




بِسْمِ
الرَّحْمَنِ
الرَّحِيمِ


GEOMETRY

GEOMETRIK

10+11

Password ن وَ الْقَلَمِ وَمَا يَسْطُرُونَ 

 www.gaj.ir

 Other user

Q Search **CONTENTS**

G
Geometric Drawings
Th
Thales theorem
P
Polygons
S
Space visualization
C
Circle
G
Geometric conversions
L
Logitudinal Relations

CHAPTER 1
Drawings Geometric

CHAPTER 3
Polygons

CHAPTER 1
Circle

CHAPTER 3
Relations Logitudinal

CHAPTER 2
Theorem Thales

CHAPTER 4
Visualization Space

CHAPTER 2
Geometric

۱۰ ترسیم‌های هندسی

۲۶ استدلال

۴۰ نسبت و تناسب در هندسه

۴۶ قضیه تالس

۶۵ تشابه و کاربردها

۸۲ چند ضلعی‌ها

۹۷ مساحت و کاربردهای آن

۱۲۶ خط ، نقطه و صفحه

۱۴۴ تفکر تجسمی

۱۶۸ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

۱۸۱ رابطه‌های طولی در دایره

۱۹۲ چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

۲۰۶ تبدیل‌های هندسی

۲۳۱ کاربرد تبدیل‌ها

۲۴۴ قضیه سینوس‌ها

۲۴۸ قضیه کسینوس‌ها

۲۵۳ قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۲۵۷ قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)



Tweet



Rene Descartes
@Rene 1596

من فکر می‌کنم، پس هستم

I think therefor I am.

درس اول : نرسیم های هندسه

درس دوم : استلال

[Translate Tweet](#)

07:30 . 5/31/20

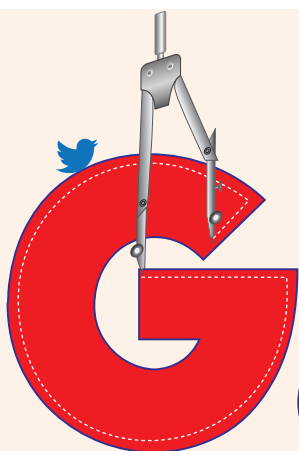
[View Tweet activity](#)

رنه دکارت ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی پدر فلسفه مدرن و هندسه تحلیلی کسی که فلسفه را از خواب سنگین قرون وسطی بیدار کرد.

5,337

7,412

7,120,910,208



Drawings Geometric

CHAPTER 1

Add another Tweet





Rene Descartes
1596-1650

Drawings Geometric

CHAPTER 1

ترسیم‌های هندسی

درس اول



ص ۱۰ تا ۱۶ هندسه دهم



مکان هندسی

در این درس با انواع **ترسیم‌های هندسی** سروکار داریم و منظور از ترسیم‌های هندسی رسم سه دسته مهم از اشکال هندسه است:

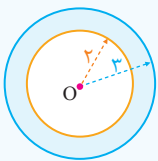
- اشکالی مانند پاره خط، نیم خط و خط راست
 - اشکالی مانند دایره یا کمانی از یک دایره
 - اشکالی مانند مثلث، چهارضلعی و... که با ترکیبی از دو ترسیم قبلی حاصل می‌شوند.
- برای رسم این اشکال از دو وسیله مهم به نام **خط‌کش** و **پرگار** استفاده می‌شود که خط‌کش فقط برای ترسیم خط راست مورد استفاده قرار می‌گیرد [نه برای اندازه‌گیری] و پرگار وسیله‌ای است که با آن می‌توان دایره یا کمانی از دایره را رسم کرد و دهانه آن به اندازه دلخواه باز می‌شود.
- بسیاری از اشکالی که رسم می‌کنیم مجموعه نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند، این مجموعه نقاط را **مکان هندسی** می‌نامیم. [گاهی به آن **مکان نقطه** نیز گفته می‌شود]. از طرفی مهم‌ترین اشکال هندسی **نقطه**، **خط** و **صفحه** هستند، بنابراین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصله ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:

۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله k واحد از نقطه A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.

۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصله k واحد از آن هستند.

Test همه نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه ثابت O در این صفحه بیشتر از ۲ و کمتر از ۳ واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند. مساحت این شکل چقدر است؟

- ۱) 5π ۲) 9π ۳) 4π ۴) 7π



۱) نقاطی که فاصله آن‌ها از O بیشتر از ۲ واحد باشد، بیرون دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد هستند، همچنین نقاطی که فاصله آن‌ها از O کمتر از ۳ واحد باشد، داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ واحد قرار می‌گیرند. پس شکل هندسی مورد نظر ناحیه بین دو دایره (قسمت رنگی) است و مساحت آن برابر است با:

$$9\pi - 4\pi = 5\pi$$

مساحت ناحیه رنگی = مساحت دایره کوچک - مساحت دایره بزرگ

۱. خط d در صفحه مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله آن‌ها از خط d برابر ۳ واحد باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۲. سکه‌ای به شعاع ۲ را روی یک صفحه مستطیلی به اضلاع ۶ و ۸ پرتاب می‌کنیم. در صورتی که مرکز سکه داخل مستطیل باشد، مساحت محدود به مکان هندسی مرکز سکه برای این که سکه کاملاً داخل مستطیل قرار بگیرد، کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۳. مربع $ABCD$ به ضلع ۲ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن از تمام رئوس بزرگتر از ۱ است، دارای کدام مساحت است؟

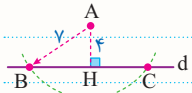
- ۱) π ۲) $4 - \pi$ ۳) $4 - \frac{\pi}{2}$ ۴) $4 - 2\pi$



در برخی از سوالات هندسه از ما می پرسند «چند نقطه روی یک شکل وجود دارد که دارای ویژگی به خصوصی باشد». در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی به خصوص دارند را پیدا می کنیم و سپس به بررسی تعداد نقاط تقاطع آن مکان هندسی و شکل گفته شده می پردازیم.

• نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصله ۷ واحد از نقطه A وجود دارد؟

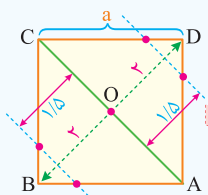
□ نقاطی که به فاصله ۷ واحد از نقطه A قرار دارند روی دایره ای به مرکز A و به شعاع ۷ قرار دارند و چون $7 > 4$ است، پس این دایره [به عنوان یک مکان هندسی] خط d را در ۲ نقطه قطع می کند و همین نقاط، جواب های مورد نظر هستند.



Test در مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$ ، چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله آن ها از قطر AC برابر $1/5$ واحد باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بیشمار

□ نقاطی که به فاصله $1/5$ واحد از قطر AC قرار دارند، روی دو خط به موازات AC و به فاصله $1/5$ واحد از آن واقع اند. حال باید بررسی کنیم که آیا این دو خط نقطه تقاطعی با اضلاع مربع دارند یا نه؟ این نقاط در صورت وجود جواب های تست هستند:



$$a = 2\sqrt{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \times (2\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow OB = OD = 2$$

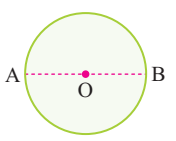
چون $1/5 < OD$ ، پس این دو خط، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می کنند.

۴. در لوزی به اقطار ۶ و ۸ چند نقطه روی محیط لوزی وجود دارد که به فاصله $2/5$ واحد از مرکز لوزی باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) بیشمار

۵. در دایره $C(O, R)$ اگر اندازه قطر AB برابر ۸ باشد، چند نقطه روی محیط دایره به فاصله ۵ واحد از قطر AB وجود دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بیشمار

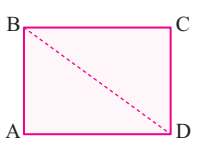


۶. در مثلث ABC اگر $BC = 8$ و مساحت مثلث ۳۶ باشد، چند نقطه روی دو ضلع دیگر مثلث وجود دارد که فاصله آن ها از قاعده BC برابر ۶ باشد؟

- (۱) ۱ (۲) هیچ (۳) ۲ یا ۱ (۴) ۲

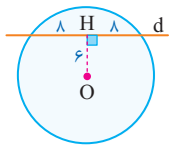
۷. در مستطیل ABCD به اضلاع $AB = 3$ و $BC = 4$ چند نقطه روی اضلاع مستطیل وجود دارد که فاصله آنها از قطر BD برابر $2/4$ باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴



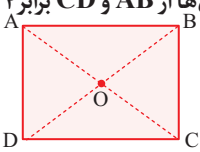
۸. در شکل زیر فاصله مرکز دایره از خط d برابر ۶ است، چند نقطه روی محیط دایره به فاصله ۱۰ واحد از خط d وجود دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴



۹. مستطیل ABCD به اضلاع $AB = 8$ و $AD = 6$ مفروض است. چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصله آن ها از AB و CD برابر ۴ واحد باشد؟

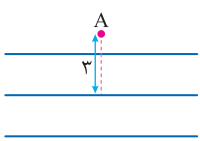
- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بیشمار



۱۰. نقطه A به فاصله ۵ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصله $6/5$ واحد از نقطه A وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) ۴

۱۱. سه خط موازی با فاصله ۲ واحد از هم واقع اند. اگر فاصله نقطه A از خط وسط برابر ۳ واحد باشد، چند نقطه روی این خطوط به فاصله ۵ واحد از نقطه A وجود دارد؟

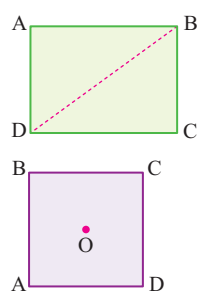


- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۵



۱۲. در مثلث ABC اگر $BC = 6$ و مساحت برابر ۱۲ باشد. چند نقطه روی قاعده BC به فاصله ۳ واحد از رأس A وجود دارد؟
 (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) چهار

۱۳. در مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۳ و ۴ چند نقطه روی قطر BD وجود دارد که فاصله آن‌ها از رأس A کمتر از $2/5$ باشد؟
 (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بیشمار

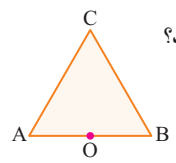


۱۴. در مربع $ABCD$ به ضلع ۴ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که فاصله آن‌ها از مرکز مربع $\sqrt{2}$ واحد باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) هیچ

۱۵. در مربع $ABCD$ به ضلع ۸ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که به فاصله ۵ واحد از مرکز مربع باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) هیچ (۴) ۸

۱۶. در مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۶ و ۸ چند نقطه روی اضلاع وجود دارد که به فاصله ۴ واحد از محل تلاقی قطرهای مستطیل باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۴ واحد چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصله آن‌ها از وسط ضلع AB برابر ۲ باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶



۱۸. در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC اندازه ضلع قائم $2\sqrt{2}$ است. چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصله آن‌ها از وسط وتر مثلث برابر ۲ باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹. در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ به مساحت ۹۰ و اندازه قاعده‌ها ۱۸ و ۱۲ است چند نقطه روی قاعده‌های دوزنقه یافت می‌شود که به فاصله ۳ واحد از محل تلاقی قطرهای دوزنقه باشد؟
 (۱) هیچ (۲) ۳ (۳) ۴

یکی از مهم‌ترین مکان‌های هندسی در صفحه، مکان هندسی نقاط هم فاصله از دو چیز است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره خط AB است.

۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، خطی موازی آن دو خط و بین آن‌هاست.

۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است [این نیمسازها همواره برهم عمودند].

Test چند نقطه روی قطرهای دوزنقه $ABCD$ وجود دارد که فاصله آن از دو قاعده یکسان باشد؟

(۱) نامشخص (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بیشمار

۲) نقاطی که به فاصله یکسان از دو قاعده دوزنقه قرار دارند، روی خطی موازی دو قاعده هستند که فاصله آن از هر کدام از قاعده‌ها نصف ارتفاع دوزنقه است. این خط قطعاً قطرهای دوزنقه را در دو نقطه P و Q قطع می‌کند. [این خط را خط میانگین دوزنقه می‌نامند].

۲۰. چند نقطه روی محیط یک مستطیل وجود دارد، که از قطرهای آن به یک فاصله باشد؟

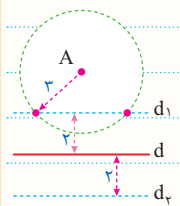
- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴) بیشتر



اشتراک دو مکان هندسی

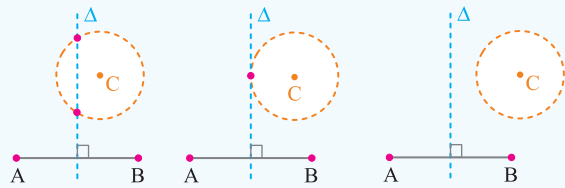
در بعضی سؤال‌ها از ما می‌پرسند «چند نقطه وجود دارد که هم این ویژگی را داشته باشد و هم آن ویژگی را». در این موارد ابتدا مکان هندسی نقطاتی که این ویژگی و نیز مکان هندسی نقطاتی که آن ویژگی را دارند پیدا می‌کنیم، سپس به بررسی تعداد نقاط اشتراک (تقاطع) این دو مکان هندسی می‌پردازیم. ...

نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ واحد از نقطه A و به فاصله ۲ واحد از خط d باشد؟
نقطاتی که به فاصله ۳ واحد از نقطه A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند [این ویژگی]. همچنین نقطاتی که به فاصله ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصله ۲ واحد از آن قرار دارند [آن ویژگی]. حال باید تعداد نقاط اشتراک این دو مکان هندسی را بررسی کنیم. همان‌طور که در شکل مشخص است این دو مکان هندسی همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.



Test نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟

- ۱) حداکثر یک نقطه
۲) حداکثر ۲ نقطه
۳) دقیقاً ۲ نقطه
۴) هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.



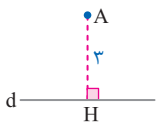
۲) مکان هندسی نقطاتی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB است. مکان هندسی نقطاتی که از C به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ است. نقاط تلاقی عمود منصف AB با این دایره، جواب این مسئله است. با توجه به شکل‌های مقابل مسئله دو جواب یا یک جواب یا بدون جواب است. پس حداکثر ۲ نقطه وجود دارد. (Δ عمود منصف پاره خط AB است.)

۲۱. چند نقطه در صفحه دوزننه ABCD وجود دارد که از دو رأس مقابل A و C و همچنین از دو قاعده به یک فاصله باشد؟

- ۱) هیچ
۲) دقیقاً یک
۳) حداکثر دو
۴) نامشخص

۲۲. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۱/۵ سانتی‌متر باشد؟

- ۱) هیچ
۲) یک
۳) دو
۴) بیشتر



۲۳. نقاط A, B, C, D رئوس دوزننه قائم‌الزاویه ABCD به قاعده‌های AB و CD هستند، چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از نقاط A و B و همچنین از نقاط D و C به یک فاصله باشند؟

- ۱) هیچ
۲) یک
۳) دو
۴) بیشتر

۲۴. نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاط هم‌فاصله از A و B که به فاصله ۳ سانتی‌متر از C باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) چهار

۲۵. دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ‌یک از نقاط نیست در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقطاتی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱) هیچ
۲) بیشتر
۳) دو
۴) یک

۲۶. دو خط متقاطع d1 و d2 و نقطه A در صفحه آن‌ها مفروض است، حداکثر چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از d1 و d2 به یک فاصله و از A به فاصله ۲ باشد؟

- ۱) یک
۲) دو
۳) چهار
۴) هشت

۲۷. دو خط d1 و d2 در نقطه A متقاطع‌اند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۳ و از d1 و d2 به یک فاصله باشد؟

- ۱) دو
۲) چهار
۳) بیشتر
۴) هیچ

۲۸. در چهارضلعی ABCD اضلاع AB و CD غیرموازی‌اند، چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از رئوس A و B و همچنین از رئوس C و D به یک فاصله باشند؟

- ۱) هیچ
۲) یک
۳) دو
۴) بیشتر

۲۹. چند نقطه در صفحه مختصات وجود دارد که از محور X ها و محور Y ها هم‌فاصله بوده و در ضمن فاصله آن از دو نقطه A(۳, ۰) و B(۰, -۱) با هم برابر باشد؟

- ۱) یک
۲) هیچ
۳) دو
۴) بیشتر

۳۰. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از محور X ها و محور Y ها هم فاصله بوده و به فاصله ۲ واحد از محور X ها باشند؟

۱) دو (۲) چهار

۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۳۱. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط $A(3, 0)$ و $B(0, -1)$ به یک فاصله بوده و فاصله آن‌ها از نیمساز ربع اول و سوم برابر ۲ باشد؟

۱) یک (۲) دو

۳) هیچ (۴) چهار

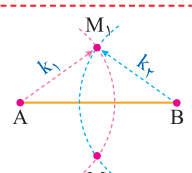
یکی از مشهورترین حالاتی که مربوط به تقاطع دو مکان هندسی است، حالتی است که پرسیده می‌شود «چند نقطه در صفحه وجود دارد. که به فاصله k_1 از نقطه A و به فاصله k_2 از نقطه B باشد»، در این حالت باید وضعیت دایره به مرکز A و به شعاع k_1 و دایره به مرکز B و به شعاع k_2 را بررسی کنیم که سه حالت عمده رخ می‌دهد:



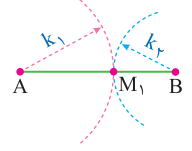
اشتراک دو مکان هندسی مشهور



۱) اگر این دو دایره متقاطع باشند، دو نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقاط M_1 و M_2]



۲) اگر این دو دایره مماس باشند، فقط یک نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقطه M_1]



۳) اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، هیچ نقطه‌ای با شرایط فوق وجود ندارد.

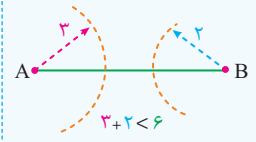
چون دو دایره همدیگر را قطع نکرده‌اند، نقطه‌ای دیده نمی‌شود.

Test دو نقطه A و B به فاصله ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ واحد از A و به فاصله ۲ واحد از B باشد؟

۱) یک (۲) دو

۳) چهار (۴) هیچ

۴) با توجه به این که فاصله A و B از هم ۶ واحد است، دایره به مرکز A و به شعاع ۲ و دایره به مرکز B و به شعاع ۳ همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس گزینه ۴ صحیح است.



برای تشخیص وضعیت دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط‌المركزین d نسبت به هم، d را با $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم:

وضعیت رابطه	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
	$d > R_1 + R_2$	$d = R_1 + R_2$	$ R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	$d = R_1 - R_2 $	$d < R_1 - R_2 $
شکل					

۳۲. دو نقطه A و B به فاصله ۷/۵ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۵/۱ واحد از A و به فاصله ۲/۶ واحد از B باشد؟

یک (۱) دو (۲)

چهار (۳) هیچ (۴)

۳۳. مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است. چند نقطه در صفحه مربع وجود دارد که فاصله آن‌ها از رأس‌های متقابل A و C برابر ۲ باشد؟

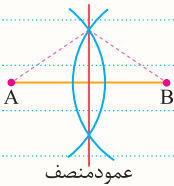
صفر (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴)

ترسیم‌های مورد بحث در کتاب درسی را می‌توان به ۴ دسته عمده تقسیم کرد که هر کدام دارای نتایج خاص خود هستند:

انواع ترسیم‌ها

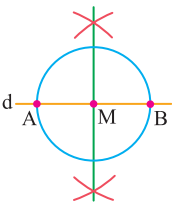
- رسم عمود منصف
- رسم نیمساز
- رسم مثلث
- رسم چهار ضلعی



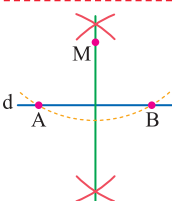
عمود منصف

اولین و مهم‌ترین ترسیم مورد بحث در کتاب درسی، **رسم عمود منصف** است. برای رسم خط عمود منصف پاره خط AB، دهانه‌ی پرگار را به اندازه مناسب (بیش از نصف طول AB) باز می‌کنیم و یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B کمان‌هایی رسم می‌کنیم. سپس به کمک خط‌کش خطی رسم می‌کنیم که از محل تقاطع دو کمان بگذرد، این خط همان عمود منصف AB است. [در این ترسیم ۱ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

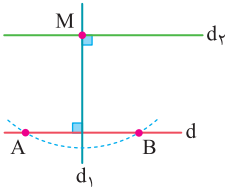
از رسم عمود منصف، در سه ترسیم بسیار مهم دیگر نیز استفاده می‌شود:



۱] برای رسم خط عمود بر خط d از نقطه M واقع بر آن، ابتدا به کمک پرگار دو نقطه مانند A و B روی خط d طوری پیدا می‌کنیم که $MA = MB$. [یعنی به مرکز M و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند]. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود]. **STOP** از یک نقطه مانند A روی خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



۲] برای رسم خط عمود بر خط d از نقطه M غیر واقع بر خط d، ابتدا به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d طوری پیدا می‌کنیم که $MA = MB$ باشد [برای این کار به مرکز M و شعاع دلخواه کمان می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند]. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود]. **STOP** از یک نقطه مانند A خارج خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



۳] برای رسم خط موازی خط d از نقطه M خارج آن، ابتدا خط d1 را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد، سپس خط d2 را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d1 عمود باشد [در این ترسیم ۶ بار از پرگار و ۱ بار از خط‌کش استفاده می‌شود]. **STOP** دو خط عمود بر یک خط با هم موازی اند.



