶۰}s \to v_۲ = ۰/۳\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۳}\right) = -۰/۱۵\,m/s\end{cases}$$

$$\text{بزرگی شتاب متوسط}: |\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|-۰/۱۵-(۰/۱۵)|}{\frac{۱}{۶۰}} = \frac{۰/۳}{\frac{۱}{۶۰}} = ۱۸\,m/s^۲$$

۱۳۵ **۲** همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان، شتاب متوسط در آن بازهٔ زمانی را نشان می‌دهد. در این سؤال شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان از $(t_۱$ تا $t_۲)$، $(t_۱$ تا $t_۵)$ و $(t_۴$ تا $t_۵)$ مثبت بوده و تنها در بازهٔ زمانی $(t_۲$ تا $t_۴)$ منفی است. بنابراین در بازهٔ $(t_۲$ تا $t_۴)$، شتاب متوسط با سایر بازه‌ها هم‌جهت نیست (برای راحت‌تر شدن مقایسه، همهٔ خط‌های واصل موردنظر، در یک شکل ترسیم شده است).