رسم عمود منصف و خط موازی و عمود



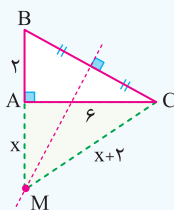
Test در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

- ۷/۵ (۱)
- ۸ (۲)
- ۳ (۳)
- ۲۵/۳ (۴)

۲] می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

بنابراین از نقطه M به سر دیگر پاره خط یعنی C وصل می‌کنیم. در این صورت $MB = MC = x + 2$ خواهد بود.

حال در مثلث AMC به کمک فیثاغورس X به دست می‌آید:



$$(x+2)^2 = x^2 + 6^2 \xrightarrow{\text{حذف } 6, 8, 10} x = 8$$

۳۴. پاره خط AB به طول ۸ واحد مفروض است. برای رسم عمود منصف پاره خط AB طبق روش بیان شده در کتاب درسی نیاز به رسم چند کمان با مراکز مختلف است؟

- ۱ (۱) ۱
- ۲ (۲) ۲
- ۳ (۳) ۳
- ۴ (۴) ۴

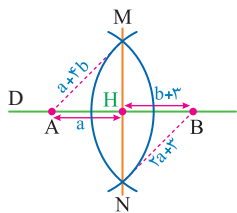
۳۵. پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمود منصف AB دهانه پراگرا را به اندازه $1 - 3a$ باز کرده ایم تا به مراکز A و B کمان‌هایی رسم کنیم. برای این‌که ترسیم به درستی انجام گیرد. حدود a کدام باید باشد؟

- ۱ (۱) $0 < a < 2$
- ۲ (۲) $\frac{1}{3} < a < 2$
- ۳ (۳) $a > 2$
- ۴ (۴) $a > \frac{11}{3}$

۳۶. اگر خط d و پاره خط AB غیر موازی و غیر عمود باشند، تعداد نقاط واقع بر d که از نقطه‌های A و B به یک فاصله باشند، کدام است؟

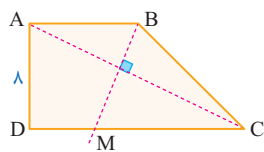
- ۱ (۱) دقیقاً دو نقطه
- ۲ (۲) حداقل دو نقطه
- ۳ (۳) دقیقاً یک نقطه
- ۴ (۴) بیشمار نقطه

۳۷. دو نقطه A و B مطابق شکل روی خط D مفروض اند. شکل زیر ترسیم عمود منصف پاره خط AB را نشان می‌دهد که در رسم آن، به مراکز A و B کمان‌هایی رسم شده، در صورتی که $AH = a$ و $BH = b + 3$ باشد، فاصله دو نقطه M و N از هم کدام است؟



- ۱ (۱) ۲۶
- ۲ (۲) ۱۲
- ۳ (۳) ۱۸
- ۴ (۴) ۲۴

۳۸. در دوزنقه ABCD مطابق شکل $AD = 8$ و $CD = 16$ است. عمود منصف قطر AC قاعده CD را در M قطع می‌کند، فاصله M از رأس C کدام است؟



- ۱ (۱) ۱۰
- ۲ (۲) ۶
- ۳ (۳) ۹
- ۴ (۴) ۷

۳۹. نقطه M روی خط d قرار دارد، برای رسم خط عمود بر d و گذرا از M کدام روش درست است؟

- ۱ (۱) پیدا کردن دو نقطه A و B با فاصله مساوی از M و سپس رسم عمود منصف AB
- ۲ (۲) رسم دایره‌ای گذرا از M و مماس بر d و سپس رسم شعاع گذرا از M
- ۳ (۳) در نظر گرفتن دو نقطه دلخواه مانند A و B و رسم منصف AB
- ۴ (۴) از نقطه دلخواه A روی خط d دایره‌ای به شعاع AM رسم کرده، سپس مماس بر دایره در M را رسم می‌کنیم.

۴۰. در رسم خط عمود بر خط d از نقطه M خارج خط d طبق روش بیان شده در کتاب درسی اولین گام کدام است؟

- ۱ (۱) رسم دو خط غیر عمود بر خط d
- ۲ (۲) در نظر گرفتن دو نقطه دلخواه روی خط d
- ۳ (۳) رسم دایره‌ای به مرکز M که خط را در دو نقطه قطع کند.
- ۴ (۴) پیدا کردن پای عمود روی خط d

۴۱. در رسم کدام یک از موارد زیر طبق روش‌های کتاب درسی نیاز به ترسیم کمان‌های بیشتری داریم؟

- ۱ (۱) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
- ۲ (۲) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
- ۳ (۳) رسم خط موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن
- ۴ (۴) هر سه یکسان هستند.

۴۲. در ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط از کدام ترسیم استفاده می‌شود؟

- ۱ (۱) ترسیم خطی موازی یک خط
- ۲ (۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
- ۳ (۳) ترسیم عمود منصف یک پاره خط
- ۴ (۴) ترسیم خطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله است.

۴۳. در ترسیم ارتفاع AH از مثلث ABC طبق روش بیان شده در کتاب درسی کدام ترسیم در صورت نیاز متقدم بر سایرین است؟

- ۱ (۱) ترسیم عمود منصف ضلع BC
- ۲ (۲) ترسیم کمانی به مرکز A و متقاطع با BC
- ۳ (۳) ترسیم خط گذرا از A و عمود بر BC
- ۴ (۴) رسم کمان‌هایی به مراکز B و C و به شعاع بزرگتر از نصف BC



Tweet



Edward Witten
@Edward 1951

دور از امنیت محل سکونتتان، دنیا برای راحتی شما ساخته نشده است.

Away from the safety of your home ,the universe was not made for your convenience.

درس اول : نسبت و تناسب در هندسه

درس دوم : قضیه تالس

درس سوم و چهارم : شباه و کاربردها

[Translate Tweet](#)

07:30 . 5/31/20

[View Tweet activity](#)

یکی از ریاضیدانان بزرگ در مورد او می نویسد: اگر فکر می کنید بسیار باهوش هستید، ادوارد ویتن از شما باهوش تر است.

1,337

2,416

9,750,610,288



CHAPTER 2

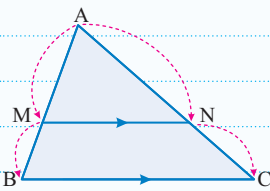
Thales

Theorem

Add another Tweet



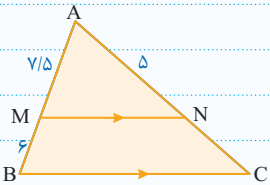
Lesson.2



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

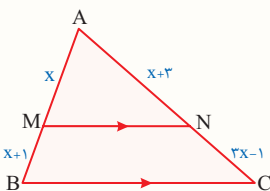
هرگاه در یک مثلث، خطی راست موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، ۴. پاره خط جدا می کند که اندازه آن ها تشکیل یک تناسب می دهد [این قضیه را تالس جزء به جزء می نامند].

در شکل مقابل MN و BC موازی اند. طول پاره خط NC کدام است؟



$$\frac{7/5}{6} = \frac{5}{NC} \Rightarrow NC = \frac{6 \times 5}{7/5} = 4$$

معمولاً در مواردی که اندازه پاره خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزء به جزء استفاده کنیم.



Test در شکل مقابل MN موازی قاعده BC است، مقدار x کدام است؟

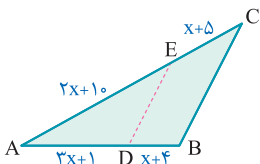
- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

چون در این تست اندازه پاره خط MN نه داده شده و نه خواسته شده، بهتر است از تالس جزء به جزء استفاده کنیم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+3}{3x-1} \Rightarrow 3x^2 - x = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

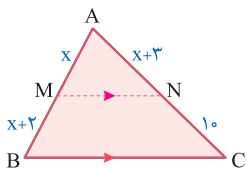
غرق غرق

۱۶۸. در شکل مقابل DE || BC است. مقدار x کدام است؟

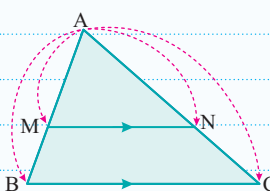


- ۵ (۱)
- ۷ (۲)
- ۳ (۳)
- ۵ (۴)

۱۶۹. در شکل مقابل MN و BC موازی اند. بزرگ ترین مقدار x کدام است؟



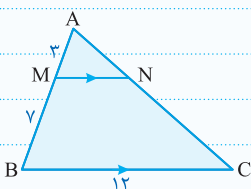
- ۲ (۱)
- ۱/۵ (۴)
- ۳ (۳)
- ۴ (۳)



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اگر خطی دو ضلع از اضلاع مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می کند که اندازه ضلع های آن، با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب است این قضیه را [تالس جزء به کل] می نامند.

در شکل زیر اندازه پاره خط MN کدام است؟



$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{MN}{12} \Rightarrow MN = 3.6$$

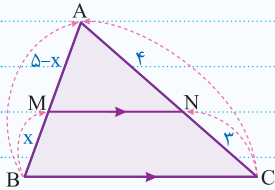
به طور کلی زمانی از تالس جزء به کل استفاده می کنیم که پاره خط NM داده یا خواسته شده باشد.

تالس جزء به کل را از سمت قاعده به سمت رأس ها نیز می توان نوشت، اما در این حالت MN را نمی توان در نسبت دخالت داد.

مقدار x در شکل مقابل کدام است؟

تالس جزء به کل را از قاعده به سمت رأس می نویسیم:

$$\frac{x}{x+(5-x)} = \frac{3}{3+4} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{7}$$

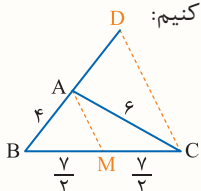


Test در مثلث ABC، اضلاع $AB=4$ و $AC=6$ و $BC=7$ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD کدام است؟

(خارج - ۹۸)

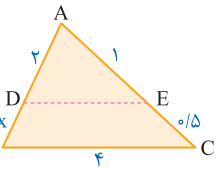
- ۱) $7/5$ ۲) ۸ ۳) $8/5$ ۴) ۹

چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می رویم و چون BD را می خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:



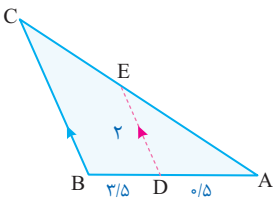
$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{3.5}{7} \Rightarrow BD = 8$$

۱۷۰. در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. اندازه پاره خط DE کدام است؟



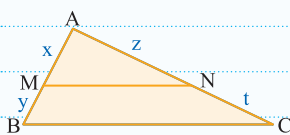
- ۱) $1/3$
۲) ۳
۳) $1/5$
۴) $8/3$

۱۷۱. در شکل مقابل اندازه BC کدام است؟



- ۱) ۱۶
۲) ۱۴
۳) ۱۲
۴) ۱۸

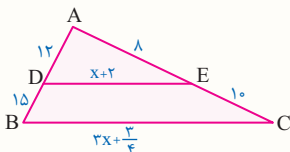
اگر خطی روی دو ضلع مثلثی چهار پاره خط با اندازه های متناسب جدا کنند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است. [عکس قضیه تالس]



$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow MN \parallel BC$$

در سوال هایی که به کمک عکس تالس حل می شوند، معمولاً اشاره ای به خط موازی قاعده نمی شود و یا حتی گاهی اصلاً چنین خطی وجود ندارد؛ اما در این حالت طول هر ۴ قطعه روی ساق های مثلث معلوم است و اعداد طوری هستند که نسبت آن ها یک تناسب تشکیل می دهد.

Test با توجه به شکل مقابل، x کدام است؟



- ۱) ۵
۲) ۶
۳) $7/5$
۴) $6/5$

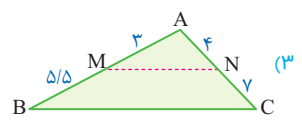
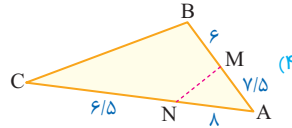
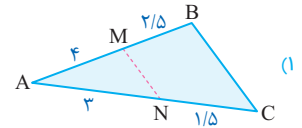
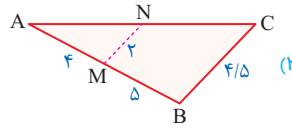
۱. در این مسئله، اشاره ای به موازی بودن DE و BC نشده است، پس ابتدا نسبت اندازه های پاره خط های ایجاد شده بر اضلاع AB و AC را با هم مقایسه می کنیم:

$$\frac{12}{15} = \frac{8}{10} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x+2}{27} = \frac{x+2}{3x+\frac{3}{4}} \Rightarrow 36x+9 = 27x+54 \Rightarrow 9x = 45 \Rightarrow x = 5$$



بیان غیر مستقیم واژه موازی در تالس

۱۷۲. در کدام یک از شکل های زیر، پاره خط MN موازی قاعده BC است؟



۱۷۳. در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟

(۲) $\frac{4}{5}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۲) هم محیط

(۱) هم مساحت

(۴) متشابه

(۳) هم نهشت

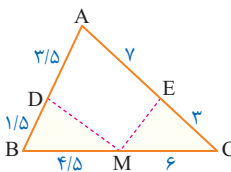
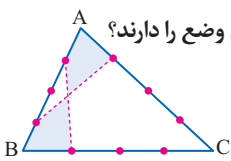
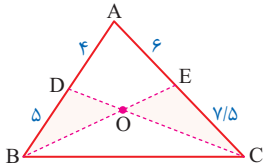
۱۷۵. در شکل داده شده مساحت مثلث BDM چند درصد مساحت مثلث EMC است؟

(۲) ۷۵

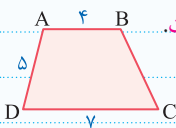
(۱) ۵۰

(۴) ۶۸

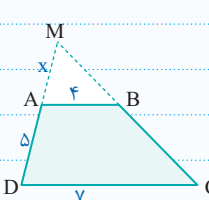
(۳) ۶۰



گاهی اوقات به جای این که به طور مستقیم بگویند دو خط d و d' موازی اند، می گویند فلان چهارضلعی، دوزنقه است.



در دوزنقه مقابل، اضلاع AD و BC را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. فاصله M از D چقدر است؟



چون $AB \parallel CD$ است می توانیم از تالس استفاده کنیم؛ از طرف دیگر چون AB جزء داده های مسئله است باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7x = 4x + 20 \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

حال با معلوم شدن x فاصله M از D قابل محاسبه است:

$$MD = MA + AD = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3}$$

گاهی اوقات نه از کلمه موازی استفاده می شود و نه نامی از دوزنقه است، بلکه از عکس قضیه خطوط موازی و مورب استفاده می کنند و به این وسیله، به بیان موازی بودن دو خط می پردازند.

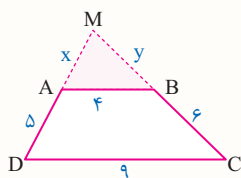
Test در دوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴ و ۹ و طول ساق ها ۶ و ۵ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون دوزنقه تشکیل می شود، کدام است؟

(۴) $12/8$

(۳) $12/2$

(۲) $11/6$

(۱) $11/4$



چون AB جزء داده هاست باید به سراغ تالس جزء به کل برویم:

$$\triangle MDC: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+9} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow x=4, y = \frac{24}{9} = 4/3$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با: $x+y+4 = 12/8$

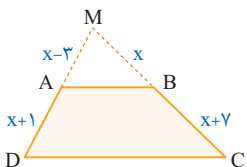
۱۷۶. در دوزنقه ABCD امتداد ساق های آن در نقطه M متقاطع اند. مقدار x کدام است؟

(۲) ۶

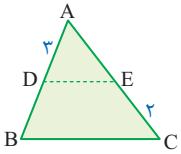
(۱) ۵/۵

(۴) ۶/۵

(۳) ۷

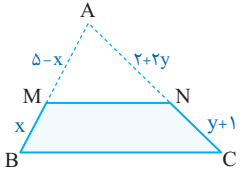


۱۷۷. در شکل زیر DECB دوزنقه است و ساق BD یک واحد کوچکتر از AE است. اندازه AC کدام است؟



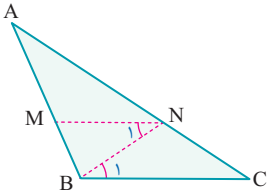
- (۱) ۳
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

۱۷۸. در شکل مقابل MNCB دوزنقه است. مقدار x کدام است؟



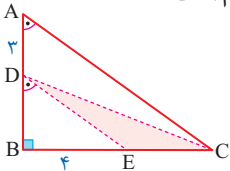
- (۱) $\frac{5}{2}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) $\frac{5}{3}$

۱۷۹. در شکل مقابل $AM = 3MB$ و $\hat{N}_1 = \hat{B}_1$ می‌باشد. حاصل $\frac{CN}{AC}$ کدام است؟



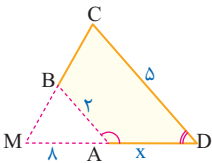
- (۱) $\frac{2}{4}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{2}{3}$

۱۸۰. در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل $\hat{A} = \hat{D}$ می‌باشد. اگر $AD = 3$ و $BE = 4$ باشد، مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۲
(۴) ۲۴

۱۸۱. در چهارضلعی ABCD اگر زوایای \hat{A} و \hat{D} مکمل هم باشند و امتداد اضلاع BC و AD در نقطه M به فاصله ۸ واحد از رأس A متقاطع باشند. اندازه ضلع AD کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۱۸
(۴) ۱۲

منظور از تالس کاربردی مجموعه مسائلی است که طول سایه، بلندی یک درخت یا ارتفاع یک سازه و نظایر آن را از ما می‌خواهند و به طور مستقیم صحبت از یک مثلث در هندسه نیست!

۱. تیپ اول این مسائل حالتی است که اطلاعات داده شده و خواسته شده در مسئله، درون یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد. در این حالت باید به پاره‌خطی که موازی ضلع عمودی قرار دارد توجه و با استفاده از تالس جزء به کل خواسته مسئله را پیدا کنیم.

۲. در تیپ دوم اطلاعات داده شده در مسئله روی اضلاع یک دوزنقه قائم‌الزاویه قرار دارد که ساق قائم آن سطح زمین است. در این حالت با رسم یک خط به موازات ساق قائم، یک مثلث قائم‌الزاویه درون دوزنقه ایجاد و اطلاعات مسئله را به این مثلث منتقل می‌کنیم و در انتها قضیه تالس را روی این مثلث می‌نویسیم.

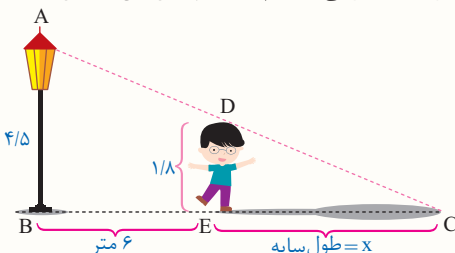


تالس جزء به کل کاربردی

Test شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصله ۶ متری از تیر چراغ برق به ارتفاع ۴/۵ متر ایستاده است. طول سایه این شخص روی زمین چند متر است؟

- (۱) ۳
(۲) $\frac{4}{5}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) $\frac{5}{5}$

چون هیچ شکلی داده نشده است، باید شکل فرض خودمان را رسم کنیم. حال همه اندازه‌ها را بر حسب متری می‌نویسیم، و با تیپ اول این مسائل مواجه هستیم:

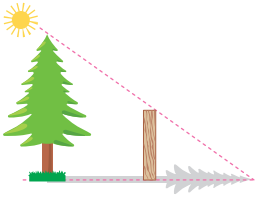


$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{1.8}{4.5} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{x+6} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 4$$



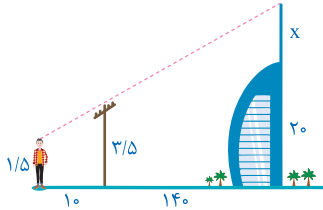
ترکیب تالس جزء به جزء تالس جزء به کل

۱۸۲. در شکل زیر اگر نوک سایه چوب $1/5$ متری بر نوک سایه درخت منطبق باشد و طول سایه چوب و درخت ۶ و ۱۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



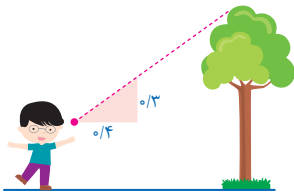
- ۱) ۳۶
- ۲) ۲۴
- ۳) ۳۰
- ۴) ۲۵

۱۸۳. در شکل زیر، دکلی روی یک ساختمان به ارتفاع ۲۰ متر نصب شده است. دید چشم ناظری با قد $1/5$ متر از نوک دکل و تیرک $3/5$ متری بین آن‌ها، در یک راستا است. ارتفاع دکل چقدر است؟



- ۱) ۱۱/۸
- ۲) ۱۲/۲
- ۳) ۱۲/۸
- ۴) ۱۱/۵

۱۸۴. شخصی برای پیدا کردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل زیر ساخت. اگر او در فاصله $8/8$ متری از درخت بایستد، می‌تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند، فاصله تقریبی چشم او از زمین $1/6$ متر است. ارتفاع تقریبی درخت کدام است؟



- ۱) ۷/۸
- ۲) ۸
- ۳) ۸/۲
- ۴) ۸/۴

اگر در مسائل مربوط به تالس، هم اعداد روی ساق‌های مثلث و هم اعداد مربوط به قاعده‌ها [لا اقل یکی از دو قاعده] مجهول بودند، اما بر حسب یک متغیر نبودند مجبوریم دو بار از تالس استفاده کنیم. یک بار جزء به جزء روی ساق‌ها و دیگری جزء به کل روی قاعده و خط موازی آن.

در شکل زیر موازی BC است. x و y را بیابید.

ابتدا مقدار x را به کمک تالس جزء به جزء به دست می‌آوریم:

$$\frac{16}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$\begin{cases} AB = 16 + 8 = 24 \\ BC = (2 \times 8) + 9 = 25 \end{cases}$$

حال می‌توانیم y را به کمک تالس جزء به کل به دست آوریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{16}{24} = \frac{3y+2}{25} \Rightarrow 72y+48 = 400 \Rightarrow y = \frac{352}{72} \Rightarrow y = \frac{44}{9}$$

Test از امتداد ساق‌های دوزنقه ABCD، مثلثی با اضلاع ۱ و ۲ پدید آمده است. اندازه قاعده بزرگ دوزنقه چقدر است؟

- ۱) ۷/۵
- ۲) ۸
- ۳) ۷
- ۴) ۶/۵

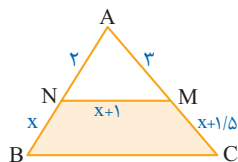
۱ ابتدا به کمک تالس جزء به جزء، x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \Rightarrow x+2 = 2x \Rightarrow x = 2$$

حال با استفاده از تالس جزء به کل، ضلع DC را به دست می‌آوریم:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{x+0.5}{DC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2.5}{DC} \Rightarrow DC = 7.5$$

۱۸۵. در شکل زیر $NMCB$ دوزنقه است. اندازه پاره خط BC کدام است؟



۸/۵ (۱)

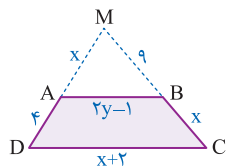
۷/۵ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

(تمرین کتاب درسی)

۱۸۶. در شکل زیر دوزنقه $ABCD$ مفروض است و امتداد ساق‌های آن در M متقاطع‌اند. محیط دوزنقه کدام است؟



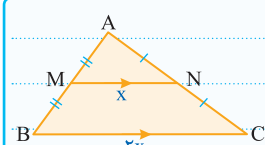
۲۰/۴ (۱)

۲۰/۸ (۲)

۲۲/۶ (۳)

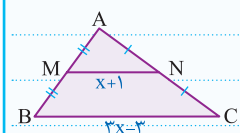
۲۲/۸ (۴)

پاره خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، طبق قضیه تالس، نصف ضلع سوم و طبق عکس قضیه تالس، موازی ضلع سوم است.



مطابق شکل، مقدار x کدام است؟

نقاط M و N وسط اضلاع AB و AC هستند، پس باید $x+1$ نصف $3x-3$ باشد، یعنی:



$$x+1 = \frac{3x-3}{2} \Rightarrow 2(x+1) = 3x-3 \Rightarrow 2x+2 = 3x-3 \Rightarrow x=5$$



حالت خاص قضیه تالس

Test اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، محیط هرکدام از ۴ مثلث به دست آمده چه کسری از محیط مثلث اصلی است؟

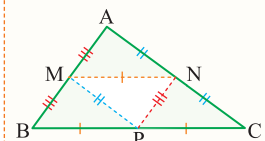
$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

اگر اضلاع مثلث را a, b, c فرض کنیم، در این صورت بنا بر حالت خاص قضیه تالس $MP = \frac{b}{2}$, $NP = \frac{c}{2}$, $MN = \frac{a}{2}$ خواهد بود. بنابراین اضلاع هر یک از ۴ مثلث کوچک $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ است و در نتیجه محیط هرکدام، نصف محیط مثلث اصلی خواهد شد.



۱۸۷. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه اضلاع قائم $1/5$ و 2 می‌باشد. از رأس‌های مثلث خطی به موازات اضلاع می‌گذرانیم تا همدیگر را قطع کنند. محیط مثلث به دست آمده کدام است؟

۸ (۲)

۱۰ (۱)

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

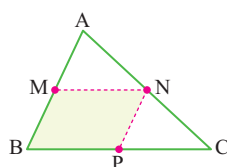
۱۸۸. در شکل داده شده نقطه M وسط ضلع AB از مثلث ABC می‌باشد. اگر ضلع $AC = 7$ و محیط متوازی‌الاضلاع $MNPB$ برابر 13 می‌باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

۱۳/۵ (۱)

۲۰ (۲)

۲۸ (۳)

۲۰/۵ (۴)



اگر یک ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر یک، خطی موازی قاعده رسم کنیم تا ضلع مقابل را قطع کند، اندازه پاره‌های تولید شده تشکیل **تصادف عددی** می‌دهند.

یکی از توصیه‌های همیشگی من به جوانان این است که در **دورنقه‌ها**، **قطر را جدی بگیرد** و هرگاه با چند خط موازی با قاعده مواجه شدید از رسم قطر غافل نشوید.

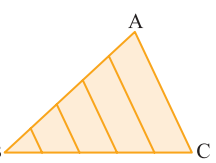
Test در دورنقه ABCD ساق AD را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و از هر یک خطوطی موازی قاعده رسم کرده‌ایم. اگر قاعده‌های دورنقه ۵ و ۱۶ باشد، مجموع اندازه پاره‌های MN و EF کدم است؟

۱۷ (۲)	۱۵ (۱)
۲۱ (۴)	۲۴ (۳)

ابتدا قطر DB را رسم می‌کنیم و با توجه به شکل داریم:

$$MN + EF = (2x + y) + (x + 2y) = 3x + 3y = 5 + 16 = 21$$

۱۸۹. در شکل داده شده ضلع AB به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است و از هر کدام خطی به موازات قاعده AC رسم شده است. اگر $AC = 10$ باشد، مجموع طول ۴ پاره خط رسم شده کدام است؟



- ۱۵ (۱)
- ۱۷ (۲)
- ۱۸ (۳)
- ۲۰ (۴)

اگر اندازه قاعده‌های دورنقه‌ای مشخص باشد و ساق‌ها را از یک طرف امتداد دهیم تا در یک نقطه، یکدیگر را قطع کنند، می‌توانیم اندازه ساق‌ها و اندازه امتداد ساق‌ها را برحسب قاعده‌ها پیدا کنیم.

فرض کنید اندازه قاعده‌های دورنقه مطابق شکل مقابل ۴ و ۷ باشد، در این صورت طبق تالس:

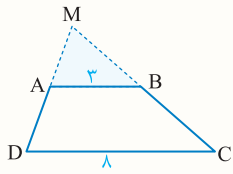
ضریبی از تفاضل دو قاعده، به ساق‌ها و ضریبی از قاعده کوچک به امتداد ساق‌ها می‌رسد.

اگر اندازه ساق‌های دورنقه معلوم باشد، اندازه امتداد ساق‌های دورنقه را می‌توان برحسب آن‌ها بیان کرد؛ اما قاعده‌ها را نمی‌توان به آن‌ها مرتبط کرد.

فرض کنید اندازه ساق‌های دورنقه ۵ و ۷ باشد، در این صورت طبق تالس، ضریبی از این اعداد به امتداد ساق‌ها می‌رسد.



Test در شکل مقابل، محیط دوزنقه ABCD برابر ۳۱ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌های دوزنقه روی قاعده کوچک آن تشکیل می‌شود، کدام است؟



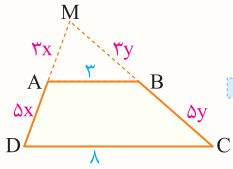
۱۲ (۲)

۱۷ (۱)

۱۵ (۴)

۱۶ (۳)

F طبق تالس نسبت‌های ایجاد شده روی ساق‌ها و امتداد آن‌ها به صورت شکل زیر است، حال محیط دوزنقه را برابر



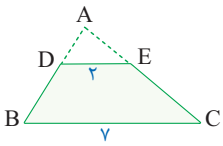
$$\Delta x + 3 + \Delta y + 8 = 31 \Rightarrow x + y = 4$$

۳۱ قرار می‌دهیم:

بنابراین محیط مثلث MAB اکنون قابل محاسبه است:

$$\text{محیط مثلث MAB} = 3x + 3y + 3 = 3(x + y) + 3 = (3 \times 4) + 3 = 15$$

۱۹۰. در شکل مقابل پاره خط DE موازی قاعده BC است. اگر محیط مثلث کوچکتر از ۱۰ باشد. محیط مثلث ABC کدام است؟



۳۲ (۱)

۳۰ (۲)

۴۰ (۳)

۳۵ (۴)

۱۹۱. در دوزنقه‌ای امتداد ساق‌ها بر هم عمودند. اگر اندازه ساق‌ها ۳ و ۴ و اندازه قاعده کوچک ۷ باشد، اندازه قاعده بزرگ کدام است؟

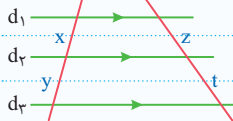
۹ (۲)

۱۶ (۱)

۱۲ (۴)

۱۵ (۳)

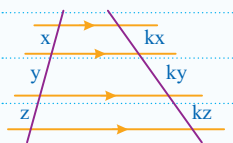
اگر دو خط مورب، چند خط موازی را قطع کنند، با استفاده از قضیه تالس می‌توان



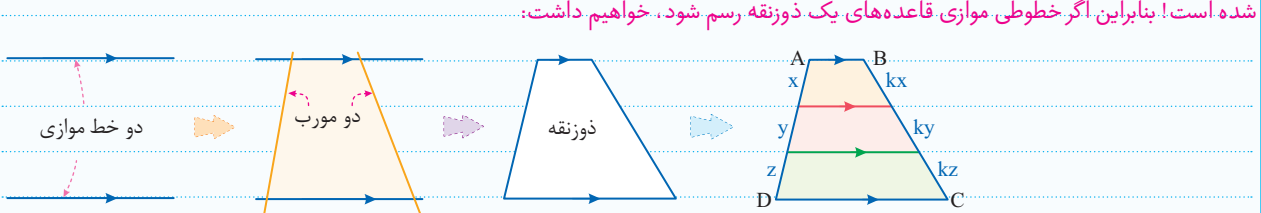
$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$$

ثابت کرد. که نسبت اندازه پاره‌های پدید آمده روی خطوط مورب یکسان است.

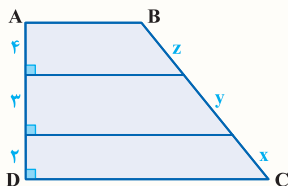
تعداد خطوط موازی می‌تواند بیشتر هم باشد. در این صورت نیز، باز هم اندازه هر قطعه، متناسب با قطعه روبه‌روی خود خواهد بود.



STOP تمام نکات گفته شده برای خطوط موازی و مورب برای دوزنقه نیز صادق است. چون دوزنقه نیز دو خط موازی است که توسط دو خط مورب قطع شده است! بنابراین اگر خطوطی موازی قاعده‌های یک دوزنقه رسم شود، خواهیم داشت:



Test در دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD مطابق شکل، اندازه ساق بزرگ ۱۲ است. مقدار $x + z$ کدام است؟



۱۰ (۲)

۸ (۱)

۷ (۴)

۹ (۳)

۱ طبق تالس در خطوط موازی و مورب داریم:

$$\begin{cases} z = 4k \\ y = 3k \\ x = 2k \end{cases} \Rightarrow 4k + 3k + 2k = 12 \Rightarrow 9k = 12 \Rightarrow k = \frac{4}{3} \Rightarrow x + z = 2k + 4k = 6k = 6 \times \frac{4}{3} = 8$$

دو نقطه A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطه M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکسته AMB کفایت بازتاب نقطه A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:

$$\text{Min}(AMB) = |A'B|$$

این مسئله به مسئله هرون مشهور است. در این تیپ از مسائل اگر طول پاره‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم.

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BH'}{AH} = \frac{MH'}{MH}$$

در این حالت خط d نیمساز خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطه M نیز با هم برابرند.

Test نقاط $A(2, 1)$ و $B(5, 3)$ مفروض‌اند، نقطه M روی محور x ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟

۱۲ (۲)	۱ (۱)
۱۰ (۴)	۸ (۳)

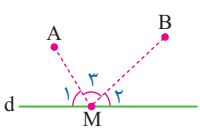
F کفایت بازتاب نقطه A نسبت به محور x ها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازه $A'B$ را به دست آوریم:

$$|A'B| = \sqrt{(8-2)^2 + (5-(-3))^2} = 10$$

- بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه**
- تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به محور x ها نقطه $A'(a, -b)$ است.
 - تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به محور y ها نقطه $A'(-a, b)$ است.
 - تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=x$ [نیمساز ربع اول و سوم] نقطه $A'(b, a)$ است.
 - تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ [نیمساز ربع دوم و چهارم] نقطه $A'(-b, -a)$ است.

۹۹۱. در شکل زیر اگر نقطه M طوری روی خط d قرار گرفته باشد که $MA + MB$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد، کدام گزینه درست است؟

- $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$ (۱)
- $\widehat{M}_2 = 2\widehat{M}_3$ (۲)
- $\widehat{M}_2 = 2\widehat{M}_1$ (۳)
- $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (۴)





۹۹۲. در صفحه خط d دو نقطه A و B در یک طرف خط مفروض اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه A و B کمترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب
(۲) تجانس
(۳) دوران
(۴) انتقال

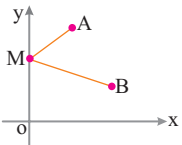
۹۹۳. در شکل زیر برای رسم مثلث ABC که رأس C از آن روی خط Δ باشد و محیط مثلث حداقل مقدار ممکن باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



- (۱) بازتاب
(۲) تجانس
(۳) انتقال
(۴) دوران

۹۹۴. نقاط A و B در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی محور y می‌لغزد، کمترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟

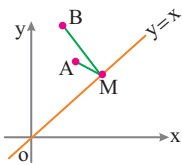
(مشابه داخل - ۹۸)



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۸

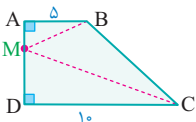
۹۹۵. نقاط A و B در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی نیمساز ناحیه اول می‌لغزد، کمترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟

(مشابه داخل - ۹۸)



- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۵
(۴) ۱۰

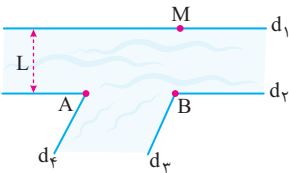
۹۹۶. در دوزنقه قائم شکل مقابل طول ساق قائم ۸ و قاعده‌ها ۵ و ۱۰ هستند. نقطه M روی ساق قائم می‌لغزد، کمترین طول خط شکسته BMC کدام است؟



- (۱) ۱۷
(۲) ۱۶
(۳) ۱۵
(۴) ۱۴

۹۹۷. می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها سه اسکله بسازیم، جای دو اسکله A و B مطابق شکل مشخص است، برای پیدا کردن جایگاه اسکله M که قایق‌ها هنگام

طی مسیر $MABM$ کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند، کدام تبدیل مناسب است؟



(۱) انتقال به اندازه بردار \vec{L}

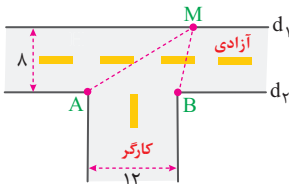
(۲) دوران 180° حول نقطه B

(۳) تجانس با نسبت ۱ - نسبت A نسبت به نقطه B

(۴) بازتاب نقطه A نسبت به خط $d1$

۹۹۸. شکل زیر دو خیابان متقاطع آزادی و کارگر با عرض ۸ و ۱۲ را نشان می‌دهد، شخصی می‌خواهد از نقطه A به سمت دیگر خیابان آزادی رفته و سپس به نقطه

B برود، طول کوتاه‌ترین مسیر طی شده، توسط شخص کدام است؟

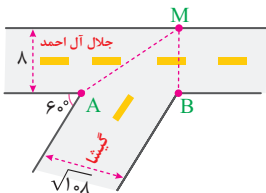


- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۱۵
(۴) ۲۵

۹۹۹. مطابق شکل دو خیابان گیشا و اتوبان جلال آل احمد با زاویه 60° همدیگر را قطع کرده‌اند، شخصی می‌خواهد از نقطه A در انتهای خیابان گیشا به آن طرف

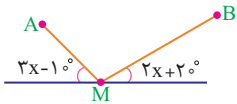
اتوبان جلال آل احمد در نقطه M رفته و سپس به نقطه B در انتهای دیگر خیابان گیشا برود. اگر عرض اتوبان جلال آل احمد ۸ و عرض خیابان گیشا $\sqrt{108}$ باشد،

کمترین طول مسیری که این شخص می‌تواند طی کند، کدام است؟



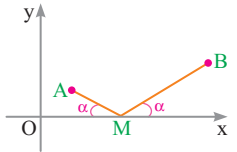
- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۱۵
(۴) ۲۴

۱۰۰۰. دو نقطه A و B در یک طرف خط d مفروض اند، اگر نقطه M طوری قرار گرفته باشد که خط شکسته AMB کمترین طول را داشته باشد، زاویه \widehat{AMB} کدام است؟



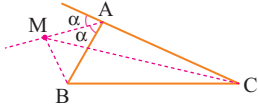
- ۱) 40°
 ۲) 5°
 ۳) 6°
 ۴) 2°

۱۰۰۱. اگر $A(2, 1)$ و $B(5, 3)$ و نقطه M مطابق شکل روی محور xها قرار گرفته باشد، اندازه خط شکسته AMB کدام است؟



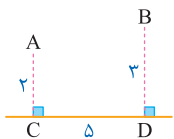
- ۱) ۵
 ۲) ۴
 ۳) ۶
 ۴) ۸

۱۰۰۲. در شکل مقابل، نقطه M روی نیمساز خارجی \widehat{A} قرار دارد. نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟



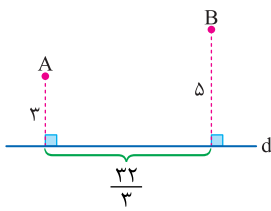
- ۱) بزرگتر از ۱
 ۲) کوچکتر از ۱
 ۳) برابر با ۱
 ۴) نامشخص

۱۰۰۳. در شکل زیر $BD=3, AC=2, CD=5$. فرض کنیم نقطه M روی خط d واقع است، کمترین مقدار $AM+MB$ کدام است؟



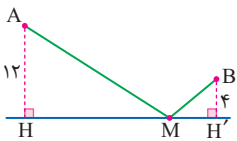
- ۱) $2\sqrt{5}$
 ۲) $3\sqrt{2}$
 ۳) $5\sqrt{2}$
 ۴) $5\sqrt{5}$

۱۰۰۴. در شکل زیر نقطه M را روی خط d طوری به دست می آوریم که $AM+BM$ کمترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟



- ۱) ۷
 ۲) ۶
 ۳) ۴
 ۴) ۵

۱۰۰۵. در شکل مقابل، نقاط A و B ثابت هستند. اگر کمترین مقدار $AM+MB$ برابر ۳۲ باشد، زاویه \widehat{HAM} کدام است؟



- ۱) 15°
 ۲) 30°
 ۳) 45°
 ۴) 60°



کاربرد مسئله هرون | تپ دوم

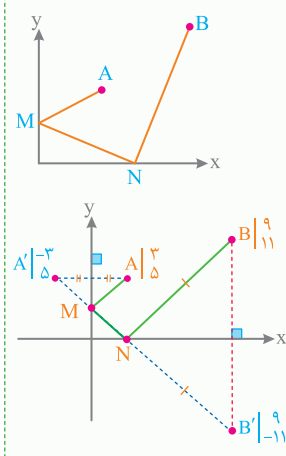
دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند، اگر نقطه M روی خط d_1 و نقطه N روی خط d_2 بلغزد، برای پیدا کردن کمترین طول خط شکسته AMNB کافیست قرینه A را نسبت به d_1 پیدا کرده و بنامیم A_1 ، حال اگر قرینه A_1 را نسبت به خط d_2 پیدا کرده و بنامیم A_2 ، برابر با کمترین طول خط شکسته AMNB است.

$$\text{Min}(AMNB) = |A_2B|$$

یک راه دیگر برای حل این مسئله این است که بازتاب A نسبت به d_1 و بازتاب B نسبت به d_2 یعنی نقاط A' و B' را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا این دو خط را در M و N قطع کنند. در این صورت خط شکسته AMNB کوتاهترین طول را دارد و اندازه آن با $|A'B'|$ برابر است.

در هر یک از دو روش فوق وقتی AMNB کوتاهترین طول را دارد زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N باید با هم برابر باشد و برعکس هرگاه این زاویه‌ها با هم برابر باشد، این کوتاهترین طول است. در ضمن در این حالت زاویه دو خط d_1 و d_2 برابر با میانگین زوایای داخلی خط شکسته AMNB است یعنی $x = \frac{y+z}{2}$.

قضیه فوق را برای بیش از دو خط d_1 و d_2 نیز می توان تعمیم داد.



Test نقاط $A \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 9 \\ 11 \end{vmatrix}$ در صفحه مختصات مفروض اند. دو نقطه M و N همواره روی دو محور می‌لغزند.

(داخل - ۹۸)

کمترین اندازه خط شکسته $AMNB$ ، کدام است؟

۱) ۱۸

۲) ۱۹

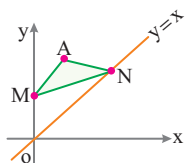
۳) ۲۰

۴) ۲۱

۳ اگر نقطه A را نسبت به محور y و نقطه B را نسبت به محور x قرینه کنیم و نقاط A' و B' را به هم وصل کنیم تا محور x ها و y ها را در M و N قطع کند، در این صورت خط شکسته $AMNB$ کمترین اندازه را خواهد داشت چون برابر $A'B'$ است.

$$\text{Min } |AMNB| = |A'B'| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

۱۰۰۶. نقطه $A \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ مفروض است، نقطه M روی محور y ها و نقطه N روی نیمساز ناحیه اول می‌لغزند، کمترین محیط مثلث AMN کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



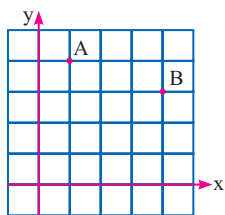
۱) $4\sqrt{2}$

۲) $2\sqrt{3}$

۳) $\sqrt{10}$

۴) $2\sqrt{5}$

۱۰۰۷. در شبکه شطرنجی زیر دو نقطه ثابت A و B مفروض اند. اندازه کوتاه‌ترین مسیر حرکت از نقطه A به طوری که پس از برخورد با محورهای x و y به نقطه B برسیم، برابر کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



سیم، برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{71}$

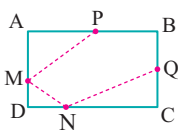
۲) $\sqrt{72}$

۳) $\sqrt{73}$

۴) $\sqrt{74}$

۱۰۰۸. مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۸ و ۶ مفروض است. اگر نقاط P و Q وسط اضلاع AB و BC باشند و نقاط M و N بر اضلاع AD و DC بلغزند، کمترین

(مشابه داخل - ۹۸)



طول خط شکسته $PMNQ$ کدام است؟

۱) ۱۶

۲) ۲۰

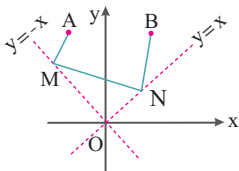
۳) ۱۸

۴) ۱۵

۱۰۰۹. نقاط $A \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 7 \\ 9 \end{vmatrix}$ در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی نیمساز ناحیه دوم و نقطه N روی نیمساز ناحیه اول در حال لغزش هستند، کمترین

(مشابه داخل - ۹۸)

طول خط شکسته $AMNB$ کدام است؟



۱) ۲۰

۲) ۱۳

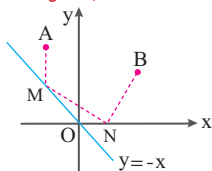
۳) ۱۰

۴) ۸

۱۰۱۰. نقاط $A \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 1 \\ 9 \end{vmatrix}$ در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی نیمساز ناحیه دوم و نقطه N روی قسمت مثبت محور x ها می‌لغزند، کمترین طول خط

(مشابه داخل - ۹۸)

شکسته $AMNB$ کدام است؟



۱) ۴

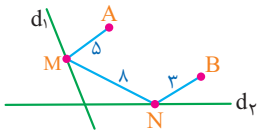
۲) ۵

۳) ۶

۴) ۱۰

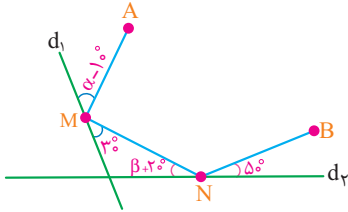


۱۰۱۱. نقاط ثابت A و B مفروض اند، نقطه M روی خط d_1 و نقطه N روی خط d_2 طوری می‌لغزد که خط شکسته $AMNB$ کمترین طول را دارد. اگر A' بازتاب A نسبت به d_1 و B' بازتاب B نسبت به خط d_2 باشد، اندازه پاره خط $A'B'$ کدام است؟

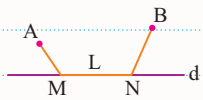


- ۱۴ (۱)
۱۲ (۲)
۱۶ (۳)
۱۸ (۴)

۱۰۱۲. نقاط A و B مطابق شکل مفروض اند، اگر فقط M و N روی خطوط d_1 و d_2 بلغزد به طوری که خط شکسته $AMNB$ کمترین طول را داشته باشد، زاویه $\alpha + \beta$ کدام است؟



- ۷۵° (۱)
۷۰° (۲)
۸۵° (۳)
۸۰° (۴)



نقاط A و B در یک طرف خط d مفروض اند، نقاط M و N روی خط d به فاصله L از هم قرار دارند، برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول خط شکسته $AMNB$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:



کاربرد مسئله هرون [تیب سوم]

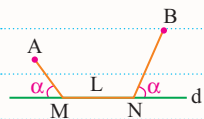
۱) بازتاب نقطه A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا می‌کنیم.

۲) نقطه B را به اندازه بردار \vec{L} به سمت A انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به دست آید.

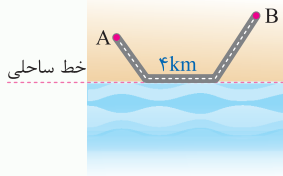
۳) از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند با معلوم شدن M به اندازه L به سمت راست می‌رویم و به نقطه N می‌رسیم در این صورت حداقل طول خط شکسته $AMNB$ برابر است با:

$$\text{Min}(AMNB) = |A'B'| + L$$

در این حالت زاویه \hat{M} و زاویه \hat{N} باید با هم برابر باشند.

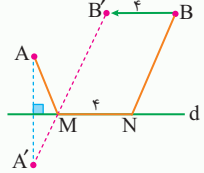


Test در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده باید در کنار ساحل باشد. برای پیدا کردن موقعیت محدوده جاده ساحلی به طوری که کل جاده کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



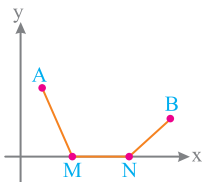
- ۱) بازتاب و دوران
۲) بازتاب و انتقال
۳) انتقال و تجانس
۴) دوران و تجانس

۲) باید نقطه B را به اندازه ۴ واحد به سمت A انتقال دهیم و همچنین بازتاب A نسبت به خط ساحلی را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا نقطه M به دست آید اگر به اندازه ۴ واحد از M به سمت راست حرکت کنیم به N می‌رسیم و از N به B وصل می‌کنیم، مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر است.



۱۰۱۳. نقاط A و B در صفحه مختصات مفروض اند، اگر نقاط M و N با فاصله ۳ واحد روی محور x قرار گرفته باشند، حداقل طول خط شکسته $AMNB$ کدام است؟

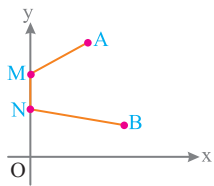
(مشابه داخل - ۹۹)



- ۵ (۱)
۶ (۲)
۷ (۳)
۸ (۴)

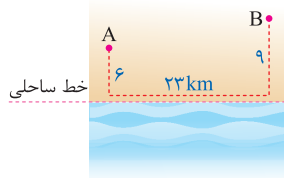


۱۰۱۴. نقاط A و B در صفحه مختصات مفروض‌اند، اگر نقاط M و N با فاصله ۲ واحد روی محور y قرار گرفته باشند، حداقل طول خط شکسته $AMNB$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۹)



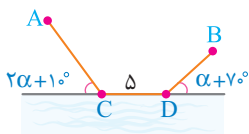
- ۵ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۸ (۴)

۱۰۱۵. در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۳ کیلومتر از آن باید در کنار ساحل باشد، با توجه به اندازه‌های داده شده طول کوتاه‌ترین مسیر از A به B چقدر خواهد بود؟ (مشابه داخل - ۹۹)



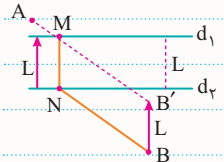
- ۲۸ (۱)
- ۲۹ (۲)
- ۳۲ (۳)
- ۲۵ (۴)

۱۰۱۶. دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند، یک جاده از A به B ساخته شده که ۵ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه واقع شده است، اگر مسیر $ACDB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد، زاویه α چند درجه است؟



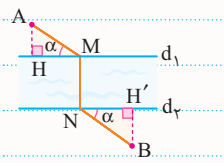
- 50° (۱)
- 60° (۲)
- 40° (۳)
- 30° (۴)

دو خط d_1 و d_2 به فاصله L از هم قرار دارند، اگر نقاط A و B در طرفین d_1 و d_2 قرار گرفته باشند و پاره خط MN عمود بر هر دو خط d_1 و d_2 باشد، برای پیدا کردن **کم‌ترین طول خط شکسته $AMNB$** کافیست B را به اندازه بردار L به موازات بردار L انتقال دهیم و از A به B' وصل کنیم تا خط d_2 را در M قطع کند، حال اگر از M عمودی بر d_1 رسم کنیم تا آن را در N قطع کند، در این صورت $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و اندازه آن برابر است با:



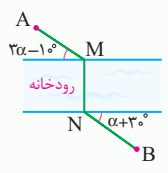
$$\text{Min}(AMNB) = |AB'| + L$$

اگر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه A و B باشد، زاویه‌های \widehat{M} و \widehat{N} با هم برابرند و مثلث‌های قائم‌الزاویه ساخته شده در دو طرف خط‌های d_1 و d_2 متشابه‌اند.



$$\widehat{M} = \widehat{N} \Rightarrow \triangle AHM \sim \triangle NBH'$$

Test دو شهر A و B در دو طرف رودخانه قرار دارند، می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، اگر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر بین A و B باشد، α کدام است؟



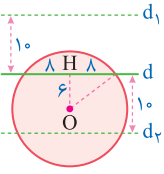
- 10° (۱)
- 20° (۲)
- 30° (۳)
- 25° (۴)

۲ باید زاویه‌های \widehat{M} و \widehat{N} با هم برابر باشند:

$$3\alpha - 1^\circ = \alpha + 3^\circ \Rightarrow 2\alpha = 4^\circ \Rightarrow \alpha = 2^\circ$$



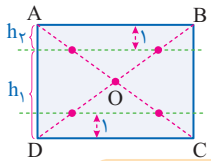
8 ۱- نقطاتی که به فاصله ۱۰ واحد از خط d قرار دارند روی دو خط d_1 و d_2 به فاصله ۱۰ واحد از d واقع‌اند، حال به کمک فیثاغورس شعاع دایره هم ۱۰ به دست می‌آید؛ بنابراین یکی از این دو خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.



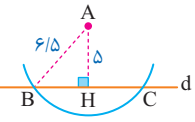
9 ۳- می‌دانیم هر نقطه درون مستطیل مجموع فاصله‌هایش از AB و CD برابر عرض مستطیل است. حال قرار است که اختلاف فاصله‌هایش نیز ۴ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = 6 \\ h_1 - h_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow h_1 = 5, h_2 = 1$$

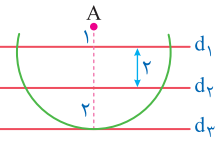
همان‌طور که می‌بینید دو خط با شرایط فوق وجود دارد که در مجموع در ۴ نقطه قطرهای را قطع می‌کند.



10 ۲- نقطاتی که به فاصله ۶/۵ از نقطه A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۶/۵ قرار دارند که چون $6/5 > 5$ است این دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط جواب‌های تست هستند.



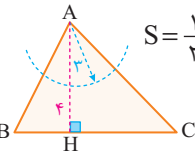
11 ۴- نقطاتی که به فاصله ۵ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ واحد قرار دارند که این دایره در ۵ نقطه با این خطوط برخورد می‌کند.



12 ۱- نقطاتی که به فاصله ۳ واحد از رأس A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ واحد قرار دارند. حال برای این که ببینیم آیا این دایره قاعده BC را قطع می‌کند یا نه باید ارتفاع مثلث را بدانیم:

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \times AH \times 6 \Rightarrow AH = 4$$

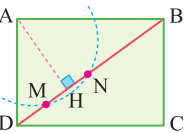
بنابراین دایره قاعده BC را قطع نمی‌کند، یعنی هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.



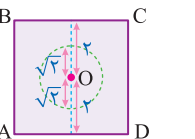
13 ۴- نقطاتی که فاصله آن از نقطه A کمتر از ۲/۵ است درون دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲/۵ قرار دارند، حالا باید ببینیم که وضع این دایره نسبت به قطر BD چگونه است؟

$$AH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{5} = 2/4$$

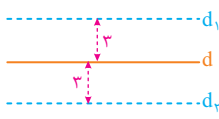
بنابراین این دایره قطر را در دو نقطه M و N قطع می‌کند و تمام نقاط روی MN فاصله آن‌ها از A کمتر از ۲/۵ است، یعنی بی‌شمار نقطه وجود دارد.



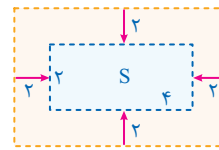
14 ۴- نقطاتی که به فاصله $\sqrt{2}$ واحد از مرکز مربع قرار دارند، روی دایره به مرکز O و به شعاع $\sqrt{2}$ واحد قرار دارند. حال باید دید این دایره در چند نقطه محیط را قطع می‌کند که مطابق شکل مقابل این دایره هرگز با اضلاع مربع نقطه تقاطعی ندارد.



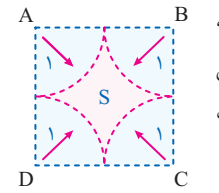
1 ۴- نقاط مورد نظر روی خطوط d_1 , d_2 , d_3 قرار دارند و از آن جایی که هر خط شامل بی‌شمار نقطه است، بنابراین گزینه ۴ جواب است.



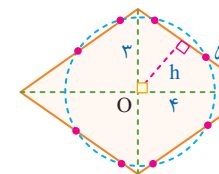
2 ۱- برای این که یک سکه کاملاً درون یک منحنی بسته قرار بگیرد باید فاصله مرکز سکه از تمام نقاط منحنی از شعاع سکه بزرگتر باشد، بنابراین باید فاصله مرکز سکه از تمام اضلاع مستطیل بیشتر از ۲ باشد:

$$S = 4 \times 2 = 8$$


3 ۲- مکان هندسی نقطاتی که فاصله آن‌ها از رأس A بزرگتر از ۱ است، بیرون دایره به مرکز A و به شعاع ۱ است و به طریق مشابه در سایر رئوس نیز این داستان برقرار است. بنابراین مکان هندسی مورد نظر مطابق شکل است و مساحت آن برابر است با:

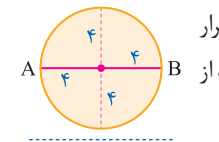
$$S = 2^2 - 4 \left(\frac{1}{4} \pi \times 1^2 \right) = 4 - \pi$$


4 ۳- در این لوزی فاصله مرکز تا هر کدام از اضلاع را پیدا می‌کنیم:

$$h \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5} = 2/4$$


از آنجایی که $2/4 < 2/5 < 3$ است، دایره به مرکز O و به شعاع ۲/۵ هر ضلع لوزی را در دو نقطه قطع می‌کند، یعنی گلاً ۸ نقطه وجود دارد.

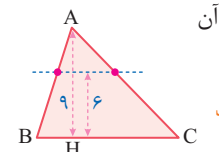
5 ۱- نقطاتی که به فاصله ۵ واحد از قطر AB قرار دارند روی دو خط به موازات AB و به فاصله ۵ واحد از آن قرار دارند که این دو خط دایره را قطع نمی‌کنند.



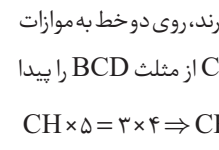
6 ۳- ابتدا از روی قاعده و مساحت مثلث ارتفاع آن را به دست می‌آوریم.

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow AH = 9$$

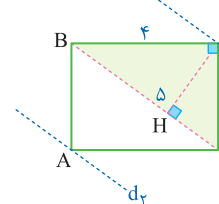
چون $6 < 9$ است، مطابق شکل دو نقطه وجود دارد.



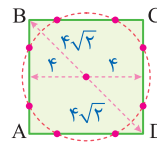
7 ۳- نقطاتی که به فاصله ۲/۴ از قطر BD قرار دارند، روی دو خط به موازات BD و به فاصله ۲/۴ از آن قرار دارند، حال ارتفاع CH از مثلث BCD را پیدا می‌کنیم:

$$CH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow CH = \frac{12}{5} = 2/4$$


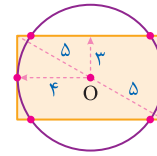
چون $CH = 2/4$ است، بنابراین دو خط d_1 و d_2 دقیقاً از نقاط A و C می‌گذرند، یعنی دو نقطه روی محیط مستطیل وجود دارد.



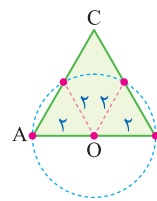
15 دایره به شعاع ۵ واحد و به مرکز مربع، محیط را در ۸ نقطه قطع می‌کند



چون ۵ از نصف ضلع مربع بزرگتر شده و از نصف قطر $\frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} = 5/6$ کمتر است، یعنی $\frac{a}{2} < R < \frac{a\sqrt{2}}{2}$ است.

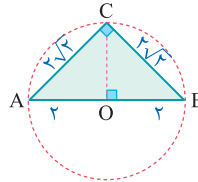


16 دایره به شعاع ۴ واحد و به مرکز نقطه O بر عرض‌های مستطیل مماس شده و طول‌های آن را در ۴ نقطه قطع می‌کند، پس در مجموع ۶ نقطه وجود دارد.



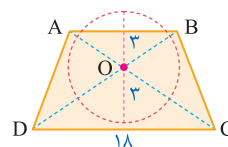
17 نقاطی که به فاصله ۲ واحد از نقطه O وسط ضلع AB قرار دارند روی دایره به شعاع ۲ و به همان مرکز هستند که همان طور که در شکل ملاحظه می‌کنید این دایره در ۴ نقطه محیط مثلث را لمس می‌کند.

18 دایره به شعاع ۲ و به مرکز وسط وتر از هر سه رأس مثلث می‌گذرد، بنابراین



۳ نقطه روی محیط و به فاصله ۲ واحد از وسط وتر وجود دارد. [وتر به کمک فیثاغورس به دست می‌آید و OC هم به کمک فیثاغورس در OAC به دست می‌آید.]

19 نقاط به فاصله ۳ واحد از نقطه O روی دایره به شعاع ۳ واقع‌اند، حال

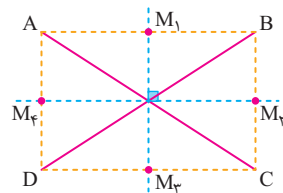


باید ببینیم این دایره قاعده‌ها را در چند نقطه قطع می‌کند، بنابراین ارتفاع دوزنقه را به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD) \times h \Rightarrow 90 = \frac{1}{2}(18 + 12) \times h \Rightarrow h = \frac{180}{30} = 6$$

بنابراین دایره به شعاع ۳ در دو نقطه قاعده کوچک را قطع می‌کند.

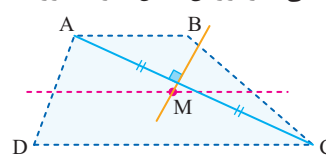
20 مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو قطر مستطیل به یک فاصله



هستند، محورهای تقارن مستطیل هستند، این خطوط محیط مستطیل را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

21 مکان هندسی نقاطی که از دو قاعده به یک فاصله است، خط میانگین

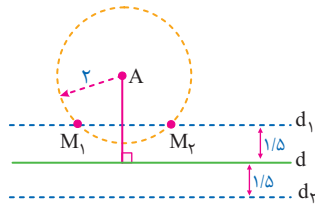
دوزنقه است، از طرفی مکان هندسی نقاطی که از دورأس مقابل A و C دوزنقه



به یک فاصله است، عمودمنصف AC است، حال اشتراک این دو مکان هندسی همواره یک نقطه مانند M است.

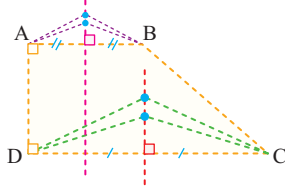
22 مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی متر هستند، دایره‌ای

به شعاع ۲ و به مرکز A است و همچنین مکان هندسی نقاطی که به فاصله ۱/۵



سانتی متر از d هستند دو خط به موازات d و در طرفین آن و به فاصله ۱/۵ سانتی متر از آن هستند، بنابراین تعداد نقاط تقاطع این دو مکان هندسی مطابق شکل برابر ۲ است.

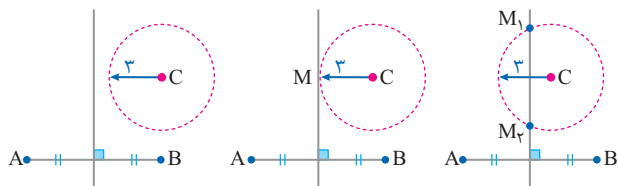
23 عمودمنصف‌های قاعده‌های AB و CD همواره موازی هم هستند



و نقطه برخوردی ندارند، بنابراین هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که هم از A, B و هم از C, D به یک فاصله باشد.

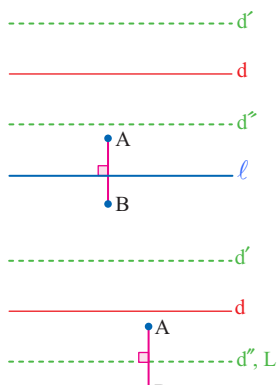
24 تعداد نقاط هم‌فاصله از A, B که به فاصله ۳cm از C باشد، همواره

یکی از سه عدد صفر، یک یا دو است و هرگز برابر ۴ نیست.



25 مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB

و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d و به فاصله ۳ سانتی متر از آن هستند، بنابراین نقطه برخورد l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d', d'' جواب مسئله است که سه حالت امکان پذیر است:



1 بدون برخورد [هیچ جواب]

2 بی‌شمار برخورد [بی‌شمار جواب]

3 ۲ برخورد [دو جواب]